1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා, ව.පැ. $= 6+1=7$ හා

ද.පැ. $= 1(3+4) = 7$ වේ.

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **5**

> $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා

k යනු ඕනෑම ධන නිඛිලයක් යැයි ගෙන $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(6r+1) = k(3k+4).$ **5**

> $n=k$ සඳහා ප්‍රකාශනය ලිවීමට

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1}(6r+1) = \sum_{r=1}^{k}(6r+1) + \{6(k+1)+1\}$

$= k(3k+4) + 6k + 7$ **5**

> "$n=k$ ප්‍රතිඵලය, "$n=k+1$" හි ආදේශ කිරීම සඳහා

$= 3k^2 + 10k + 7$

$= (k+1)(3k+7).$ **5**

> $(k+1)\ (3k+7)$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයක් පෙන්වා තිබීමට

$= (k+1)[3(k+1)+4].$

ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යනම් $n=k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

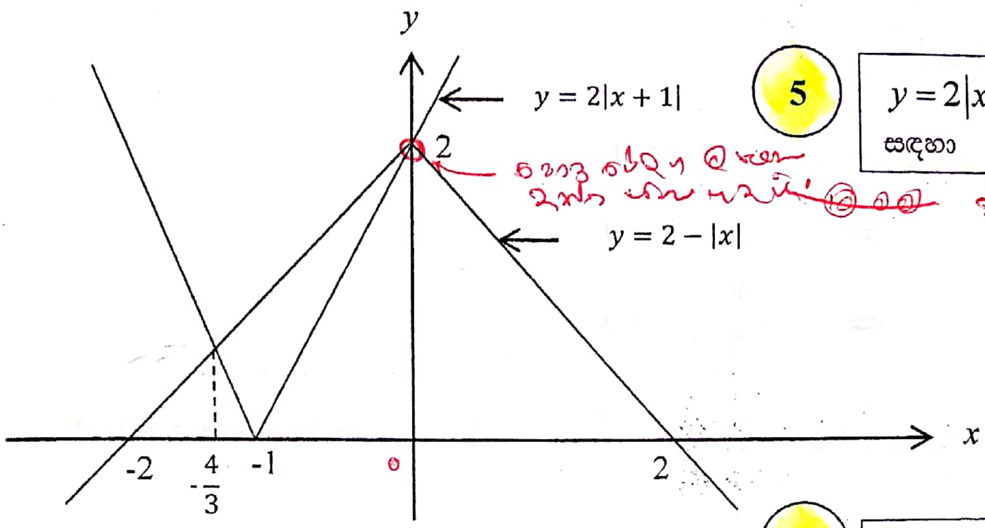
$n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යබව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම මඟින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **5**

> ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට අනුව නිගමනයට (සියලුම අනෙක් පියවර නිවැරදි නම් පමණි.)

Scanned with CamScanner

2. එක ම රූප සටහනක $y=2|x+1|$ හා $y=2-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $2|x+2|+|x|\leq 4$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



5 — $y=2|x+1|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

5 — $y=2-|x|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

(ප්‍රස්තාර සඳහා ලකුණු 10 ම ලබා ගැනීමට y - අක්ෂය මත පොදු ඡේදන ලක්ෂ්‍යය තිබිය යුතුය. නොඑසේ නම් ලකුණු 05 ක් පමණි.)

එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x − ඛණ්ඩාංක $x=0$ වේ.

$x<-1$ සඳහා අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x − ඛණ්ඩාංක $-2(x+1)=2+x$ මගින් දෙනු ලබයි.

මෙය $x=-\frac{4}{3}$ ලබා දෙයි. 5

~~$x=0$~~ සහ $x=-\frac{4}{3}$ පෙන්වා තිබීමට

$t=\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. 5

$t=\frac{x}{2}$ ආදේශයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

එවිට දෙන ලද අසමානතාව $2|2t+2|+|2t|\leq 4$ බවට පත් වේ.

මෙය $2|t+1|\leq 2-|t|$ ට තුල්‍ය වේ.

ප්‍රස්තාර මගින් $-\frac{4}{3}\leq t\leq 0.$

$\therefore\ -\frac{8}{3}\leq x\leq 0.$ 5

නිවැරදි විසඳුම ලබා ගැනීමට

Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය 1:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

(i) අවස්ථාව $x \le -2$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow -2(x+2)-x \le 4$

$$\Leftrightarrow \quad -3x-4 \le 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{8}{3} \le x$$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-\frac{8}{3} \le x \le -2$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $-2 < x \le 0$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)-x \le 4$

$$\Leftrightarrow \quad x \le 0$$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-2 < x \le 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > 0$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)+x \le 4$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+4 \le 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x \le 0$$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්තා 3ම සඳහා	(10)
නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්තා 2 ක් සඳහා	(5)

$\therefore$ දෙන ලද අසමානතාව සඳහා විසඳුම් වන්නේ $-\frac{8}{3} \le x \le 0$ (5)

තෘප්තකරන x හි අගයන් වේ.

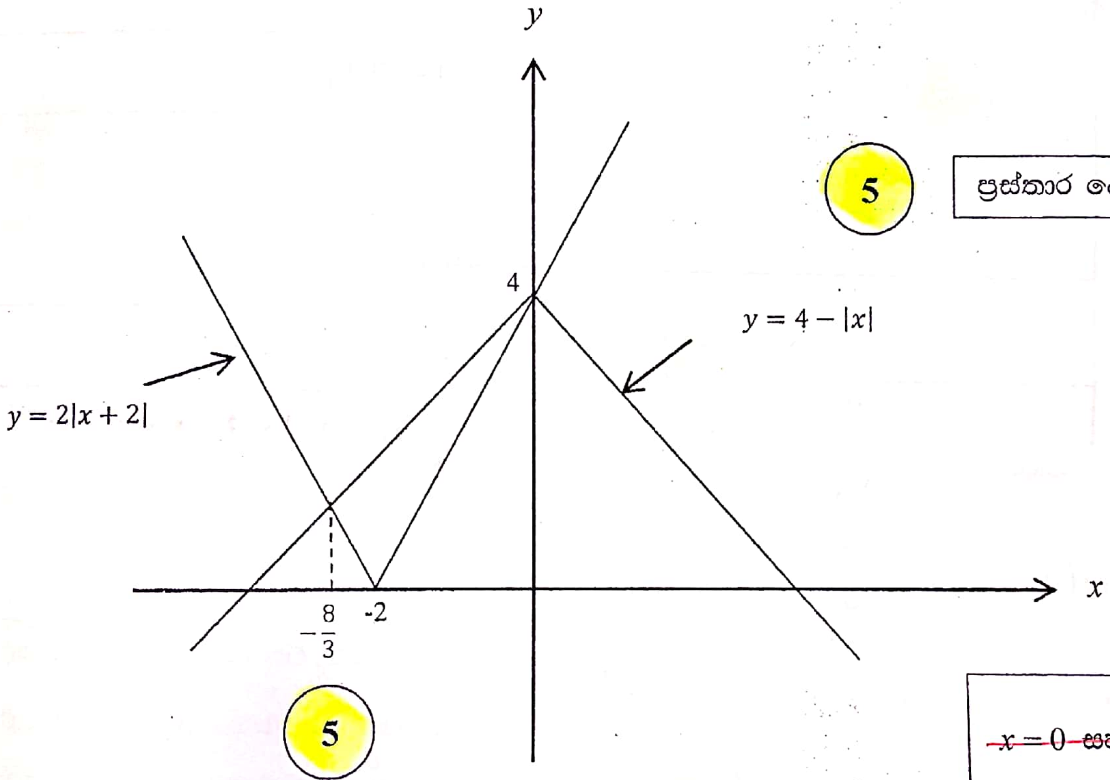
Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය 2:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$$2|x+2|+|x|\leq 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x+2| \leq 4-|x|$$



ප්‍රස්තාර දෙක සඳහා

~~$x=0$ සහ~~ $x=-\frac{8}{3}$ පෙන්වා තිබීම.

ප්‍රස්තාර මගින්,

$$2|x+2|\leq 4-|x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}\leq x\leq 0$$

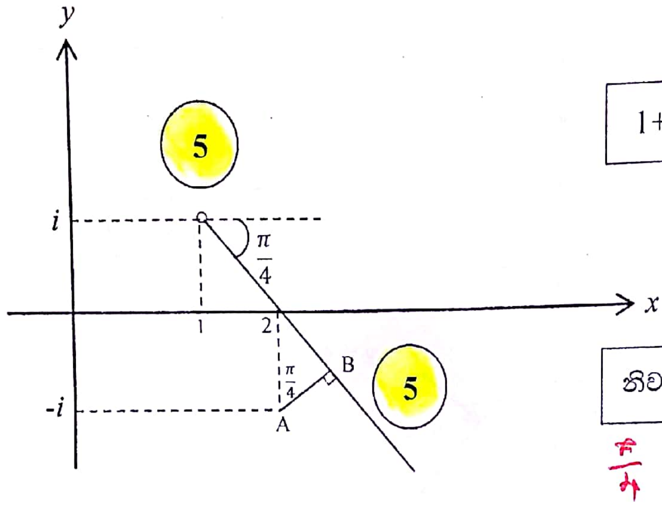
(5)

නිවැරදි විසඳුම පෙන්වා තිබීමට

Scanned with CamScanner

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\operatorname{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\operatorname{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$ සපුරාලන $|z-2+i|$ හි අවම අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

$$\operatorname{Arg}\left(z-(1+i)\right) = -\frac{\pi}{4}$$



1+i හි සිදුර

නිවැරදි අර්ධ රේඛාව

$$\operatorname{Arg}\left(i(z-i-1)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arg} i + \operatorname{Arg}\left(z-(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arg}\left(z-(1+i)\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{(5)}$$

ගුණිතයක විස්තාරය ඓක්‍යයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම සහ $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$ භාවිතය

දැන්, $\min |z-(2-i)| = AB$ (5)

$$= 1.\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(5)}$$

අඩුම දුර තහවුරු කිරීම.

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

$AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ම

Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\frac{\pi}{4} = Arg(iz + 1 - i) = Arg\left(1 - y + i(x - 1)\right)$

$\therefore \quad x - 1 = (1)(1 - y)$ (5)

$\Rightarrow \quad x + y = 2.$

දෙන ලද විස්තාරය x හා y අතර සම්බන්ධයක් ලෙස ලිවීම.

දැන් $|z - 2 + i| = |x + iy - 2 + i|$

$= |(x - 2) + i(y + 1)|$

$= |y + i(y + 1)| \qquad (\because x - 2 = y)$

$= \sqrt{y^2 + (y + 1)^2}$

$= \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ (5)

මාපාංකය, x හෝ y හි වර්ග පූර්ණය ලෙස ලිවීම.

$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left(\because\ 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.\right.$ (= 0 වන්නේ $y = -\frac{1}{2}$ විටය.))

$\therefore \min|z - 2 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Scanned with CamScanner

4. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^7 හි සංගුණකය හා $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{-7} හි සංගුණකය සමාන බව දී ඇත. $k=1$ බව පෙන්වන්න.

$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ සඳහා

$$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$$

$22-3r = 7 \Rightarrow r = 5$ **5** — r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore$ x^7 හි සංගුණකය $= {}^{11}C_5\ k^5$ **5** — නිවැරදි සංගුණකය

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ සඳහා $T_{r+1} = {}^{11}C_r\ x^{11-r}\ (-1)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r\,{}^{11}C_r\ x^{11-3r}$

$11-3r = -7 \Rightarrow\ r = 6$ **5** — r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore$ x^{-7} හි සංගුණකය $= {}^{11}C_6$ **5** — නිවැරදි සංගුණකය

එවිට, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5\ k^5$ මගින් ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$ නිසා $k=1$ ලබා දෙයි.

5 — පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Scanned with CamScanner

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

5 ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right) \times \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right) \times \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= 1 \times 2 \times 1 \times 2$$

5 5 5 5

සීමා එක එකක් සඳහා 5

$$= 4.$$

Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$ (5)

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1+\cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4\left(\lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

(5) (5) (5) (5)

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

$$= 4.$$

Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

5 — ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x(2\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^4 x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\tan^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$$

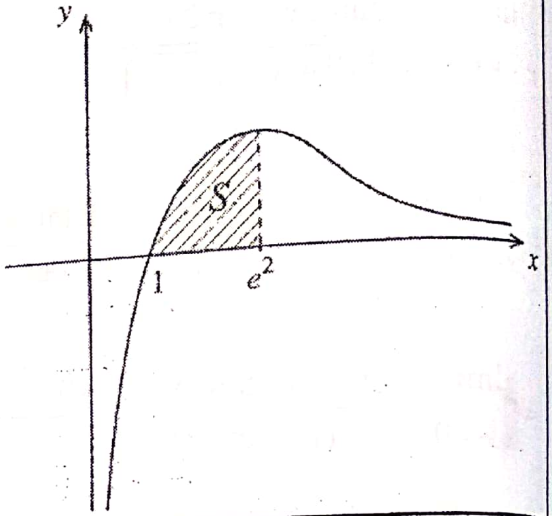
5 5 5 5

$$= 4.$$

සීමා එක එකක් සඳහා 5

Scanned with CamScanner

6. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y=0$ හා $x=e^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස S යැයි ගනිමු. S හි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක 4 ක් බව පෙන්වන්න.
S පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{8\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



S හි වර්ගඵලය $=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (5)

S සඳහා අනුකලය සකසා ගැනීම

$$=(\ln x).2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2x^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{x}dx$$ (5)

කොටස් වශයෙන් අනුකලනයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$$=4e-2\int_1^{e^2}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=4e-\left(2\sqrt{x}2\right)\Big|_1^{e^2}$$

$$=4e-4e+4$$

$$=4$$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

අවශ්‍ය පරිමාව $=\displaystyle\int_1^{e^2}\pi\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ (5)

පරිමාව සඳහා අනුකලය සකසා ගැනීමට

$$=\pi\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$$

$$=\pi\frac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^{e^2}$$

$$=\frac{8\pi}{3}.$$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

Scanned with CamScanner

7. $t \neq 0$ සඳහා $x = ct$ හා $y = \frac{c}{t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $x + p^2y = 2cp$ බව පෙන්වන්න.

P හි දී මෙම බහුවලයට වූ අභිලම්භ රේඛාව වෙනත් $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලය නැවත හමු වේ.

$p^3q = -1$ බව පෙන්වන්න.

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \text{හා} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{c}{t^2}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$$

(5)

t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ ලිවීම

$\therefore$ P හිදී ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{t^2}\Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$

$\therefore$ P හිදී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - cp)$$

$\therefore x + p^2y = 2cp.$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

P හිදී අභිලම්බයේ අනුක්‍රමය $= p^2$.

$\therefore$ P හිදී අභිලම්බයේ සමීකරණය $y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$ (5)

අභිලම්බයේ සමීකරණය

$Q \equiv (cq, \frac{c}{q})$ මෙම අභිලම්බ රේඛාව මත වේ.

$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \quad \Rightarrow c(p-q) = -p^3qc(p-q)$ (5)

ආදේශ කිරීම සඳහා

P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් නිසා $p \neq q$ වේ.

$p^3q = -1.$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය: (අන්තිම කොටස සඳහා)

PQ අනුක්‍රමණය = P හිදී අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය 5

$$\therefore \frac{\frac{c}{q}-\frac{c}{p}}{cq-cp}=p^2 \quad 5 \quad (\because p \neq q, c \neq o)$$

$$\therefore p^3q=-1 \quad 5$$

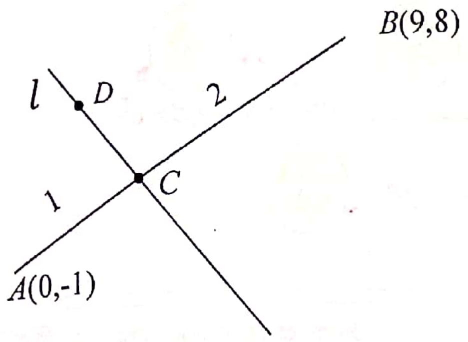
අවශ්‍යතාව සඳහා

ආදේශය සඳහා

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

Scanned with CamScanner

8. $A \equiv (0, -1)$ හා $B \equiv (9, 8)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය AB මත $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි පිහිටයි. C හරහා යන AB ට ලම්බ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය $x + y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න. $y = 5x + 1$ සරල රේඛාවට AD සමාන්තර වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. D හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1}\right)$$

$\equiv (3,2)$ **5**

C හි ඛණ්ඩාංක

AB හි අනුක්‍රමණය $= 1$

l හි අනුක්‍රමණය $= -1$ **5**

l හි අනුක්‍රමණය සඳහා

$\therefore$ l හි සමීකරණය

$$y - 2 = -1(x - 3)$$

එනම්, $x + y - 5 = 0$. ---------------- (1) **5**

l හි සමීකරණය ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

AD හි සමීකරණය $y - (-1) = 5(x - 0)$ **5**

එනම්, $y + 1 = 5x$ ---------------- (2)

D හි ඛණ්ඩාංක ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

(1) හා (2) විසඳීමෙන්

$D \equiv (1, 4)$. **5**

$D \equiv (1,4)$ තිබීම

Scanned with CamScanner

9. $x + 2y = 3$ සරල රේඛාව, $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ වෘත්තය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍ය දෙක හා $S = 0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

විකල්ප ක්‍රමය: (5) කේන්ද්‍රයේ සිට ලම්බ දුර $<$ අරය (5)
සන්සන්දනයට (5)

$$S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$$

$x + 2y - 3 = 0$ රේඛාව ℓ යැයි ගනිමු.

ℓ මත: $x = 3 - 2y$;

$$(3 - 2y)^2 + y^2 - 4(3 - 2y) + 1 = 0$$

$$\therefore \quad 5y^2 - 4y - 2 = 0 \quad (5)$$

වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගැනීමට

මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ විවේචක, $\Delta = 16 + 4(5)(2)$ (5)

විවේචකය ලිවීම

$\Delta > 0$ නිසා $x + 2y = 3$ රේඛාව ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී S ඡේදනය කරයි. (5)

$\Delta > 0$ සඳහා

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 4x + 1 + \lambda(x + 2y - 3) = 0$ ලෙස ලිවිය හැක; (5)

λ ආකාරය සඳහා

මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

මෙම වෘත්තය, $(2,0)$ හරහා ගමන් කරන නිසා

$$4 - 8 + 1 + \lambda(2 - 3) = 0$$

$$\therefore \lambda = -3 \quad (5)$$

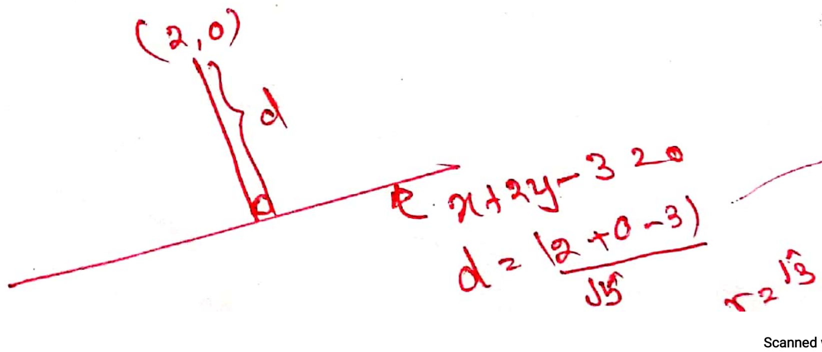
$\lambda = -3$ ලබා ගැනීමට

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 + (-3)(x + 2y - 3) = 0$$

එනම්, $x^2 + y^2 - 7x - 6y + 10 = 0.$

ලිවීම ප්‍රමාණවත්



Scanned with CamScanner

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ යන්න $R\cos(2x-\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R>0$ හා $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ වේ.
ඒ නයින්, $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x\cos x)$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$$ **5**

cos $2x$ හා sin $2x$ භාවිතයෙන් ප්‍රකාශන ලිවීමට

$$= 2\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$$

$$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

මෙහි $R = 2$ හා $\alpha = \frac{\pi}{3}$

5 **5**

$R = 2$ ලබා ගැනීමට

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ලබා ගැනීමට

$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 1$ සමීකරණය

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1 = 1$ ට තුල්‍ය වේ.

$$\therefore \quad 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

ඒ නයින්, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **5**

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ලබා ගැනීමට

$$\therefore \quad 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}; \quad n \in \mathbb{Z}$$ **5**

නිවැරදි පිළිතුර ලබා ගැනීමට

Scanned with CamScanner

11. (a) $k > 1$ යැයි ගනිමු. $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha+\beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, $1 < k < 3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ හා $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $x^2 + x - 2$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ බව දී ඇත. a, b හා c හි අගයන් සොයන්න.

තවද, a, b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිතව, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) - 2g(x) \le \frac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(a)

$x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ හි විවේචකය Δ යැයි ගනිමු.

එවිට $\Delta = 4(k+1)^2 - 4(k-3)^2$ (5)

$= 4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$

$= 32(k-1).$ (5)

$k > 1$ නිසා $\Delta > 0$ වේ. (5)

$\therefore$ දෙන ලද සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල දෙකක් ඇත. (5)

20

$\alpha + \beta = 2(k+1)$ හා $\alpha\beta = (k-3)^2$ (5) + (5)

α හා β දෙකම ධන වීම සඳහා

$\alpha + \beta > 0$ හා $\alpha\beta > 0$ විය යුතුයි. (10)

$k > 1$ නිසා $\alpha + \beta = 2(k+1) > 0$ වේ. (5)

හා $\alpha\beta = (k-3)^2 > 0$ ම නම් පමණක් $k \neq 3$ වේ. (10)

$\therefore$ අවශ්‍ය k හි අගයන් $1 < k < 3$ හෝ $k > 3$ වේ.

35

Scanned with CamScanner

දැන් $1<k<3$ යැයි ගනිමු. $\alpha>0$ සහ $\beta>0$ බව දනිමු.

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන සමීකරණය $\left(x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=0$ වේ. (5)

එනම්, $x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=0.$ (5)

එනම්, $\sqrt{\alpha\beta}x^2-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x+1=0.$ (5)

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(k-3)^2}=|k-3|=3-k$ බව දනිමු $(\because 1<k<3)$. (5)

තවද, $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ (5)

$=2(k+1)+2(3-k)$ (5)

$=8.$ (5)

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$ (5) $(\because \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0.)$

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $(3-k)x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ වේ. (5)

45

(b)

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$

$f(x)$ යන්න $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 නිසා ශේෂ ප්‍රමේය මඟින්

$f(1)=5.$ (5)

$\therefore\ a+b+3=5$

$a+b=2.$ (5) ---------------- (1)

$g(x)$ යන්න x^2+x-2 න් බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ නිසා

$\lambda\in\mathbb{R}$ සඳහා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1=(x^2+x-2)(x+\lambda)+x+1$ (5)

$((x^0))$; $1=-2\lambda+1 \Rightarrow \lambda=0.$

$\therefore g(x)=x(x^2+x-2)+x+1$

$=x^3+x^2-x+1.$

ඒ නයින්, $c=1$ හා $a=-1$ වේ. (5) + (5)

දැන් (1) මඟින් $b=3$ වේ. (5)

30

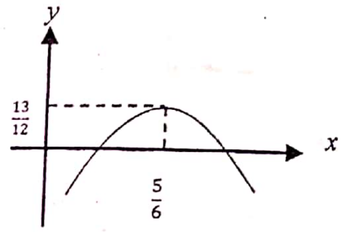
$$f(x)-2g(x)=2x^3-x^2+3x+1-2(x^3+x^2-x+1)$$

$$=-3x^2+5x-1 \quad \textcircled{5}$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \quad \textcircled{5}$$

$$\leq -3\times\left(\frac{-13}{36}\right), \because \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0. \quad \textcircled{5}$$



$$\therefore\ f(x)-2g(x)\leq\frac{13}{12}. \quad \textcircled{5}$$

20

Q11 (a) 20, 35, 45

(b) 30, 20

12. (*a*) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10 න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{-16r^3+12r^2+40r+9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}}U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(a)

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) 1,2,3,4 හා 5 අතරින් වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4කින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= {}^5P_4$ (5)

$= 5!$ (5)

$= 120$ (5)

15

Scanned with CamScanner

12 - b

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4ක් තෝරාගෙන සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන

	එවැනි වෙනත් සංඛ්‍යාංක 4ක සංඛ්‍යා ගණන
වෙනස් සංඛ්‍යාංක හතරකින්	${}^5P_4 = 120$
එක් සංඛ්‍යාංකයක් පමණක් දෙවරක් පුනරාවර්තව සහ අනෙක් සංඛ්‍යාංක දෙක වෙනස්	10 $\;{}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$ 5
සංඛ්‍යාංක දෙකක් දෙවරක් පුනරාවර්තව	10 $\;{}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ 5
එක් සංඛ්‍යාංකයක් තෙවරක් පුනරාවර්තව	10 $\;{}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{4!}{3!} = 16$ 5

$\therefore$ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 120 + 288 + 36 + 16$ 5

$= 460$ 5

55

(b)

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්

$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$

$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$

$r^1 : 40 = 25A - 5(1 - 4B)$

$r^0 : 9 = -5A + 5B$ 10

Scanned with CamScanner

$A = \frac{1}{5}$ සහ $B = 2$

(5) (5) **20**

$\therefore U_r = \frac{r-1}{5(2r+1)^2} - \frac{r-2}{(2r-1)^2}$ (5)

$\therefore \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2} - \frac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2}$ (5)

හා ඒ නයින්,

$\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$; මෙහි $f(r) = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2}$ වේ. (10)

$r = 1;\quad \frac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2;\quad \frac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1)$ (5)

$\vdots \quad \vdots$

$r = n-1;\quad \frac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n\quad \frac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1)$ (5)

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0)$ (5)

$= \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} - (-1)$ (5)

$= 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ (5)

45

Scanned with CamScanner

(12)_b

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}\right)$$

5

$$= 1 .$$ **5**

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර එෙකාය 1 වේ. **5**

15

Q12 – (a) 15 , 55

(b) 20 , 45 , 15 ,

13 – a

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ හා $z_2 = 1 + i$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,

ඒ නයින්, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(1 - i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*a*)

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & a+3 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$ (5) (10)

4 ම නිවැරදි නම්	10
3 ක් පමණක් නිවැරදි නම්	5

$|C| = (a^2+3) - (a+1)(a+3) = -4a$

$\neq 0 \ (\because a \neq 0)$ (5)

$\therefore$ සියලු $a \neq 0$ සඳහා C^{-1} පවතී. (5)

25

---

4 ම නිවැරදි නම්	10
3 ක් පමණක් නිවැරදි නම්	5

$a \neq 0$ සඳහා $C^{-1} = -\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix}$ (10)

$C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} -1 & a+3 \\ a+1 & -a^2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix}$

10

Scanned with CamScanner

2 ම නිවැරදි නම්	10
1 ක් පමණක් නිවැරදි නම්	5

$$\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}2a+5\\-2a^2+a-5\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9\\-11\end{pmatrix}$$ 10

$$\frac{2a+5}{4a}=\frac{9}{8} \text{ හා } \frac{-2a^2+a-5}{4a}=-\frac{11}{8}$$ 5

මෙම සමීකරණ දෙක මගින් $a=2$ වේ. 5 — **20**

5

$a=2$ විට $C=\begin{pmatrix}7&5\\3&1\end{pmatrix}$ හා $C^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-5\\-3&7\end{pmatrix}$.

$$DC-C^TC=8I \Leftrightarrow D-C^T=8IC^{-1}$$ 5

5

$$\therefore D=C^T+8C^{-1}=\begin{pmatrix}7&3\\5&1\end{pmatrix}+8\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix}1&-5\\-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\8&-6\end{pmatrix}.$$ 5 — **20**

(b)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i)=\underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x}+i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_{y}$$ 5

5 — **10**

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ 5

5

$$z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ 5

5

$$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$ 10 — **30**

Scanned with CamScanner

(12) a / b

$$f(x)+|f(x)| = \begin{cases} 2f(x), & f(x) \geq 0 \text{ විට.} \\ 0, & f(x) < 0 \text{ විට.} \end{cases}$$

$\therefore f(x)+|f(x)| > 0$ ම නම් පමණක් $f(x) > 0$. (5)

$\therefore$ $f(x)+|f(x)| > 0$ තෘප්ත කරන තාත්ත්වික අගයන්

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{4} < x < 0$ or $x > 2$. (5)

(10)

15

(b)

$x > 0$ සඳහා;

$$36 = xy + \frac{3}{8}\pi x^2 \quad (10)$$

$\therefore$ $y = \frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x$, $x > 0$ සඳහා

$$p = 2x + 2y + 2\left(\frac{3}{8}\pi x\right) \quad (10)$$

$$= 2x + 2\left(\frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x\right) + \frac{3}{4}\pi x$$

$$\therefore p = 2x + \frac{72}{x} \quad (5)$$

$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}$; $x > 0$.

(5)

$\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 6$. (5)

$0 < x < 6$ සඳහා $\frac{dp}{dx} < 0$ සහ

$x > 6$ සඳහා $\frac{dp}{dx} > 0$.

$\therefore$ $x = 6$ විට p අවම වේ. (5)

40

Q14 (a) 25, 30, 40, 15
(b) 40,

Scanned with CamScanner

හැරවුම් ලක්ෂ්‍යයහි දී:

$f^{1}(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad x=\frac{1}{2}$ (5)

	$-\infty<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<2$	$2<x<\infty$
$f^{1}(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$f(x)$	↘ අඩු වේ	↗ වැඩි වේ	↗ වැඩි වේ	↘ අඩු වේ	↘ අඩු වේ
	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)

$\therefore f(x)$ යන්න $[-1,0)$ හා $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ මත වැඩි වන අතර

$(-\infty,-1]$, $\left[\frac{1}{2},2\right)$ හා $(2,\infty)$ මත අඩු වේ.

30

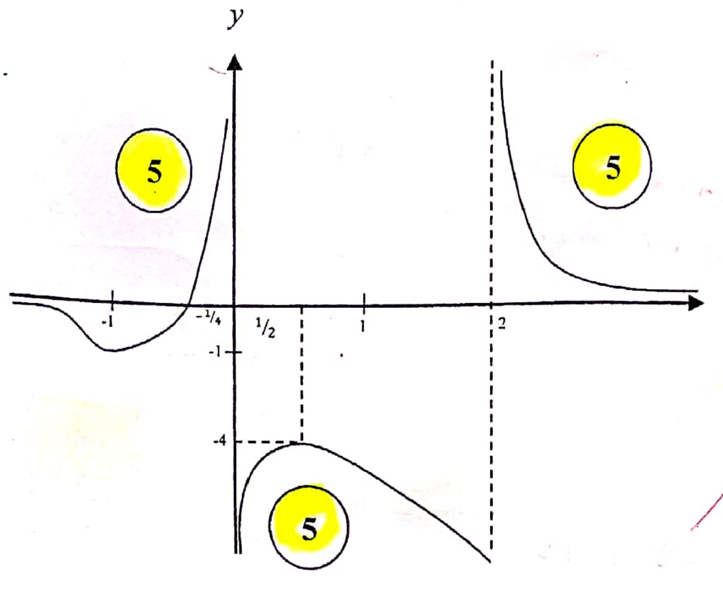
හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් වේ. (5)

$(-1,-1)$ ස්ථානීය අවමයක් වේ. (5)

x - අන්තඃඛණ්ඩය : $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ (5)

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \therefore y=0$ (5)

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $x=0$ සහ $x=2$. (5)



40

Scanned with CamScanner

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

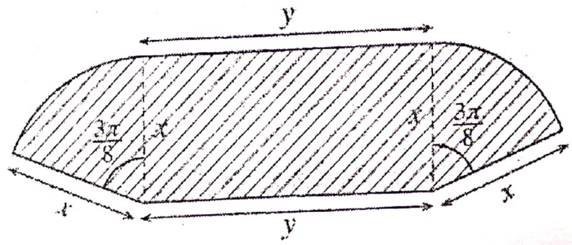
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x) + |f(x)| > 0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් සෘජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\dfrac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය 36 m^2 බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x > 0$ සඳහා $p = 2x + \dfrac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



(*a*)

$x \neq 0, 2,$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$

එවිට, $f^1(x) = \dfrac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$ (10) (10) **20**

$= -\dfrac{2(2x^2+x-1)}{x^2(x-2)^2}$

$= -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$, $x \neq 0, 2$ සඳහා. **5**

25

13 - c

තාත්ත්වික කොටස් සමාන කිරීම මගින්

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

05

(c)

$n \in \mathbb{Z}^{+}$ හා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ සඳහා

$$(1+i\tan\theta)^n = \frac{1}{\cos^n\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)^n \quad (5)$$

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta) \text{ ---------- } (1) \quad (5)$$

10

$$(1-i\tan\theta)^n = \left(1+i\tan(-\theta)\right)^n$$

$$= \sec^n(-\theta)\left[\cos n(-\theta) + i\sin n(-\theta)\right] \quad (5)$$

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta - i\sin n\theta) \text{ ---------- } (2)$$

(1) හා (2) මගින් $(1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ ලැබේ. (5)

10

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ මගින්

$$(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = \left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25} + \left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$= 2\sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad (5)$$

$$= 0, \text{ as } \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0. \quad (5)$$

10

Q13
(a) 25, 10, 20, 20
(b) 10, 30, 05
(c) 10, 10, 10,

15. (a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ යැයි ගනිමු. $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්,** I අගයන්න.

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ හි අගය සොයන්න.

(a)

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$$
$$= A(x^4+2x^2+1) + B(x^3+x) + Cx^2$$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට;

x^0 : $1 = A$

x : $3 = B$

x^2 : $4 = 2A + C$ ~~5~~ + ~~5~~

$x^3 : 3 = B$

$x^4 : 1 = A$

$\therefore A = 1,\ B = 3$ හා $C = 2.$ 5

5 5

15

---

x^0 හා x^1 5 ම නොලබා දිය යුතු.

Scanned with CamScanner

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ (10)

$$\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$ (5)

$$=\ln|x|+3\tan^{-1}x-\frac{1}{x^2+1}+E,$$ මෙහි E යනු අභිමත නියතයක් වේ.

(5) (5) (5) (5)

35

(b)

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin^{-1}(\sqrt{x})dx$$

$$=x\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}-\int_0^{\frac{1}{4}}x\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$ (10)

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ (5)

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ (5)

20

$\sqrt{x}=\sin\theta$ යැයි ගනිමු. එවිට $dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$

(5)

$x=0$ විට දී, $\theta=0$.

$x=\frac{1}{4}$ විට දී, $\theta=\frac{\pi}{6}$ (5)

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\;2\sin\theta\cos\theta d\theta$$ (5)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$ (5)

Scanned with CamScanner

$$= \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$ (5)

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$ (5)

$$\therefore I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}.$$ (5)

35

(c)

$$\frac{d}{dx}(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x) + \ln(x^2+1) + \frac{2}{1+x^2} - 2$$ (10)

$$= \ln(x^2+1) + \underbrace{\frac{2x^2 + 2 - 2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0}$$

$$= \ln(x^2+1).$$ (5)

15

$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. (5)

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \ln 2 + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2$$ (5)

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln 2 + \pi - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$$ (5)

15

$$\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1) + \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$$ (5)

[illegible]

දැන්, $\int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$

$$= \int_0^1 \ln\left((1-x)^2-2(1-x)+2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$ (5)

$$\therefore \int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

$$= \ln 4 + \pi - 4$$ (5)

15

(a) 15, 35

(b) 20, 35

(c) 15, 15, 15

Scanned with CamScanner

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක (x_1+at, y_1+bt) මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

l යනු $x+y-2=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0, 6)$ හා $B \equiv (3, -3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

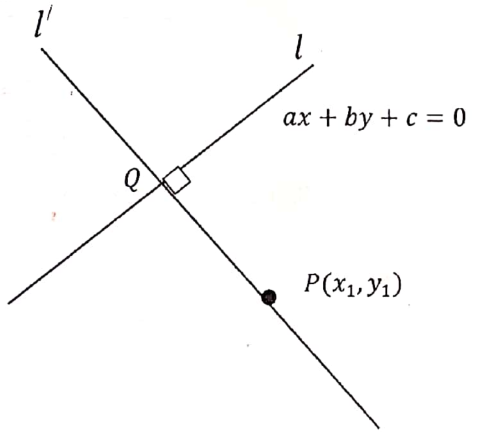
l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙළින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ බව පෙන්වන්න.



$(a^2+b^2 \neq 0)$

l' හි සමීකරණය: $y-y_1 = \dfrac{b}{a}(x-x_1)$. **5**

$\therefore \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{x-x_1}{a} = t$ (ලෙස ගනිමු) **5**

එවිට, $x = x_1+at,\ y = y_1+bt$ **5**

($a=0$ හා $b \neq 0$ හෝ $a \neq 0$ හා $b=0$ විට ද මෙය වලංගු වේ.)

15

---

l හා l' හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ යැයි ගනිමු.

Q, l මත බැවින් $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0.$

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}.$$ (5)

P සිට l ට ලම්බ දුර $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ (5)

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t_1|.$$ (5)

$$= \sqrt{a^2 + b^2}.\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$ (5)

20

$\ell : x + y - 2 = 0$

$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0$ (5) $\therefore$ A හා B, ℓ හි දෙපස පිහිටයි. (5)

10

AB හි අනුක්‍රමණය $= -3$ (5)

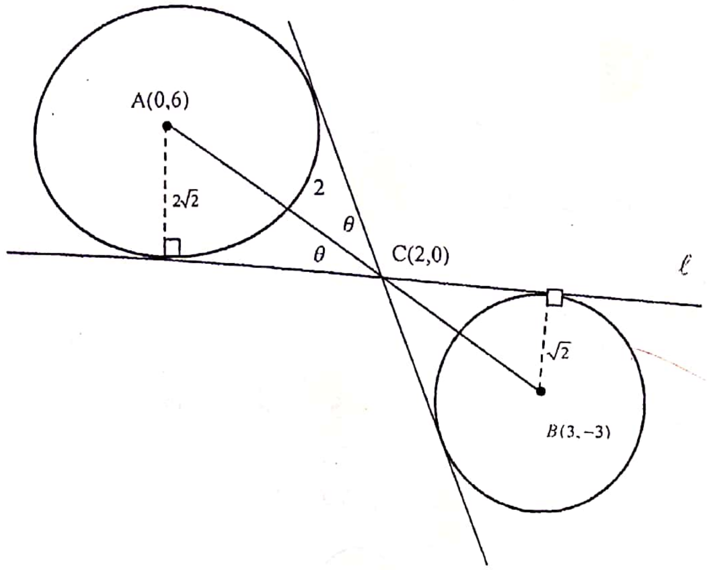
ℓ හා AB අතර සුළු කෝණය

$$\tan\theta = \left|\frac{-1-(-3)}{1+(-1)(-3)}\right|$$ (5)

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$ (5)

15

Scanned with CamScanner



S_1 හි අරය $= \dfrac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ හා S_2 හි අරය $= \dfrac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ වේ. (5) (5) (5) (5)

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$ (5)

එනම්, $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$ (5)

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

30

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2 : 1$ (5)

$\therefore C \equiv \left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-6+6}{3}\right) = (2,0)$ (5)

m යනු අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය යැයි ගනිමු.

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2} = \left|\dfrac{m-(-3)}{1+m(-3)}\right|$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 1-3m = 2m+6$ හෝ $3m-1 = 2m+6$

$\Leftrightarrow \quad m = -1$ හෝ $m = 7$

$\therefore \; m = 7.$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ $y - 0 = 7(x-2).$ (5)

එනම්, $7x - y - 14 = 0.$

25

Scanned with CamScanner

(16)

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

S මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින් $c = 0$. **(5)**

S යන්න S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන බැවින් පොදු ජ්‍යාය A හරහා යයි.

පොදු ජ්‍යාය වන්නේ $S - S_1 \equiv 2gx + (2f+12)y - 28 = 0$ **(5)**

එවිට $A \equiv (0,6)$ යන්න $S - S_1 = 0$ මත බැවින්,

$$(2f+12)(6) - 28 = 0. \quad \textbf{(5)}$$

$$(f+6)(3) - 7 = 0, \text{ එවිට } f = -\frac{11}{3}. \quad \textbf{(5)}$$

S යන්න S_2 ට ප්‍රලම්බ බැවින්, $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16$. **(5)**

$$\therefore -3g + 3\left(\frac{-11}{3}\right) = 8, \ \Rightarrow g = -\frac{19}{3}. \quad \textbf{(5)}$$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය;

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0 \quad \textbf{(5)}$$

එනම්, $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0.$

35

Q_{16} 15, 20, 10, 15, 30, 25, 35,

Scanned with CamScanner

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*)

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \longrightarrow (1)$ (5)

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \longrightarrow (2)$ (5) **10**

---

(1) + (2)

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$$ (5)

$A+B=C$ හා $A-B=D$, ලෙස ගැනීමෙන් $A = \frac{C+D}{2}, B = \frac{C-D}{2}$ වේ.

$$\therefore \quad \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right).$$ (5) **10**

දැන්, $\cos C - \cos D = \cos C + \cos(\pi - D)$ (5)

$$= 2\cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right)\cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).$$ (5) **10**

Scanned with CamScanner

17 - b

$(\sin x \neq 0)$

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x \ (\cos 9x - \cos 7x) = 0$

$\therefore 2\cos 8x \cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}(-2\sin 8x \sin x) = 0$ 5

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $(\cos 8x - \sin 8x) = 0$ 5

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $\tan 8x = 1.$

$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{Z}$ හෝ $8x = n\pi + \dfrac{\pi}{4};\ n \in \mathbb{Z}.$

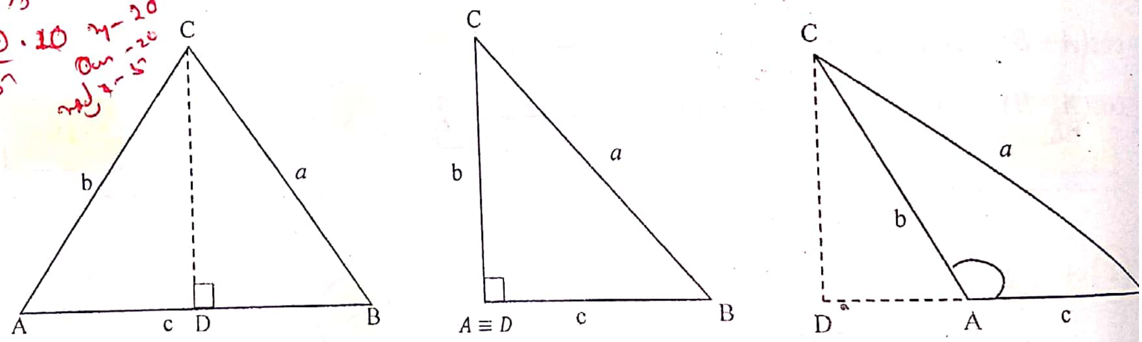
$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{Z}$ හෝ $x = \dfrac{n\pi}{8} + \dfrac{\pi}{32};\ n \in \mathbb{Z}.$ 5 + 5

20

(b)

කෝසයින් නීතිය: ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගන්න 5

එවිට $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$



සාධනය: එවිට පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන්,

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ ——— (1) 5

(i) අවස්ථාව A සුළු කෝණයක් විට;

$DC = b\sin A$

$DB = c - b\cos A$ 5

(ii) අවස්ථාව A මහා කෝණයක් විට;

$DC = b\sin(\pi - A) = b\sin A$

$DB = c + b\cos(\pi - A) = c - b\cos A$ 5

$\therefore$ මෙම අවස්ථා දෙකම සඳහා, (1) මගින් $a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$ 5

$A = \dfrac{\pi}{2}$ විටදී, $\cos A = 0$ බැවින් මෙම අවස්ථාවට ද වලංගු වේ. 5

30

Scanned with CamScanner

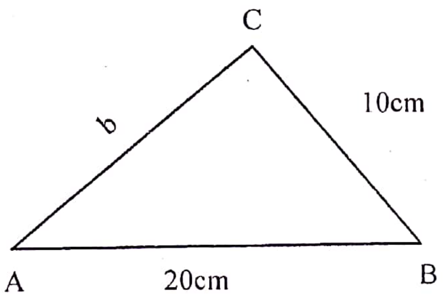
$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $(\cos x \neq 0)$

$$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x \qquad (5)$$

$$= \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad (5)$$

10



$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B$ සුළු කෝණයකි.

$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}$, මෙහි $t = \tan B$ (5)

$12t^2 - 25t + 12 = 0$

$(4t-3)(3t-4) = 0$

$t = \frac{3}{4}$ හෝ $\frac{4}{3}$ (5) + (5)

$\therefore B$ සඳහා වෙනස් විසඳුම් දෙකකි.

$\therefore$ එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබේ.

B යනු සුළු කෝණයකි. $\cos B = \frac{3}{5}$ හෝ $\cos B = \frac{4}{5}$

$\cos B = \frac{3}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}.$ (5)

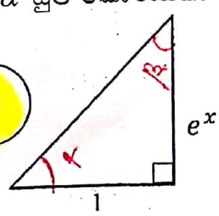
$\cos B = \frac{4}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}.$ (5)

25

(*c*)

$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$ යැයි ගනිමු. $(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} > 0$ බැවින් α සුළු කෝණයකි.

එවිට $\sin\alpha = \left(1+e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$ (5)



$\therefore \tan\alpha = e^x.$ (5)

Scanned with CamScanner

(17) – c

එවිට, දෙන ලද සමීකරණය $\alpha + \alpha = \lambda$ වේ.

$$\therefore \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan\lambda \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2e^x}{1-e^{2x}} = 2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad e^x = 1 - e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x} + e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

$e^x > 0$ බැවින්, $(-)$ ලකුණ ගත නොහැක.

$$\therefore \quad e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

$$\therefore \quad x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \quad (5)$$

දෙන ලද සමීකරණය මෙම x අගය තෘප්ත කරයි.

35

---

17 – (a) 10, 10, 10, 20

(b) 30, 10, 25,

(c) 35,

$$\sin^{-1}\underbrace{(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}}_{\alpha} + \tan^{-1}\underbrace{(e^{x})}_{\beta} = \underbrace{\tan^{-1}2}_{\gamma}$$

$$\sin\alpha = (1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right)^{-1/2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

$\tan\beta = e^{x}$ $\tan\gamma = 2$

$$\sin^2\alpha = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{e^{2x}}$$
$$= e^{x}$$

$$\alpha+\beta = \gamma$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\gamma$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \tan\gamma$$

(15)

$$\frac{e^{x}+e^{x}}{1-e^{2x}} = 2$$

$$2(e^{x})^2 + 2e^{x} - 2 = 0$$

$$(e^{x})^2 + e^{x} - 1 = 0$$

$e^{2x} + e^{x} - 1 = 0$

$e^{x} = t$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$t > 0$$

$$t = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$e^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\sin\alpha = (1+e^{-2x})^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+e^{-2x})}} \cdot \frac{e^{x}}{e^{x}}$$

$$= \frac{e^{x}}{\sqrt{(1+e^{-2x})e^{2x}}}$$

$$= \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{0}}}$$

$$\sin x = \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$$2|x+2| + |x| \leq 4$$

$$2|x+1| + |x| \leq 2$$

$$2|x+1| \leq 2 - |x|$$

$$2|x+1|$$

PAST PAPERS WIKI
WWW.PastPapers.WIKI
Scanned with CamScanner