அந்தரங்கமானது

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த. (உயர்தர)ப் பரீட்சை - 2021 (2022)

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துகளுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ என நிறுவுக.

$n=1,$ இற்கு இ.கை. ப $=6+1=7$

வ.கை. ப. $=1(3+4)=7$

$n=1.$ இற்கு பேறு உண்மையானது 5

For verifying the result for $n=1$

k யாதாயினும் நேர் நிறை எண் என்க

$n=k$ இட்கு பேறு உண்மையானது எனக் கொள்வோம்

$\sum_{r=1}^{k}(6r+1) = k(3k+4).$ 5

For writing the statement for $n=k$

$$\sum_{r=1}^{k+1}(6r+1) = \sum_{r=1}^{k}(6r+1) + \{6(k+1)+1\}$$

$= k(3k+4)+6k+7$ 5

For substituting "$n=k$ result" in"$n=k+1$"

$= 3k^2+10k+7$

$= (k+1)(3k+7).$ 5

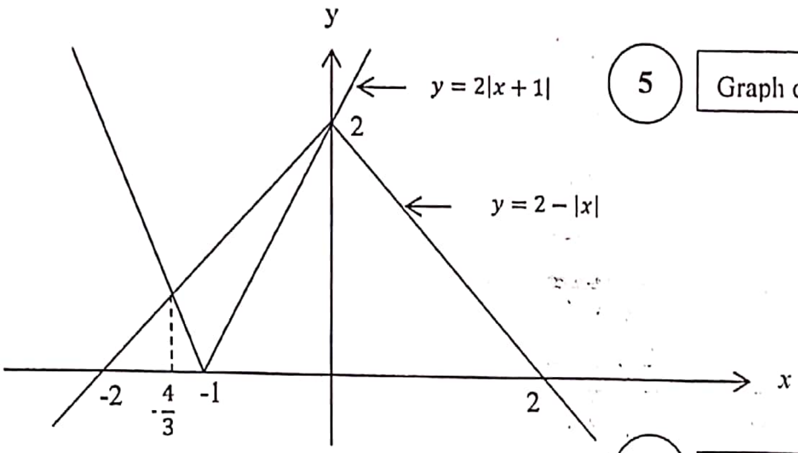
$(k+1)(3k+7)$or equivalent seen

$= (k+1)[3(k+1)+4].$

ஆகவே இற்கு $n=k$, பேறு உண்மையானதெனின் $n=k+1$ இற்கும் பேறு உண்மையாகும். $n=1$ இற்கு பேறு உண்மையானது என்று நாம் ஏற்கனவே நிறுவியுள்ளோம் இதிலிருந்து கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்ப்பாடிற்கேட்ப எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்க்கும் பேறு உண்மையானதாகும் 5

conclusion with the "Principle of Mathematical Induction". (Given only if all the other steps are correct.)

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y=2|x+1|$, $y=2-|x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $2|x+2|+|x|\le 4$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



5 — Graph of $y=2|x+1|$

5 — Graph of $y=2-|x|$

ஒரு வெட்டுப்புள்ளியின் x – ஆள்கூறு $x=0$.

மற்றய வெட்டுப்புள்ளியின் x – ஆள்கூறு $x<-1$ இற்கு

$-2(x+1)=2+x$ இனால் தரப்படும்

இதிலிருந்து $x=-\frac{4}{3}$. 5

$x=0$ and $x=-\frac{4}{3}$ seen

$t=\frac{x}{2}$. என்க. 5

$t=\frac{x}{2}$ substitution or equivalent

தரப்பட்ட சமனிலி

$2|2t+2|+|2t|\le 4$. என ஆகும்

இது $2|t+1|\le 2-|t|$. இற்கு சமானமாகும்

வரைபிலிருந்து

$$-\frac{4}{3}\le t\le 0.$$

$$\therefore -\frac{8}{3}\le x\le 0.$$ 5

correct solution seen

Aliter 1:

வரைபுக்கு 5 + 5,

Case (i) $x \le -2$:

எனின், $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow -2(x+2)-x \le 4$.

$\therefore -\frac{8}{3} \le x$.

ஆகவே தீர்வுகள் $-\frac{8}{3} \le x \le -2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும்.

Case (ii) $-2 < x \le 0$:

எனின், $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)-x \le 4$.

$\therefore x \le 0$.

ஆகவே $-2 < x \le 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும்.

Case (iii) $x > 0$:

எனின், $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)+x \le 4$

$\therefore x \le 0$

ஆகவே தீர்வுகள் இல்லை.

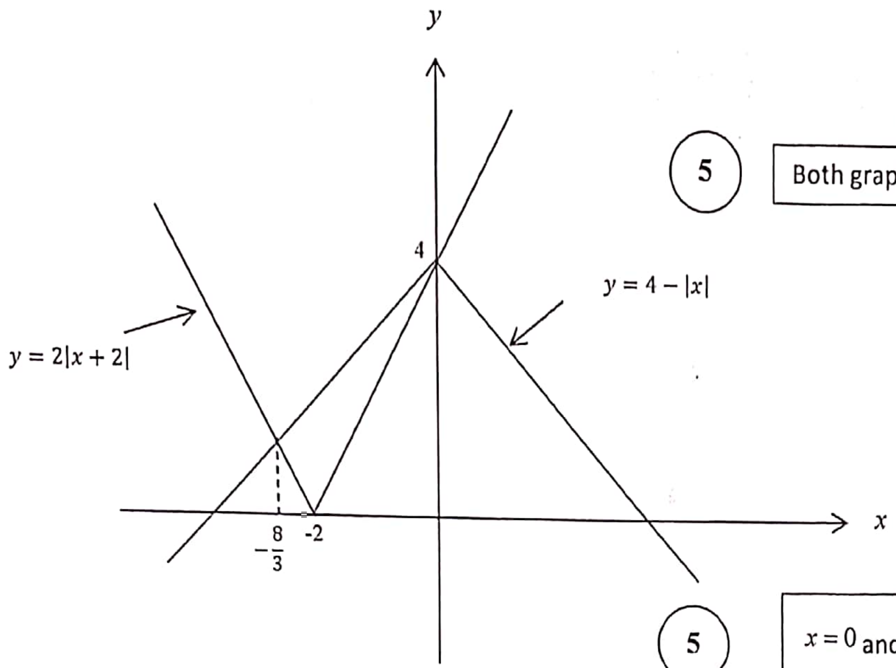
All 3 cases with correct solutions	10
only 2 cases with correct solutions	5

$\therefore$ தரப்பட்ட சமனிலியின் தீர்வுகள் $-\frac{8}{3} \le x \le 0$. ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும் 5

Aliter 2:

வரைபுக்கு 5 + 5

$$2|x+2|+|x|\le 4 \Leftrightarrow 2|x+2|\le 4-|x|.$$



5 Both graphs

5 $x=0$ and $x=-\frac{8}{3}$ seen

வரைபிலிருந்து,

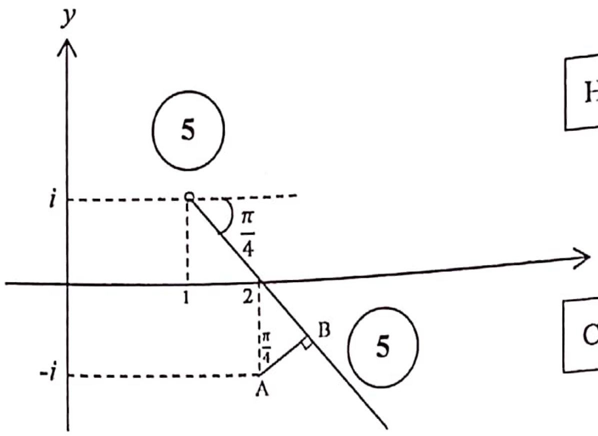
$$2|x+2|\le 4-|x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}\le x\le 0$$ 5

correct solution seen

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\operatorname{Arg}(z-1-i)=-\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\operatorname{Arg}(iz+1-i)=\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் $|z-2+i|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

$$\operatorname{Arg}\left(z-(1+i)\right)=-\frac{\pi}{4}$$



Hole at $1+i$

Correct half line

$$\operatorname{Arg}\left(i(z-i-1)\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \operatorname{Arg} i+\operatorname{Arg}\left(z-(1+i)\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \operatorname{Arg}\left(z-(1+i)\right)=-\frac{\pi}{4} \qquad 5$$

Breaking the argument of the product to a sum, and using $\operatorname{Arg} i=\frac{\pi}{2}$.

$$\min\left|z-(2-i)\right|=AB \qquad 5$$

Recognising the minimum distance

$$=1\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 5$$

Work leading to the answer

Aliter:

வரைபடத்துக்கு 5 + 5

$z = x + iy$ என்க

$\frac{\pi}{4} = Arg(iz + 1 - i) = Arg\left(1 - y + i(x-1)\right)$

$\therefore \quad x - 1 = (1)(1 - y)$ 5

$\Rightarrow \quad x + y = 2.$

Writing the given information as a relation of x and y.

$|z - 2 + i| = |x + iy - 2 + i|$

$= |(x-2) + i(y+1)|$

$= |y + i(y+1)| \qquad (\because x - 2 = y)$

$= \sqrt{y^2 + (y+1)^2}$

$= \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ 5

Writing the absolute value as a complete square of x or y.

$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ஏனெனில் $2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$; $y = -\frac{1}{2}$ ஆகும்போது = ஆகும்.

$\therefore \min|z - 2 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 5

Work leading to the answer.

4. $k > 0$ எனக் கொள்வோம். $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் உள்ள x^7 இன் குணகமும் $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)$ இன் ஈறுப்பு விரியில் உள்ள x^{-7} இன் குணகமும் சமமெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $k=1$ எனக் காட்டு

$k > 0. \left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$; இற்கு

$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$

$22-3r = 7 \Rightarrow r = 5$ 5 Correct value of r

$\therefore x^7$ இன் குணகம் $= {}^{11}C_5\, k^5$ 5 Correct coefficient

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$; இற்கு $T_{r+1} = {}^{11}C_r\, x^{11-r}\,(-1)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r\,{}^{11}C_r\, x^{11-3r}$

$11-3r = -7 \Rightarrow r = 6$ 5 Correct value of r

5 Correct coefficient

$\therefore x^{-7}$ இன் குணகம் $= {}^{11}C_6$

ஆகவே, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5\, k^5 \Rightarrow k=1$, ஏனெனில் ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$.

5 Work leading to the answer

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)} \quad 5$$

Multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right) \times \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right) \times \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$= \quad 1 \quad \times \quad 2 \quad \times 1 \times \quad 2$

5 5 5 5

Each limit 5

$= \quad 4.$

Aliter 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

5 multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1+\cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4\left(\lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}\right)$$

Each limit 5

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

5 5 5 5

$$= 4.$$

Aliter2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

multiplying by the conjugate

5

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x(2\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^4 x)} . \quad \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\tan^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$$

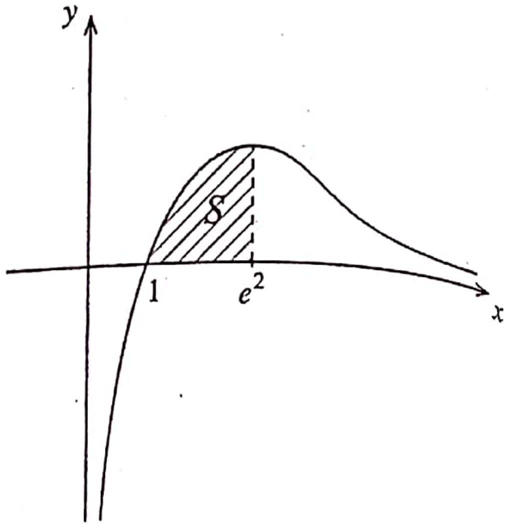
$$= 2 \times 1 \times \ 1 \times 1 \times 2$$

$$= 4.$$ 5 5 5 5

Each limit 5

Setting up the integral for S

6. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=e^2$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் S எனக் கொள்வோம். S இன் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகளெனக் காட்டுக. பிரதேசம் S ஆனது x-அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.



பரப்பு $S = \int_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ 5

$$= (\ln x).2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x} dx$$ 5

Integration by parts or equivalent

$$= 4e - 2\int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 4$$ 5

Work leading to the answer

தேவையான கனவளவு $= \int_1^{e^2} \pi \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ 5

Setting up the integral for the volume

$$= \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$= \pi \frac{(\ln x)^3}{3}\Bigg|_1^{e^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}.$$ 5

Work leading to the answer

7. $t \neq 0$ இற்கு $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் செங்கோண அதிபரவளைவுக்குப் புள்ளி $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ இல் உள்ள தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு $x + p^2y = 2cp$ எனக் காட்டுக. இவ்வதிபரவளைவுக்குப் P இல் உள்ள செவ்வன் கோடு அதிபரவளைவை வேறொரு புள்ளி $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ இல் மறுபடியும் சந்திக்கின்றது. $p^3q = -1$ எனக் காட்டுக.

$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{c}{t^2}\ . \ (t \neq 0.)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$$ 5

$\frac{dy}{dx}$ in terms of t

$\therefore P$ இல் தொடலியின் படித்திறன் $= -\frac{1}{t^2}\Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$

$\therefore P$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - cp)$$

Work leading to the answer

$\therefore x + p^2y = 2cp.$

P இல் செவ்வனின் படித்திறன் $= p^2.$

Equation of the normal

$\therefore P$ இல் செவ்வனின் சமன்பாடு $y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$ 5

$Q \equiv (cq, \frac{c}{q})$ இக்கோட்டில் இருக்கும்;

$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \Rightarrow c(p-q) = -p^3qc(p-q)$ 5

For the substitution

P, Q வேறுவேறான புள்ளிகள் என்பதால் $p \neq q.$

$p^3q = -1.$ 5

Work leading to the answer

Aliter: (For the last part) 5

For the condition

PQ இன் படித்திறன் $= P$ இல் செவ்வனின் படித்திறன்

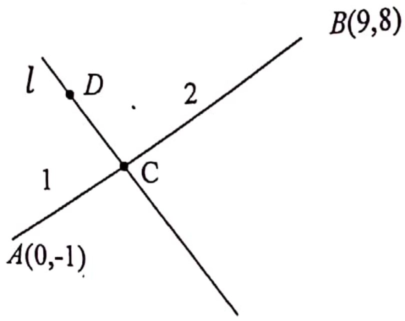
$\therefore \frac{\frac{c}{q} - \frac{c}{p}}{cq - cp} = p^2$ 5 $(\because p \neq q, c \neq o)$

For the substitutions

$\therefore p^3q = -1$ 5

Work leading to the answer

8. $A \equiv (0, -1)$ எனவும் $B \equiv (9, 8)$ எனவும் கொள்வோம். AB மீது புள்ளி C ஆனது $AC : CB = 1 : 2$ இருக்குமாறு உள்ளது. C இனூடாக AB இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு l இன் சமன் $x + y - 5 = 0$ எனக் காட்டுக.
AD ஆனது நேர்கோடு $y = 5x + 1$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு l மீது உள்ள புள்ளி D எ கொள்வோம். D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1}\right)$$

5

$\equiv (3,2)$

Coordinates of C

AB இன் படித்திறன் $=1$.

இன் படித்திறன் $l = -1$ 5

For the gradient of l

$\therefore$ l: இன் சமன்பாடு

$y - 2 = -1(x-3)$

i.e. $x + y - 5 = 0$. 5

Work leading to the equation of l

D, l இல் இருப்பதால் D ஐ $(t, 5-t)$, $t \in \mathbb{R}$ என எடுக்குக,

AD இன் சமன்பாடு; $y - (-1) = 5(x - 0)$

D இக்கோட்டில் இருப்பதால்,

$5 - t + 1 = 5t$.

$\therefore t = 1$. 5

Work leading to the coordinates of D

$\therefore D \equiv (1,4)$. 5

$D \equiv (1,4)$ seen

9. நேர்கோடு $x + 2y = 3$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ ஐ இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.
இவ்விரு புள்ளிகளினூடாகவும் வட்டம் $S = 0$ இன் மையத்தினூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$

$\ell : x + 2y - 3 = 0$. என்க

ℓ, இல் $x = 3 - 2y$;

$(3-2y)^2 + y^2 - 4(3-2y) + 1 = 0$

$\therefore\ 5y^2 - 4y - 2 = 0$ 5 — Forming a quadratic

பிரித்துக்கட்டி $\Delta = 16 + 4(5)(2)$ 5 — Writing the discriminant

$\therefore\ \Delta > 0$, ஆதலால் கோடு $x + 2y = 3$, 5 — For $\Delta > 0$

S உடன் இரண்டு வேறு வேறு புள்ளிகளில் இடைவெட்டும்.

தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 4x + 1 + \lambda(x + 2y - 3) = 0$, 5 — For the λ form

இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$

இவ்வட்டம் (2,0) ஊடாக செல்லும் ஆதலால்,

$4 - 8 + 1 + \lambda(2 - 3) = 0$

$\therefore\ \lambda = -3$ 5 — $\lambda = -3$ seen

$\therefore$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 4x + 1 + (-3)(x + 2y - 3) = 0$

i.e. $x^2 + y^2 - 7x - 6y + 10 = 0$.

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ ஐ வடிவம் $R\cos(2x-\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R>0$ உம் $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ஆகும்.
இதிலிருந்து, சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ ஐத் தீர்க்க.

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$

$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x\cos x)$

$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ 5

Writing the expression using $\cos 2x$ and $\sin 2x$

$= 2\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

இங்கு $R = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$
5 5

$R = 2$ seen

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ seen

சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1 = 1$.

$\therefore\ 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

ஆகவே $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 5

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ seen

$\therefore\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3};\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$ 5

Correct solution seen

11. (a) $k > 1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன இம்மூலங்களெனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ ஆகியவற்றை k இல் எழுதி, α, β ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது $1 < k < 3$ எனக் கொள்வோம். $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}, \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k இல் காண்க.

(b) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ எனவும் $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $x^2 + x - 2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $x + 1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும் a, b, c ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) - 2g(x) \le \dfrac{13}{12}$ எனக் காட்டுக.

(a)

$x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0.$ இன் பிரித்துக்காட்டி

$\Delta = 4(k+1)^2 - 4(k-3)^2$ 5

$= 4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$

$= 32(k-1).$ 5

$k > 1,$ ஆதலால் $\Delta > 0.$ 5

$\therefore$ மெய்யான வேறு வேறான மூலங்கள் உண்டு 5

$\boxed{20}$

$\alpha + \beta = 2(k+1), \alpha\beta = (k-3)^2 +$ 5 5

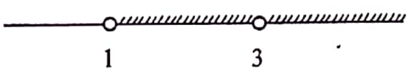
α, β இரண்டும் நேரானதாக இருக்க,

$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0.$ 10

$k > 1,$ ஆதலால் $\alpha + \beta = 2(k+1) > 0$ 5

அத்துடன் $\alpha\beta = (k-3)^2 > 0 \Leftrightarrow k \neq 3.$ 10

$\therefore k$ இன் தேவையான பெறுமானங்கள் $1 < k < 3$ or $k > 3.$



$\boxed{35}$

இப்போது $1<k<3$. என்க. $\alpha>0$, $\beta>0$. ஆதலால்

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ இனை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு $\left(x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=0.$ 5

i.e. $x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=0.$ 5

i.e. $\sqrt{\alpha\beta}x^2-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x+1=0.$ 5

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(k-3)^2}=|k-3|=3-k$ $(\because 1<k<3)$ ஆகும் 5

அத்துடன் $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ 5

$=2(k+1)+2(3-k)$ 5

$=8.$ 5

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$ 5

$\therefore$ சமன்பாடு $(3-k)x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 5

45

(b)

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$

$g(x)=x^3+cx^2+ax+1$

$f(x)$, $(x-1)$ இனால் வகுப்படும் போது மீதி 5 ஆதலால், மீதி தேற்றத்தின் படி,

$f(1)=5.$ 5

$\therefore a+b+3=5$

$a+b=2.$ 5 -------------- 1

$g(x)$ ஆனது x^2+x-2 இனால் வகுப்படும் போது மீதி $x+1$, ஆதலால்

$g(x)=x^3+cx^2+ax+1=(x^2+x-2)(x+\lambda)+x+1$ for $\lambda\in\mathbb{R}$. 5

$\left((x^0)\right)$; $1=-2\lambda+1 \Rightarrow \lambda=0.$

$\therefore g(x)=x(x^2+x-2)+x+1$ 5 5

$=x^3+x^2-x+1.$ ஆகவே $c=1$, $a=-1.$

1 $\Rightarrow$ $b=3.$ 5

30

$$f(x)-2g(x)=2x^3-x^2+3x+1-2(x^3+x^2-x+1)$$

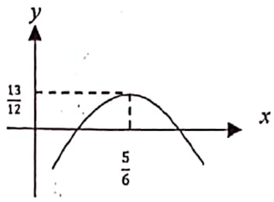
$$=-3x^2+5x-1 \qquad 5$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \qquad 5$$

$$\leq -3\times\left(\frac{-13}{36}\right), \text{since } \left(x-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0. \qquad 5$$

$$\therefore\ f(x)-2g(x)\leq\frac{13}{12}. \qquad 5$$



20

12. (*a*) கீழே தரப்பட்டுள்ள 10 இலக்கங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் 4 இலக்கங்களைக் கொண்ட 4 இலக்க எண்ணை அமைக்க வேண்டியுள்ளது :

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5$$

(i) தெரிந்தெடுக்கப்படும் எல்லா 4 இலக்கங்களும் வேறுபட்டனவாக இருப்பின்,

(ii) எந்த 4 இலக்கங்களும் தெரிந்தெடுக்கப்படலாமெனின்,

அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வேறுபட்ட 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\dfrac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் கண்டு,

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ ஒருங்குகின்றதென உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a)

1,1, 1, 2, 2, 3,3,4, 5, 5

(i) 1,2,3,4,5 இலிருந்து நான்கு வேறான இலக்கங்கள்

$= {}^5P_4$ 5

$= 5!$ 5

$= 120$ 5

$\boxed{15}$

(ii) நான்கு இலக்க எண்கள் உருவாக்கப்படும் விதங்கள்

	ஏதாவது 4 இலக்கங்களுடன் வேறுவேறான 4 இலக்க எண்கள்
வேறான இலக்கங்கள்	$^5P_4 = 120$
ஒரு இலக்கம் இருமுறை மீள்வர ஏனைய இரு இலக்கங்களும் வேறானவை	10 5 $^4C_1 \times {^4C_2} \times \frac{4!}{2!} = 288$
இரு இலக்கங்கள் இருமுறை மீள்வரல்	10 $^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ 5
ஒரு இலக்கம் மும்முறை மீள்வரல்	10 5 $1C_1 \times 4C_1 \times \frac{4!}{3!}$

தேவையான வழிகள் $= 120 + 288 + 36 + 16$ 5

$= 460$ 5

55

(b)

$r \in \mathbb{Z}$ இற்கு

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

r இன் அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிட:

$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$

$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$

10

$r^1: 40 = 25A - 5(1-4B)$

$r^0: 9 = -5A + 5B$

இதிலிருந்து $A = \frac{1}{5}$, $B = 2.$

5 5

20

$\therefore U_r = \frac{r-1}{5(2r+1)^2} - \frac{r-2}{(2r-1)^2}$ 5

$\therefore \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2} - \frac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2}$ 5

எனவே,

$\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$, இங்கு $f(r) = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2}$. 10

$r = 1;$ $\frac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2;$ $\frac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1)$ 5

$\vdots$ $\vdots$

$r = n-1;$ $\frac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n$ $\frac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1)$ 5

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0)$$ 5

$$= \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} - (-1)$$ 5

$$= 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} \text{ for } n \in \mathbb{Z}^+$$ 5

45

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}\right)$$

5

$$= 1 .$$ 5

$\therefore$ முடிவிலித்தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ ஒருங்கும், கூட்டுத்தொகை 1. 5

$\boxed{15}$

13. (*a*) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

மேலும் $C = AB^T$ எனவும் கொள்வோம். C ஐ a இற் கண்டு, எல்லா $a \neq 0$ இற்கும் C^{-1} இருக்கின்றதெ காட்டுக.

C^{-1} இருக்கும்போது அதனை a இல் எழுதுக.

$C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ எனின், $a = 2$ எனக் காட்டுக.

a இற்கான இப்பெறுமானத்துடன் $DC - C^TC = 8I$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் D ஐக் காவ இங்கு I ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ எனவும் $z_2 = 1 + i$ எனவும் கொள்வோம். $\frac{z_1}{z_2}$ ஐ வடிவம் $x + iy$ இல் எடுத்துரைக்க; இ $x, y \in \mathbb{R}$.

மேலும் z_1, z_2 ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரை இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும். இதிலிருந்து, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ எனக் காட் $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ என உய்த்தறிக.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $k \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $(1 - i\tan\theta)^n$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று,

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ எனக் காட்டுக.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ஆனது $(1 + z)^{25} + (1 - z)^{25} = 0$ இன் ஒரு தீர்வென உய்த்தறிக.

(*a*) 5

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3a+3 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix} \quad 10$$

$|C| = (a^2 + 3) - (a + 1)(a + 3) = -4a$

$\neq 0 \; (\because a \neq 0)$ 5

$\therefore$ எல்லா $a \neq 0$. கும் C^{-1} இருக்கும். 5

25

For $a \neq 0, C^{-1} = -\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix}$ 10

10

$$C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}-1 & a+3\\ a+1 & -a^2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}2a+5\\-2a^2+a-5\end{pmatrix}$$ 10

$$\therefore \frac{1}{4a}\begin{pmatrix}2a+5\\-2a^2+a-5\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9\\-11\end{pmatrix}$$

$$\frac{2a+5}{4a}=\frac{9}{8},\quad \frac{-2a^2+a-5}{4a}=-\frac{11}{8}$$ 5

இதிலிருந்து $a=2$. 5

20

$a=2, C=\begin{pmatrix}7 & 5\\3 & 1\end{pmatrix}, C^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -5\\-3 & 7\end{pmatrix}$. ஆகும்போது 5

$DC-C^TC=8I \Leftrightarrow D-C^T=8IC^{-1}$. 5

5

$$\therefore D=C^T+8C^{-1}=\begin{pmatrix}7 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}+8\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix}1 & -5\\-3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\8 & -6\end{pmatrix}.$$ 5

20

(b)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i)=\underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x}+i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_{y}$$ 5

5

10

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ 5

5

$$z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ 5

5

$$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

10

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

30

மெய்பகுதிகளை சமப்படுத்த,

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$ 5

05

(c)

For $r \in \mathbb{Z}$ and $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ for $k \in \mathbb{Z}$,

$$(1+i\tan\theta)^n = \frac{1}{\cos^n\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$ 5

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{-----------} \; (1)$$ 5

10

$$(1-i\tan\theta)^n = \left(1+i\tan(-\theta)\right)^n$$

$$= \sec^n(-\theta)\left[\cos n(-\theta) + i\sin n(-\theta)\right]$$

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta - i\sin n\theta) \quad \text{-----------} \; (2)$$ 5

(1) , (2) $\Rightarrow (1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta.$ 5

10

$$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow$$

$$(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = \left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25} + \left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$= 2\sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right)$$ 5

$$= 0, \text{as} \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$ 5

10

14. (a) $x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

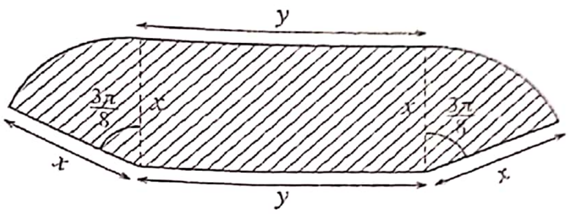
$x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அணுகுகோடுகள், x-வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

இவ்வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $f(x) + |f(x)| > 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(b) இங்கு உள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம் S ஆனது ஒரு செவ்வகத்தையும் ஒவ்வொன்றும் மையத்தில் கோணம் $\dfrac{3\pi}{8}$ ஐ எதிரமைக்கும் ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தைக் காட்டுகின்றது. அதன் பரிமாணங்கள் மீற்றரில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளன. S இன் பரப்பளவு 36 m^2 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இன் சுற்றளவு p m ஆனது $x > 0$ இற்கு $p = 2x + \dfrac{72}{x}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்போது p இழிவு எனவும் காட்டுக.



(a)

$x \neq 0, 2,$ இற்கு $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$

ஆகவே, $f^1(x) = \dfrac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$ 20

$= -\dfrac{2(2x^2+x-1)}{x^2(x-2)^2}$

$= -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ for $x \neq 0, 2.$

5

$\boxed{25}$

திரும்பல் புள்ளிகள்:

$f^1(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ அல்லது $x = \dfrac{1}{2}$ 5

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$f(x)$	$\searrow$ குறையும்	$\nearrow$ அதிகரிக்கும்	$\nearrow$ அதிகரிக்கும்	$\searrow$ குறையும்	$\searrow$ குறையும்

5 5 5 5 5

$\therefore f(x)$ ஆனது $[-1,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ இல் அதிகரிக்கும் அத்துடன்

$\left[\frac{1}{2},2\right)$, $(-\infty,-1]$, $(2,\infty)$. இல் குறையும்.

30

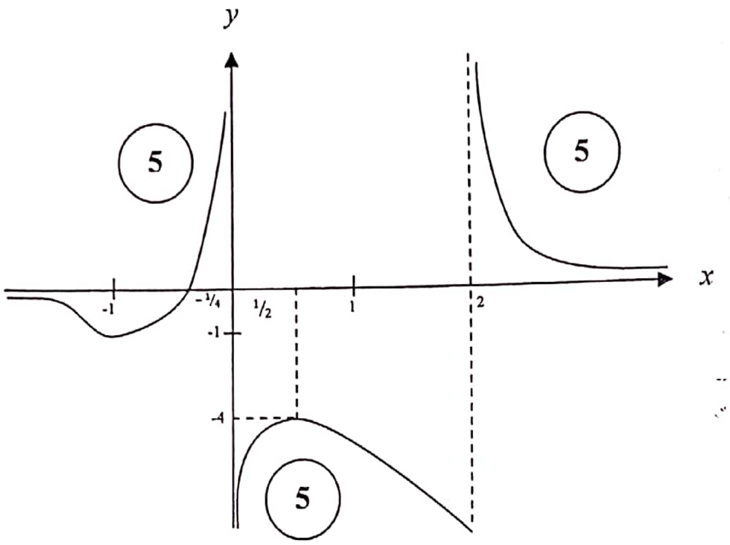
திரும்பல் புள்ளிகள்: $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ ஓரிட உயர்வு ஆகும். 5

$(-1,-1)$ ஓரிட இழிவு ஆகும் 5

x- இடைவெட்டு: $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ 5

கிடை அணுகுகோடு: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \therefore\ y=0$ 5

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு: $x=0$, $x=2$. 5



40

$$f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & \text{if } f(x)\ge 0.\\ 0 & \text{if } f(x)<0.\end{cases}$$

$\therefore f(x)+|f(x)|>0 \Leftrightarrow f(x)>0.$ 5

$\therefore\ f(x)+|f(x)|>0$ ஐ திருப்தி செய்யும் x இன்

08 5

மெய்ப்பெறுமானங்கள் $-\frac{1}{4}<x<0$ அல்லது $x>2$.

15

(b)

$x > 0$; இற்கு

$36 = xy + \frac{3}{8}\pi x^2$ எனதரப்பபடுள்ளது :

$\therefore y = \frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x$ for $x > 0$ 5 5

$p = 2x + 2y + 2\left(\frac{3}{8}\pi x\right)$ 5

$= 2x + 2\left(\frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x\right) + \frac{3}{4}\pi x$ 5

$= 2x + \frac{72}{x}$ 5 , $x > 0$. இற்கு

$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}$; $x > 0$.

5

$\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 6.$ 5

$0 < x < 6$, இற்கு $\frac{dp}{dx} < 0$ அத்துடன்

$x > 6$, இற்கு $\frac{dp}{dx} > 0.$

$\therefore x = 6$. ஆகும்போது p இழிவு ஆகும் 5

40

---

15. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ ஆக இருக்கத்தக்கத
A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ எனக் கொள்வோம். $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, I இ
பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ ஐக் கண்டு, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாகவுள்ளபோது பேறு $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*a*)

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$$

$$= A(x^4+2x^2+1) + B(x^3+x) + Cx^2$$

x இன் அடுக்குகளின் குணக்கங்களை ஒப்பிட;

x^0 : $1 = \mathrm{A}$

x : $3 = \mathrm{B}$

x^2 : $4 = 2\mathrm{A}+\mathrm{C}$ 5 + 5

$x^3 : 3 = B$

$x^4 : 1 = A$

$\therefore A = 1,\ B = 3,\ C = 2.$ 5

$\boxed{15}$

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ 5

$$\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$ 5

5

$=\ln|x|+3\tan^{-1}x-\dfrac{1}{x^2+1}+E$, where E is an arbitrary constant.

5 5 5 5

35

(b)

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin^{-1}(\sqrt{x})dx$$

$$=x\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}-\int_0^{\frac{1}{4}}x\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$ 10

$$=\frac{1}{4}.\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

10

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

20

$\sqrt{x}=\sin\theta\Rightarrow dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$ என்க

5

$x=0$ ஆகும்போது $\theta=0$

$x=\frac{1}{4}$h ஆகும்போது $\theta=\frac{\pi}{6}$ 5

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$ 5

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$ 5

$$=\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$ 5

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$ 5

$$\therefore I=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{24}.$$ 5

$\boxed{35}$

(c)

$$\frac{d}{dx}(x\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x-2x)$$

$$=x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)+\ln(x^2+1)+\frac{2}{1+x^2}-2$$

$$=\ln(x^2+1)+\underbrace{\frac{2x^2+2-2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0}$$ 5 + 5

$$=\ln(x^2+1).$$ 5

$\boxed{15}$

$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x-2x+C$, C இங்கு எதேச்சை மாறிலி 5

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2+1)dx=\ln 2+2\left(\frac{\pi}{4}\right)-2$$ 5

$$=\frac{1}{2}(2\ln 2+\pi-4)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 4+\pi-4)$$ 5

$\boxed{15}$

$$\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$$

$$=\int_0^1 \ln(x^2+1) \ + \ \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx \quad 5$$

$$\int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$$

$$=\int_0^1 \ln\left((1-x)^2-2(1-x)+2\right)dx$$

$$=\int_0^1 \ln(x^2+1)dx \quad 5$$

$$\therefore \int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

$$= \ln 4 + \pi - 4 \quad 5$$

$\boxed{15}$

---

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ எனவும் l ஆனது $ax+by+c=0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P இனூடான l இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் (x_1+at, y_1+bt) இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என உய்த்தறிக.

l ஆனது நேர்கோடு $x+y-2=0$ எனக் கொள்வோம். $A \equiv (0, 6)$, $B \equiv (3, -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் l இன் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

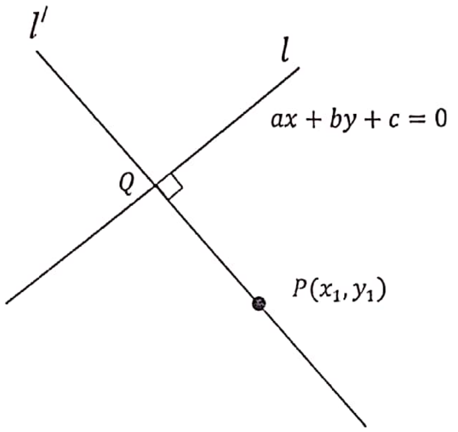
l இற்கும் கோடு AB இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

l ஐத் தொடுவனவும் முறையே A, B ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l இனதும் கோடு AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளி C எனக் கொள்வோம். புள்ளி C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 ஆகியவற்றுக்கு C இனூடாக உள்ள மற்றைய பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தியினூடாகச் செல்வதும் S_1 இன் பரிதியை இருகூறிடுவதும் S_2 இற்கு நிமிர்கோணமானதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ எனக் காட்டுக.



$(a^2+b^2 \neq 0)$ ஆகும்

l' இன் சமன்பாடு: $y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$ 5

$\therefore \dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{x-x_1}{a}=t$ (என்க) 5

$x=x_1+at,\ y=y_1+bt$ 5

($a=0$ ம் $b\neq 0$ அல்லது $a\neq 0$ ம் $b=0$. ஆகும்போது இது வலிதாகும்) $\boxed{15}$

---

l, l^1. என்பன இடைவெட்டும் புள்ளி $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ என்க

Q ஆனது l, இன் மீது உள்ளதால் $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0.$

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}. \quad 5$$

P இலிருந்து l இற்கான செங்குத்து தூரம் $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad 5$$

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t_1|. \quad 5$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}.\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad 5$$

$\boxed{20}$

$\ell : x + y - 2 = 0$

$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0$ 5

$\therefore \therefore A, B$ என்பன ℓ இன் எதிரெதிர் பக்கங்களில் இருக்கும் $\boxed{10}$

5

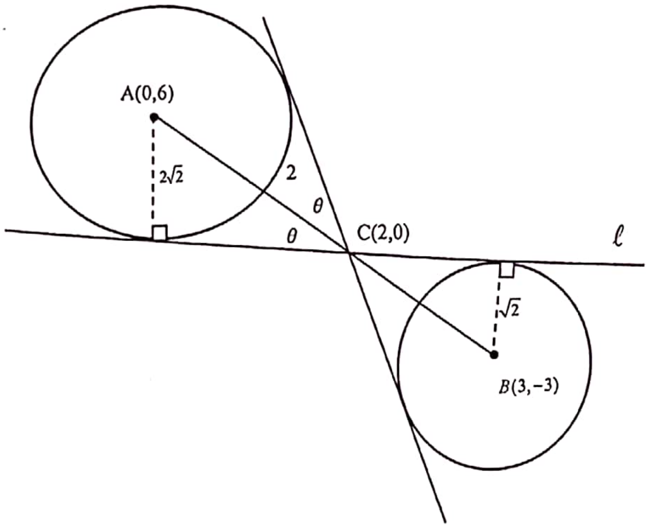
AB இன் படித்திறன் $= -3$ 5

ℓ இற்கும் AB இற்கும் இடையிலான கூர்ங்கோணம்

$$\tan\theta = \left|\frac{-1-(-3)}{1+(-1)(-3)}\right| \quad 5$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad 5$$

$\boxed{15}$



5 5 5 5

S_1 இன் ஆரை $= \dfrac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, S_2 இன் ஆரை $= \dfrac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$ 5

i.e. $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$ 5

i.e $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

$\boxed{30}$

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2 : 1$ 5

$\therefore C \equiv \left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-6+6}{3}\right) = (2,0)$ 5

C இனூடாக செல்லும் மற்றைய பொதுதொடலியின் படித்திறன் m என்க

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2} = \left|\dfrac{m-(-3)}{1+m(-3)}\right|$ 5

$\Leftrightarrow \quad 1-3m = 2m+6 \text{ or } 3m-1 = 2m+6$

$\Leftrightarrow \quad m = -1 \text{ or } m = 7$

$\therefore m = 7.$ 5

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $y - 0 = 7(x-2).$ 5

i.e. $\quad 7x - y - 14 = 0.$

$\boxed{25}$

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்க.

S ஆனது உற்பத்திக்கூடாக செல்வதால், $c = 0$. 5

S ஆனது S_1, இன்பரிதியை இருகூறிடுவதால் பொதுத்தொடுநாண் A இற்கூடாக செல்லும்.

பொதுதொடுநாணின் சமன்பாடு $S - S_1 \equiv 2gx + (2f + 12)y - 28 = 0$

$A \equiv (0,6)$ ஆனது $S - S_1 = 0$, இன் மீதுள்ளதால் 5

$(2f + 12)(6) - 28 = 0.$ 5

$(f + 6)(3) - 7 = 0$, இலிருந்து $f = -\frac{11}{3}.$ 5

S ஆனது S_2, இற்கு நிமிர்கோணம் ஆகையால் $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16.$ 5

$\therefore -3g + 3\left(\frac{-11}{3}\right) = 8, \Rightarrow g = -\frac{19}{3}.$ 5

$\therefore$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0$$ 5

i.e. $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0.$

$\boxed{35}$

17. (a) $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$ ஆகியவற்றை $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$, $\sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

$\cos C-\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ என **உய்த்தறிக.**

சமன்பாடு $\cos 9x+\cos 7x+\cot x(\cos 9x-\cos 7x)=0$ ஐத் தீர்க்க.

(b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் **கோசைன் நெறியைக்** கூறி நிறுவுக.

$n\in\mathbb{Z}$ இற்கு $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம். $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC இல் $AB=20$ cm, $BC=10$ cm, $\sin 2B=\frac{24}{25}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அத்தகைய இரு வேறுவேறான முக்கோணிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொன்றுக்கும் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.

(c) சமன்பாடு $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right]+\tan^{-1}(e^x)=\tan^{-1}(2)$ ஐத் தீர்க்க.

(a)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \longrightarrow (1)$ 5

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \longrightarrow (2)$ 5

$\boxed{10}$

(1) + (2) $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$ 5

$A+B=C$ எனவும் $A-B=D$, எனவும் கொள்வதால் $A=\frac{C+D}{2}, B=\frac{C-D}{2}$

$\therefore \cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right).$ 5

$\boxed{10}$

இப்பொழுது, $\cos C-\cos D=\cos C+\cos(\pi-D)$ 5

$$=2\cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right)\cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$=-2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).$$ 5

$\boxed{10}$

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\,(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ $(\sin x \neq 0)$

$\therefore 2\cos 8x \cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}(-2\sin 8x \sin x) = 0$ 5

$\therefore \cos x = 0$ அல்லது $(\cos 8x - \sin 8$ 5

$\therefore \cos x = 0$ அல்லது $\tan 8x = 1.$

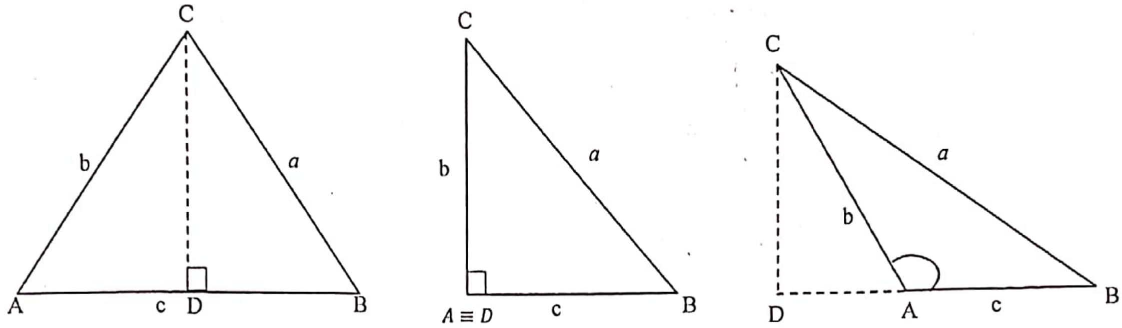
$m \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ அல்லது $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $8x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

$m \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ அல்லது $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = \dfrac{n\pi}{8} + \dfrac{\pi}{32}$ 5 + 5 **20**

(*b*)

கோசைன் நெறி: யாதாயினுமொரு முக்கோணி ABC இற்கு 5

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ஆகும்



நிறுவல் : C இலிருந்து AB மீதான செங்குத்தின் அடி D என்க . பைதகரஸ்.

தேற்றத்தின் படி $BC^2 = BD^2 + DC^2$ —— 1 5

வகை (i) A கூர்ங்கோணம் எனின்; வகை (ii) A விரிகோணம் எனின்

$DC = b\sin A$ $DC = b\sin(\pi - A) = b\sin A$

$DB = c - b\cos A$ 5 $DB = c + b\cos(\pi - A)$ $= c - b\cos A$ 5

$\therefore$ இரு வகைகளிலும், 1 $\Rightarrow a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \;(\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$ 5

$A = \dfrac{\pi}{2}$, ஆகும்போது $\cos A = 0$ மற்றைய வகைகளிலும் இது நிகழும். 5 **30**

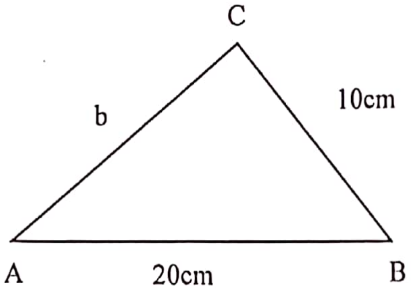
$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$. என்க $(\cos x \neq 0)$

$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x$ 5

$= \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ 5

10



$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B$ கூர்ங்கோணம்

$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}$, இங்கு $t = \tan B$ 5

$12t^2 - 25t + 12 = 0$

$(4t-3)(3t-4) = 0$

$t = \frac{3}{4}$ or $\frac{4}{3}$ 5 + 5

$\therefore B$ இற்கு இரு வேறு வேறான தீர்வுகள் உண்டு

$\therefore$ இரு வேறு வேறான முக்கோணிகள் உண்டு

B கூர்ங்கோணம் $\cos B = \frac{3}{5}$ or $\cos B = \frac{4}{5}$

When $\cos B = \frac{3}{5}$; $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}.$ 5

$\cos B = \frac{4}{5}$; ஆகையில் $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}.$ 5

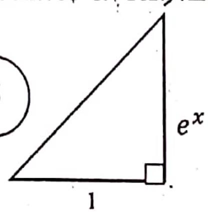
25

(c)

$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$. என்க $(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} > 0$, ஆகையால் α கூர்ங்கோணம்.

எனவே $\sin\alpha = \left(1+e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$ 5

$\therefore \tan\alpha = e^x.$ 5



தரப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து $\alpha+\alpha=\lambda$.

$\therefore \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan\lambda$ 5

$\Rightarrow \quad \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}}=2$ 5

$\Rightarrow \quad e^x=1-e^{2x}$

$\Rightarrow \quad e^{2x}+e^x-1=0$

$\Rightarrow \quad e^x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 5

$e^x>0$, ஆகையால் (–) குறி எடுக்கப்பட முடியாது.

$\therefore e^x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 5

$\therefore \quad x=\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$ 5

x இன் இப்பெறுமானமானது தரப்ட்ட சமன்பாட்டை திருப்தி செய்கின்றது.

35