

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $7^n - 1$ යන්න 6 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා $7^n - 1 = 7 - 1 = 6$ හා එය 6 න් බෙදේ.

$\therefore n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, ප්‍රතිඵලය $n=k$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $7^k - 1$ යන්න 6 න් බෙදේ. (5)

$\therefore 7^k - 1 = 6p$ වන පරිදි $p \in \mathbb{Z}^+$ පවතී. (5)

දැන්, $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1$

$$= 7(6p + 1) - 1$$

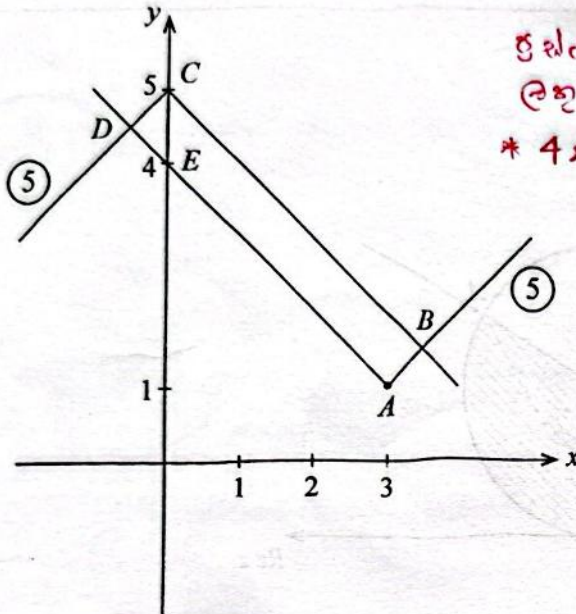
$$= 42p + 6$$

$$= 6(7p + 1), \text{ හා මෙය 6 න් බෙදේ. (5)}$$

ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n=k+1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය කර ඇත.

ඒ නයින්, ගණිතමය අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ප්‍රතිඵලය සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහාම සත්‍ය වේ. (5)

2. එකම රූප සටහනක $y = |x - 3| + 1$ හා $y = 5 - |x|$ හි ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එකිනිත්, මෙම ප්‍රස්ථාරවලින් ආවෘත වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



ලියවාර 2 හි හැඩයට

ලකුණු ලබා දෙයි.

* 4, 5 ලකුණු නිර්ව අවශ්‍යතොස්.

$$CD = 1 \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{← (5)}$$

$$AD = DE + EA = 1 \sin 45^\circ + \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \quad \text{← (5)}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{අවශ්‍ය වර්ගඵලය} = CD \cdot AD$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \text{(මීට තුළු වෙත ප්‍රකාශනයකට න් දෙන්න)}$$

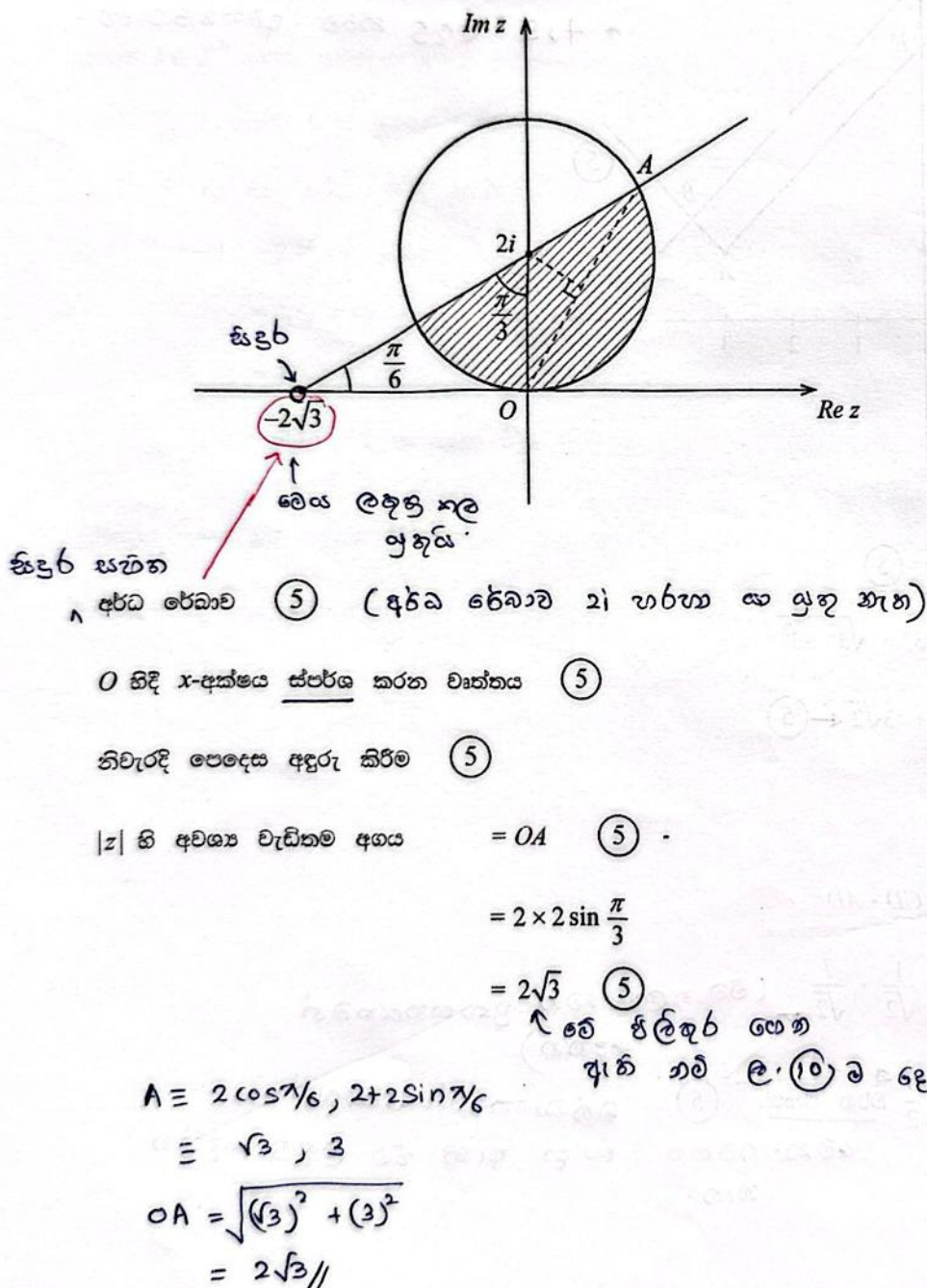
$$= \frac{7}{2} \quad \text{← වර්ග ඒකක. (5)}$$

මේ නි අවශ්‍ය නැත.

බර්ඩාංග ඒකකයෙන්

සාදා ඇති එම ලකුණු දෙන්න.

3. $|z - 2i| \leq 2$ හා $0 \leq \text{Arg}(z + 2\sqrt{3}) \leq \frac{\pi}{6}$ යන අසමානතා සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස ආගන්ථි සටහනක අඳුරු කරන්න.
මෙම අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය කරනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $|z|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.



4. $(1+x^3)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ ප්‍රසාරණයෙහි නියත පදය 93 බව පෙන්වන්න.

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9 \text{ හි } r\text{වන පදය} = {}^9C_r x^r \left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^{9-r} \quad (5) \leftarrow \text{සාධාරණ පදය}$$

$$= {}^9C_r x^r \cdot x^{\left(\frac{r-9}{2}\right)} (-1)^{9-r}$$

$$= {}^9C_r x^{\left(\frac{3r-9}{2}\right)} (-1)^{9-r}$$

(5) $\leftarrow$ නියත පදය

$$\therefore (1+x^3)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9 \text{ හි ප්‍රසාරණයෙහි නියත පද ලැබෙන්නේ } \frac{3r-9}{2} = 0 \text{ විට හා } \frac{3r-9}{2} = -3 \text{ වන විට ය. } (5)$$

එනම් $r=3$ විට හා $r=1$ විට.

$$\therefore \text{අවසාන නියත පදය} = {}^9C_1 + {}^9C_3 \leftarrow (5)$$

$$= \frac{9!}{8!} + \frac{9!}{3!6!}$$

$$= 9 + \frac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 3}$$

$$= 9 + 84$$

$$= 93. \quad (5)$$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)}{(x-4)^2} \sin(\sqrt{x}-2) = \frac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)}{(x-4)^2} \sin(\sqrt{x}-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)}{(x-4)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}+1)} \cdot \sin(\sqrt{x}-2) \quad (5) \\ & \quad \text{ප්‍රතිලෝමයෙන්} \\ & \quad \text{ගුණ කිරීම} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{(x-4)^2(\sqrt{x-3}+1)} \cdot \sin(\sqrt{x}-2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x-3}+1)} \cdot \frac{\sin(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)} \quad (5) \\ & \quad \text{සාධක වෙන් කිරීම} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{4}+2)(\sqrt{1}+1)} \cdot 1 \quad (5) + (5) \quad (1 \text{ කොටුව භාවිතයෙන්}) \\ & \quad \text{ආදේශය} \quad \text{ලකුණ දෙන්න} \\ &= \frac{1}{8} \cdot (5) \end{aligned}$$

6. $y = \frac{2}{x\sqrt{4-x^2}}$, $y=0$, $x=1$ හා $x=\sqrt{2}$ වක්‍ර මගින් ආවර්ත වන පෙදෙස x -අක්ෂය වටා 2π රේඩියනවලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය කරනු ලබන සන වස්තුවෙහි පරිමාව $\pi(\sqrt{3}-1)$ බව පෙන්වන්න.

$$\text{අවශ්‍ය පරිමාව} = \pi \int_1^{\sqrt{2}} y^2 dx \quad (5)$$

$$= \pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{4 \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t}} \cdot 2 \cos t dt$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t \cdot 2 \cos t} \cdot 2 \cos t dt$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2 t dt \quad (5)$$

$$= \pi (-\cot t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \quad (5)$$

$$= \pi \left(-\cot \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \pi(\sqrt{3}-1). \quad (5)$$

$y \Rightarrow f(x)$ තිබෙන්නේ දෙන්න

$(1, \sqrt{2})$ සහ $(\sqrt{2}, 0)$ තිබේ.

$x = 2 \sin t$ යැයි ගනිමු.
එවිට $dx = 2 \cos t dt$ වේ.

ආදේශයට දැනුව

සීමා වර්ත කර තිබේ.

(5)

* වෙන ආදේශ
යොදා පිළිතුර
පැවරෙන්නේ තැන්පත්
part marks නොදේ.

(5) මේ පියවරේදී තැනන්නේ සීමාව පෙර යොදා ඇතත් දෙන්න.

7. C යනු $t > 0$ සඳහා $x = \ln t$ හා $y = e^t + t \ln t$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන චක්‍රය යැයි ගනිමු.

$$\frac{dy}{dx} = t(e^t + \ln t + 1) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

C චක්‍රයට $t = 1$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය $(1, a)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි නම්, $a = 1 + 2e$ බව පෙන්වන්න.

$$t > 0 \text{ සඳහා } x = \ln t \text{ හා } y = e^t + t \ln t.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \text{ හා } \frac{dy}{dt} = e^t + \ln t + t \cdot \frac{1}{t} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t + \ln t + 1)}{\frac{1}{t}} \\ &= t(e^t + \ln t + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = e + \ln 1 + 1 = e + 1. \quad (5)$$

$$t = 1 \text{ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය } (0, e) \text{ වේ.} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{a - e}{1 - 0} = e + 1$$

$$\therefore a = 1 + 2e. \quad (5)$$

8. මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට ලම්භ දුර 1 ක් වන, $A \equiv (-1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

* ඕනෑම රේඛාවක් $y = mx + c$ ආකාරයෙන්
ලිවිය හොඳින්.

$A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ ඕනෑම රේඛාවක සමීකරණය $a(x+1) + b(y-2) = 0$ ආකාරයෙන් වේ; මෙහි $a^2 + b^2 \neq 0$ වූ $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. (5)

දත්තයෙන්: $\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$ (5)

$\Leftrightarrow (a-2b)^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 4ab - 3b^2 = 0$

$\Leftrightarrow b(4a - 3b) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$ හෝ $a = \frac{3b}{4}$ (5)

අවශ්‍ය සමීකරණ $a(x+1) = 0$ හෝ $\frac{3b}{4}(x+1) + b(y-2) = 0$ වේ.

එනම්, $x = -1$ හෝ $3x + 4y - 5 = 0$.

(5)

(5)

විකල්ප ක්‍රමය

$x = -1$ යනු $A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ එක් රේඛාවකි. (5)

$A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ වෙනත් ඕනෑම රේඛාවක් $y = mx + c$ යැයි ගනිමු.

එවිට $2 = m(-1) + c$ හා එනම් $c = m + 2$ වේ.

$\therefore y = mx + m + 2$. (5)

දත්තයෙන්: $\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ (5)

$\Leftrightarrow (m+2)^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow 4m + 4 = 1$

$\Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$. (5)

අනෙක් රේඛාව $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2$ මගින් දෙනු ලැබේ.

එනම් $3x + 4y - 5 = 0$. (5)

9. $A \equiv (-1, 1)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු. AB විෂ්කම්භයක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
 $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ වෘත්තය, S වෘත්තය B හි දී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

S හි සමීකරණය

$$(x+1)(x-3) + (y-1)(y-3) = 0. \leftarrow (5)$$

C_1 යනු S හි කේන්ද්‍රය යැයි ගනිමු.

$$\text{එවිට } C_1 \equiv (1, 2).$$

$$\text{එහි අරය } r_1 = \sqrt{5} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} C_1 \\ r_1 \end{matrix}} \right\} (5) \text{ මේ දෙකම නිවැරදි නම්}$$

C_2 යනු $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ හි කේන්ද්‍රය යැයි ගනිමු.

$$\text{එවිට } C_2 \equiv (2, \frac{5}{2}).$$

$$\text{එහි අරය } r_2 = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} C_2 \\ r_2 \end{matrix}} \right\} (5) \text{ මේ දෙකම නිවැරදි නම්}$$

$$\text{දැන්, } C_1 C_2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore C_1 C_2 = r_1 - r_2. \leftarrow (5) \text{ අභ්‍යන්තරව ධ්වනි වීමේ අවශ්‍යතාව}$$

දෙවන වෘත්තය මත B පිහිටන බව සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා $\leftarrow (5)$ B බිඳීමකින් ආදේශනය

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ වෘත්තය S වෘත්තය B හිදී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි.

10. $\frac{\cot \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \sin \theta} = 4 \operatorname{cosec} 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

එනමින්, $\frac{\cot \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \sin \theta} = 8 \cos 2\theta$ විසඳන්න.

$$\frac{\cot \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$= \frac{[(1 - \sin \theta) + (1 + \sin \theta)] \cot \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \cot \theta}{\cos^2 \theta} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= 4 \operatorname{cosec} 2\theta. \quad (5)$$

$$\frac{\cot \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \sin \theta} = 8 \cos 2\theta$$

$$4 \operatorname{cosec} 2\theta = 8 \cos 2\theta \quad (5)$$

$$2 \cos 2\theta \sin 2\theta = 1$$

$$\sin 4\theta = 1 \quad (5)$$

$$\sin 4\theta = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 4\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}; \text{ මෙහි } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore \theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{8}; \text{ මෙහි } n \in \mathbb{Z}.$$

$$4\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{8}$$

(මේ ඡායාරූප දෙක)

11. (a) $f(x) = x^2 + 2x + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $c \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ යන සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රතිඵල මූල දෙකක් ඇති බව දී ඇත. $c < 1$ බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු $f(x) = 0$ හි මූල යැයි ගනිමු.

$\alpha^2 + \beta^2 = 4 - 2c$ බව පෙන්වන්න.

$c \neq 0$ හා $\lambda \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ හා $\beta + \frac{1}{\beta}$ මූල ලෙස ඇති වර්ග සමීකරණය $2x^2 + 12x + \lambda = 0$ වේ. c හා λ හි අගයන් සොයන්න.

(b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $f(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $f(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයට වඩා 36 ක් වැඩි ය. $3p + q = 29$ බව පෙන්වන්න.

$(x+1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව ද දී ඇත.

$p = 6$ හා $q = 11$ බව පෙන්වා $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

එ නමින්, $f(x) = 3(x+2)$ විසඳන්න.

ච්ඡේදනය ලිවීමට

(a) $\Delta = 4 - 4c > 0$. ප්‍රභව්‍ය මූල
භාවයට අවශ්‍යතාව

$\therefore c < 1$. (5)

15

$\alpha + \beta = -2$ and $\alpha\beta = c$.

(5) මූල දෙකේ එකතුව
මූල දෙකේ නිෂ්පාද

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \leftarrow (5)$ ප්‍රකාශනයට

$= 4 - 2c$. (5) ආපද්‍රෝශයට

20

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{12}{2}$ (10) / 00
මූල දෙකේ එකතුව

$\alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -6$ (5) ආපද්‍රෝශයට සහතික කිරීමට

$-2 - \frac{2}{c} = -6$ (5) $\leftarrow$ ආපද්‍රෝශයට

$\frac{2}{c} = 4$

$c = \frac{1}{2}$ (5)

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\lambda}{2}$$

(10) / 00 * නිකුත් 25
දිලිසිය ගැනීමට

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{2} \leftarrow (5) \text{ ආදේශයට පත් කිරීම}$$

$$c + \frac{1}{c} + \frac{4-2c}{c} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 2 + \frac{4-2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2} \quad (5) \leftarrow \text{ආදේශයට}$$

* වැරදි c ගෙව ඇත්තේ
නිකුත් 25 ලැබේ.

$$\frac{5}{2} + 6 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \lambda = 17. \quad (5)$$

50

b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$

$f(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය

$$= f(2) = 8 + 4p + 2q + p = 8 + 5p + 2q. \quad (5) \quad x=2 \text{ ආදේශයට}$$

$f(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය

$$= f(1) = 1 + p + q + p = 1 + 2p + q. \quad (5) \quad x=1 \text{ ආදේශයට}$$

$$f(2) = 36 + f(1) \text{ බව දී ඇත.} \quad (5) \text{ සමබන්ධනය}$$

$$8 + 5p + 2q = 36 + 1 + 2p + q.$$

$$3p + q = 29 \quad \text{--- (1)}$$

(5)

20

$(x+1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින් $f(-1) = 0. \quad (5) \text{ නිකුත් 25 ලැබේ}$

$$\therefore -1 + p - q + p = 0$$

$$\therefore 2p - q = 1 \quad \text{--- (2) } \leftarrow (5)$$

$$(1) \text{ හා } (2) \Rightarrow 5p = 30$$

$$\therefore p = 6 \quad (5)$$

$$\text{දැන් (1)} \Rightarrow 18 + q = 29$$

$$\therefore q = 11. \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$= (x+1)(x^2 + 5x + 6) \quad (5) \text{ වර්ග කොටසට}$$

$$= (x+1)(x+2)(x+3) \quad (5) \text{ සාධක 3 ලබාගෙන}$$

අනුපාති ලබාගෙන.

30

$$f(x) = 3(x+2)$$

$$(x+1)(x+2)(x+3) = 3(x+2)$$

$$(x+2)[(x+1)(x+3) - 3] = 0 \quad (5)$$

$$(x+2)(x^2 + 4x) = 0$$

$$x(x+2)(x+4) = 0 \quad (5)$$

$$\therefore x = 0 \text{ or } x = -2 \text{ or } x = -4. \quad (5)$$

(5)

(5)

(5)

සම්පූර්ණ වශයෙන් ලබාගෙන.

15

12. (a) පවුලක දෙමාපියන් තම ළමා ශාඛීන් 15 දෙනෙකු අතුරින් 6 දෙනෙකුට රාත්‍රී භෝජන සංග්‍රහයකට ආරාධනා කිරීමට තීරණය කරති. පියාට ළමා ගැහැනු ශාඛීන් 5 දෙනෙකු හා ළමා පිරිමි ශාඛීන් 3 දෙනෙකු සිටින අතර, මව්ට ළමා ගැහැනු ශාඛීන් 3 දෙනෙකු හා ළමා පිරිමි ශාඛීන් 4 දෙනෙකු සිටී.

(i) පියාට ඔහුගේ ළමා ගැහැනු ශාඛීන් 3 දෙනෙකුටත් මව්ට ඇයගේ ළමා පිරිමි ශාඛීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

(ii) පිරිමි ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු හා ගැහැනු ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු වන පරිදි, පියාට ඔහුගේ ළමා ශාඛීන් 3 දෙනෙකුටත් මව්ට ඇයගේ ළමා ශාඛීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

වෙනස් විධි ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{1}{r(r+2)(r+4)}$ හා $f(r) = \frac{1}{r(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = AU_r$ වන පරිදි A තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය නිර්ණය කරන්න.

ඒ නමින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{11}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඵ්කෘය සොයන්න.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n (mU_r + U_{n+1-r}) = \frac{11}{32}$ වන පරිදි m තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

12. (a)

පියා		මව	
ගැහැනු ශාඛීන්	පිරිමි ශාඛීන්	ගැහැනු ශාඛීන්	පිරිමි ශාඛීන්
5	3	3	4

(i) පියාට ඔහුගේ ළමා ගැහැනු ශාඛීන් 3 දෙනෙකුට ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන = 5C_3 (5)

මව්ට ඇයගේ ළමා පිරිමි ශාඛීන් 3 දෙනෙකුට ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන = 4C_3 (5)

$\therefore$ පියාට ඔහුගේ ළමා ගැහැනු ශාඛීන් 3 දෙනෙකුටත් මව්ට ඇයගේ ළමා පිරිමි ශාඛීන් 3 දෙනෙකුටත්

ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන = ${}^5C_3 \times {}^4C_3$ (5)

$$= \frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \times 4}{2} \times 4 = 40$$

20

(ii)

	පියා	මව	වෙනස් විධි ගණන	
10	ගැහැනු 3 ක්	පිරිමි 3 ක්	${}^5C_3 \times {}^4C_3 = 40$	
	ගැහැනු 2 ක් හා පිරිමි 1 ක්	ගැහැනු 1 ක් හා පිරිමි 2 ක්	${}^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 = 540$	10
	ගැහැනු 1 ක් හා පිරිමි 2 ක්	ගැහැනු 2 ක් හා පිරිමි 1 ක්	${}^5C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_1 = 180$	10
	පිරිමි 3 ක්	ගැහැනු 3 ක්	${}^3C_3 \times {}^3C_3 = 1$	5

පිළිතුර = $40 + 540 + 180 + 1 = 761$. (5)

තෝරා ලියා ඇති නිවැරදි පිළිතුරු අතරින් (40) ව දෙන්න

40

(b) $f(r) - f(r+2) = \frac{1}{r(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+4)}$ (5) ආදේශයට

$= \frac{(r+4) - r}{r(r+2)(r+4)}$ (5) හෙළි කරමු

$= 4 \frac{1}{r(r+2)(r+4)}$

$= 4U_r$ (5) ප්‍රතිඵලය

$\therefore A = 4$. (5)

20

$\therefore 4U_r = f(r) - f(r+2)$ for $r \in \mathbb{Z}^+$.

$r = 1 : 4U_1 = f(1) - f(3)$

$r = 2 : 4U_2 = f(2) - f(4)$ (5)

$r = 3 : 4U_3 = f(3) - f(5)$

.

.

.

.

$r = n-2 : 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1 : 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$ (5) පහළින් පිටතට ගෙන යාම

$r = n : 4U_n = f(n) - f(n+2)$ (5) ප්‍රතිඵලය

එබැවින් $A = 4 \sum_{r=1}^n U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$ (10/00)

සඳහා $n = 30$ නි. $= \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}$ (10/00)

අවසාන (5)

නිවැරදි නොවේ.

$\therefore \sum_{r=1}^n U_r = \frac{11}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}$ (5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n U_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{11}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)} \right\} \quad (5) \text{ ඔබ ව ලිව්ව}$$

$$= \frac{11}{96} \quad (5) \text{ අගය සඳහා}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r \text{ අභිසාරී වන අතර එහි ඵලය} = \frac{11}{96} \quad (5) \quad \sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{11}{96}$$

15

අනුසාරී වා ශ්‍රේණියක් නිසි.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n (mU_r + U_{n+1-r})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(m \sum_{r=1}^n U_r + \sum_{r=1}^n U_{n+1-r} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(m \sum_{r=1}^n U_r + \sum_{r=1}^n U_r \right) \quad (10) / \infty$$

දිගු සූත්‍රය වා ගණන
තැබීම

$$= (m+1) \sum_{r=1}^{\infty} U_r$$

$$\therefore (m+1) \frac{11}{96} = \frac{11}{32} \quad (5) \text{ ආදේශය}$$

$$\therefore m+1 = 3 \text{ හා } m = 2. \quad (5)$$

20

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $2A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ යැයි දී ඇත.

$a = 0$ හා $b = 5$ බව පෙන්වන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා, $C = AB^T$ යැයි ගනිමු.

C සොයා C^{-1} ලියා දක්වන්න.

$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ D න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

(iii) $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2$

බව පෙන්වන්න.

$z_2 \neq 0$ සඳහා $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $|z_1| = 1$ හා $z_1 \neq \pm 1$ නම් ද $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ යන න්‍යාතත්වික ද නම්, $|z_2| = 1$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\sqrt{3} + i$ යන්න $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ද මූලාවර්ජ ප්‍රමේය භාවිතයෙන්, $\frac{(\sqrt{3} + i)^{24}}{2^{23}(1 + i)} = 1$ ට බව පෙන්වන්න.

(a) $2A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$2A+B$
සුළු නිසා $\begin{pmatrix} 2 & 4+a & -2+b \\ 6+3 & 2a+b & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 4+a=4, -2+b=3$ හා $2a+b=5$

$\Leftrightarrow a=0$ හා $b=5$. (5)

(10) ඔනෑම දෙකක් සඳහා.

$$C = AB^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \text{ සෙවීම}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \quad (10) / (10)$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{175} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

25

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} \quad (5) \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left[-\frac{1}{175} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \right] \quad \leftarrow \text{වැඩිදුරු } C^{-1} \text{ ආදේශය යොමු කළේ නිසා වැඩිදුරු කඩ (10) ක් ලැබේ.}$$

$$= -\frac{1}{175} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -20 & -10 \end{pmatrix} \quad (10)$$

15

(b) Let $z_1 = x_1 + iy_1$ හා $z_2 = x_2 + iy_2$; මෙහි $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \quad (5)$$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$$

$$= \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (5)$$

10

$$(ii) \overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}$$

$$= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)}$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (5)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (5)$$

$$\therefore \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad (5)$$

15

$$(iii) z_1 \overline{z_1} = (x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)$$

$$= x_1^2 + y_1^2 \quad (5)$$

$$= |z_1|^2 \quad (5)$$

10

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \right) = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \overline{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_1} z_1 z_2 + \overline{z_2} + \overline{z_2} z_1 z_2 = z_1 + z_2 + \overline{z_1} \overline{z_2} z_1 + \overline{z_1} \overline{z_2} z_2 \neq 10$$

$$\Rightarrow \overline{z_1} + |\overline{z_1}|^2 z_2 + \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} = z_1 + z_2 + \overline{z_2} |\overline{z_1}|^2 + \overline{z_1} |\overline{z_2}|^2 \neq 10 \quad (5) \quad |z_1|^2, |z_2|^2$$

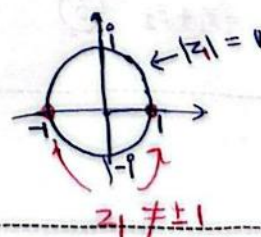
$$\Rightarrow \overline{z_1} + \cancel{z_2} + \cancel{z_2} + z_1 |\overline{z_2}|^2 = z_1 + \cancel{z_2} + \cancel{z_2} + \overline{z_1} |\overline{z_2}|^2 \neq 10$$

$$\Rightarrow (z_1 - \overline{z_1})(|\overline{z_2}|^2 - 1) = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow |z_2|^2 - 1 = 0 \quad (\because \overline{z_1} \neq z_1) \quad *$$

$$\Rightarrow |z_2| = 1 \quad (5)$$

$$(|z_1| = 1 \text{ and } z_1 \neq \pm 1) \neq 1$$



25

$$(c) \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

$$= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right) \quad (5)$$

$$r = 2 \text{ හා } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\frac{\sqrt{3} + i}{2^{23}(1+i)} = \frac{2^{24}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)}{2^{23}(1+i)} \quad (5) \text{ ද ඉහතර භාවිතය , } \\ \text{ප්‍රතිඵලය}$$

$$= \frac{2}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \quad (5)$$

$$= \frac{2(1-i)}{2} \text{ ප්‍රතිලෝමයෙන් ගුණනය කර } \\ \text{ප්‍රතිඵලය}$$

$$= 1-i. \quad (5)$$

25

14. (a) $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ සඳහා $f(x) = \frac{px+q}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයට $(0, 1)$ හි දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව දී ඇත. $p = -3$ හා $q = 2$ බව පෙන්වන්න.

p හා q හි මෙම අගයන් සඳහා, $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 1, 2$ සඳහා $f'(x) = \frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශකේන්ද්‍රික හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නමින්, $x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(b) පියනක් සහ පතුලක් සහිත සිලින්ඩරයක්, පරිමාව $1024\pi \text{ cm}^3$ වන පරිදි සාදා ඇත. සිලින්ඩරයේ අර $r \text{ cm}$ යැයි ගනිමු. සිලින්ඩරයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S \text{ cm}^2$ යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 2\pi \left(\frac{1024}{r} + r^2 \right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන්නේ $r = 8$ වන විට බව පෙන්වන්න.

(a) $f(0) = 1$ බැවින් $\frac{q}{2} = 1$ වේ.

$$\therefore q = 2 \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)p - (px+q)(x-1+x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}; x \neq 1, 2 \text{ සඳහා} \quad (10)$$

$$f'(0) = 0 \text{ බැවින් } 2p - q(-3) = 0 \text{ වේ.} \quad (5)$$

$$\therefore 2p = -3q$$

$$= -6$$

$$\therefore p = -3 \quad (5)$$

12

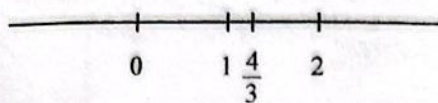
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-3x+2) - (-3x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad (5) \quad (p, q \text{ ආදේශයට})$$

$$= \frac{-3x^2 + 9x - 6 + 6x^2 - 13x + 6}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 4x}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad (5) \quad \left(\begin{array}{l} \text{සාධක වෙඩි කිරීමට} \\ \text{for } x \neq 1, 2. \end{array} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ හෝ } x = \frac{4}{3}. \quad (5)$$



	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$
Sign of $f'(x) = \frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ ලකුණ	$\frac{(-)(-)}{(+)} = (+)$ (5)	$\frac{+)(-)}{(+)} = (-)$ (5)	$\frac{+)(-)}{(+)} = (-)$ (5)	$\frac{+)(+)}{(+)} = (+)$ (5)	$\frac{+)(+)}{(+)} = (+)$ (5)
$f(x)$					

(10) 100

$(-\infty, 0]$, $[\frac{4}{3}, 2)$ හා $(2, \infty)$ මත වැඩි වේ.

$(0, \frac{4}{3})$ භූතරයේ ඔහු කැඩී යයි (10)

$[0, 1)$ හා $(1, \frac{4}{3}]$ මත අඩු වේ.

$(\frac{4}{3}, 2)$ " " " " (10)

50

$(0, 1)$ හිදී ස්ථානීය උපරිමයකි. (5)

$(\frac{4}{3}, 2)$ හිදී ස්ථානීය අවමයකි. (5)

} ඉහත දෙකේදී ලකුණ නර ඇත්තේ
ලකුණ දෙකි.

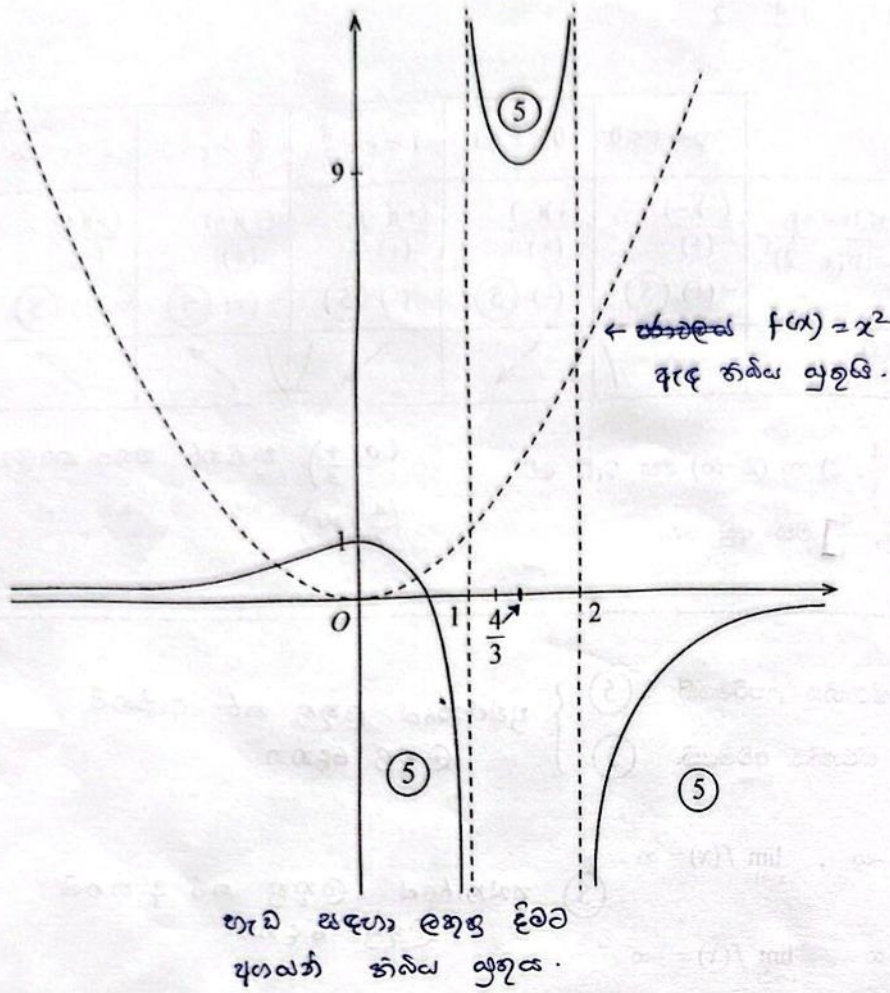
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

(5) ඉහත දෙකේදී ලකුණ නර ඇත්තේ
ලකුණ දෙකි.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. (5)

ඉහත දෙකේදී ලකුණ නර ඇත්තේ
ලකුණ දෙකි.



35

$$x^2(x-1)(x-2) = 2-3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2-3x}{(x-1)(x-2)} \quad (5) \text{ කනුළු නිසිව}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = f(x) \quad \Delta$$

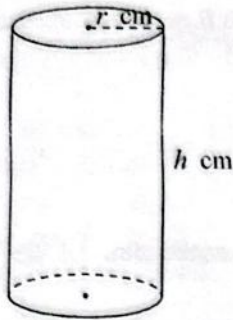
$$\therefore \text{තාත්කලීය විසඳුම් ගණන} = 2. \quad (5)$$

ඒයුමේ ගණන ලියා තොරතුරු වුවන්

$f(x) = x^2$ ආදි අගිති තව ලකුණු දෙන්න.

10

(b)



$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\pi r^2 h = 1024\pi$$

$$\therefore h = \frac{1024}{r^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= 2\pi r \left\{ \frac{1024}{r^2} \right\} + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi \left(\frac{1024}{r} + r^2 \right) \quad (5) \end{aligned}$$

10

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi \left(-\frac{1024}{r^2} + 2r \right) \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow \frac{1024}{r^2} = 2r$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 512$$

$$\Leftrightarrow r = 8. \quad (5)$$

$$0 < r < 8 \text{ සඳහා } \frac{dS}{dr} < 0 \text{ වේ.}$$

$$r > 8 \text{ සඳහා } \frac{dS}{dr} > 0 \text{ වේ.}$$

$\therefore S$ අවම වන්නේ $r = 8$ විට ය. (5) අවමයන් සහ හේතුව.

20

$$\frac{d^2S}{dr^2} \text{ හෝ } r = 8 \text{ අර්ද්ධයෙන්,}$$

$$\frac{d^2S}{dr^2} > 0 \text{ සහ හේතුවට මෙම } \text{ලකුණු දෙන්න.}$$

- 15.(a) සියලු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t + 1)$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන්හි අගයන් සොයන්න.

එ හරිත් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\int \frac{3t^2 + 4}{(t+1)(t^2 - 2t + 4)} dt$ සොයන්න.

(b) $u = x + \sqrt{x^2 + 3}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \frac{1}{2} \ln 3$ බව පෙන්වන්න.

$J = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $2J = 2 + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$ බව පෙන්වන්න.

$J = 1 + \frac{3}{4} \ln 3$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) a නියතයක් වන $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \frac{\pi}{8} \ln \left(\frac{1}{2} \right)$ බව පෙන්වන්න.

(a) $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t + 1)$

$= (A + B)t^2 + (-2A + B)t + 4A \quad (5)$

t^2 හි සංගුණක : $3 = A + B$

t^1 හි සංගුණක : $0 = -2A + B$

t^0 හි සංගුණක : $4 = 4A$

ඔබ්බර්න 2න්
නිසිම ප්‍රමාණවත්

$\therefore A = 1$ හා $B = 2$.

(5)

(5)

$$\therefore \frac{3t^2 + 4}{(t+1)(t^2 - 2t + 4)} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2 - 2t + 4} \quad (10)$$

වැරදි A හා B සඳහා වෙල
කෙරේ.

$$\int \frac{3t^2 + 4}{(t+1)(t^2 - 2t + 4)} dt = \int \left\{ \frac{1}{t+1} + \frac{2t-2+2}{t^2 - 2t + 4} \right\} dt$$

$$= \int \frac{1}{t+1} dt + \int \frac{2t-2}{t^2 - 2t + 4} dt + 2 \int \frac{1}{(t-1)^2 + 3} dt$$

$$= \ln|t+1| + \ln|t^2 - 2t + 4| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{t-1}{\sqrt{3}} \right) + C,$$

(5)

(5)

(5)

(5)

C ඇතුළු සවිප්‍රේෂණ පිළිතුර
A හා B වැරදි තව නෙ(5)
කෙරේ.

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

30

(b) $u = x + \sqrt{x^2 + 3}$.

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{u}{\sqrt{x^2 + 3}} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \frac{1}{u} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3} \\ x = 1 \Rightarrow u = 3 \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\text{So, } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{u} du = \ln|u| \Big|_{\sqrt{3}}^3 = \ln 3 - \ln \sqrt{3}$$

(5)

(5)

$$= \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3 \quad (5)$$

25

$$J = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx = x\sqrt{x^2 + 3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} dx \quad (10)$$

$$= 2 - \int_0^1 \frac{x^2 + 3 - 3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx \quad (5)$$

$$\therefore J = 2 \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} \, dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \, dx \quad (10)$$

$$\Rightarrow 2J = 2 + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \, dx \quad (5)$$

30

$$\begin{aligned} \therefore J &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln 3 \\ &= 1 + \frac{3}{4} \ln 3 \end{aligned} \quad (10)$$

10

(c) Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx$.

$$\text{Then } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} \right) dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x}{\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x} \right) dx \quad (10)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos x + \sin x}{2 \cos x} \right) dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{1}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx \quad (10)$$

$$\therefore I = \ln \left(\frac{1}{2} \right) x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I \quad (5)$$

$$\Rightarrow 2I = \ln \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{8} \ln \left(\frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (a, b)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. AB රේඛා ඛණ්ඩයේ l ලම්භ සමච්ඡේදනයේ සමීකරණය $x + y - 4 = 0$ බව දී ඇත. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

$C \equiv (3, 1)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වා ACB සොයන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය S යැයි ගනිමු. S හි කේන්ද්‍රය $\left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා S හි සමීකරණය සොයන්න.

එනමින්, A, B ලක්ෂ්‍ය හා $D \equiv (0, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$$AB \text{ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය} \equiv \left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right). \quad (5)$$

මෙම ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි.

$$\therefore \frac{1+a}{2} + \frac{2+b}{2} - 4 = 0$$

$$\therefore a + b = 5 \quad (5)$$

තවද l යන්න AB ට ලම්භ වේ.

$$\therefore \left(\frac{b-2}{a-1}\right) \times (-1) = -1. \quad (5)$$

$$\therefore b - 2 = a - 1$$

$$\therefore b - a = 1 \quad (5)$$

දැන්, ① හා ② මගින් $a = 2$ හා $b = 3$ ලැබේ.

එවිට, $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (2, 3)$ හා $C \equiv (3, 1)$.

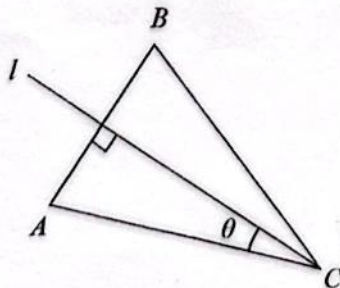
35

Substitute $x = 3$ හා $y = 1$, $x + y - 4 = 0$ හි ආදේශ කරමු. (5)

$$ච.පැ. = 3 + 1 - 4$$

$$= 0 = ද.පැ.$$

$\therefore l$ මත C පිහිටයි. (5)



AC හා l අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු.

එවිට θ සුළු කෝණයකි.

$$AC \text{ හි අනුක්‍රමණය} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

$$\tan \theta = \left| \frac{-\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)} \right| = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right). \quad (5)$$

$$\therefore \hat{ACB} = 2\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right). \quad (5) \quad (\text{තුල ප්‍රකාර පදනම මත ඇත්ත}) \quad \boxed{35}$$

AC හි ලම්භ සමච්ඡේදකය m යැයි ගනිමු.

$$m \text{ හි අනුක්‍රමණය} = 2 \text{ වේ.} \quad (5)$$

$$AC \text{ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය} \equiv \left(2, \frac{3}{2}\right). \quad (5)$$

$$m \text{ හි සමීකරණය: } y - \frac{3}{2} = 2(x - 2) \quad (5)$$

$$\text{එනම් } y - 2x + \frac{5}{2} = 0.$$

S හි කේන්ද්‍රය l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. (5)

$$x + y - 4 = 0 \text{ හා } y - 2x + \frac{5}{2} = 0 \text{ සමගාමීව විසඳීමෙන්,} \quad (5)$$

$$3x = 4 + \frac{5}{2} \text{ අපට ලැබේ.}$$

$$\therefore x = \frac{13}{6} \text{ හා } y = 4 - \frac{13}{6} = \frac{11}{6}.$$

$$x = \frac{13}{6} \quad (5) \quad (5)$$

$$\therefore S \text{ හි කේන්ද්‍රය} \equiv \left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right).$$

$$S \text{ හි අරය} = \sqrt{\left(\frac{13}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{6} - 2\right)^2} \quad (10) / (00)$$

$$= \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{1}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{18}} \quad (5)$$

$$\therefore S \text{ හි සමීකරණය: } \left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{6}\right)^2 = \frac{25}{18}. \quad (10)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{11}{3}y + \frac{20}{3} = 0$$

60

$$\therefore AB \text{ හි සමීකරණය: } y - 2 = 1(x - 1) \quad (5)$$

$$\text{එනම් } x - y + 1 = 0$$

A හා B හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{25}{18} + \lambda(x - y + 1) = 0$, මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$. (10)

$$S + \lambda(l) = 0$$

මෙය $D \equiv (0, 3)$, හරහා යෑමට $\left(\frac{13}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{18} + \lambda(-2) = 0$ විය යුතු ය.

$$\lambda = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \quad (5) \quad \text{ඒ බොහෝ ජාත්‍යන්තර වශයෙන් දැක්වේ.}$$

$$\therefore \text{අවශ්‍ය සමීකරණය } x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0.$$

20

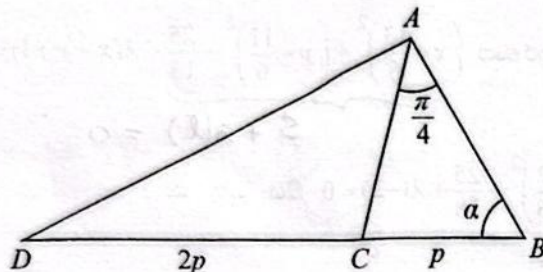
17.(a) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ යන්න $R\cos(2x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

එ නමින්, $6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$ විසඳන්න.

$24\cos^2 x - 32\sin x \cos x$ යන්න $a\cos 2x + b\sin 2x + c$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$24\cos^2 x - 32\sin x \cos x$ හි අවම අගය අපේක්ෂා කරන්න.

(b)



රූපයෙහි පෙන්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයෙහි $BC = p$, $\hat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ හා $\hat{ABC} = \alpha$ වේ. දික් කළ BC රේඛාව මත D පිහිටා ඇත්තේ $CD = 2p$ වන පරිදි ය.

$AB = p(\cos \alpha + \sin \alpha)$ බව පෙන්වන්න.

p හා α ඇසුරෙන් AD^2 සොයන්න.

$AD = 3p$ නම් $\alpha = \tan^{-1}(5)$ බව අපේක්ෂා කරන්න.

(c) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$$= 10 \left(\frac{6}{10} \cos 2x - \frac{8}{10} \sin 2x \right) \quad (5)$$

$$= 10 \left(\frac{3}{5} \cos 2x - \frac{4}{5} \sin 2x \right)$$

$$= 10(\cos \alpha \cos 2x - \sin \alpha \sin 2x), \text{ මෙහි } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ යන්න } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ හා } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ වන පරිදි වේ. } (5)$$

$$= 10\cos(2x + \alpha). \leftarrow (5)$$

$$\therefore R = 10 \text{ and } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right). \quad (5)$$

25

$$6 \cos 2x - 8 \sin 2x = 5$$

$$10 \cos(2x + \alpha) = 5 \quad (5)$$

$$\therefore \cos(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

$$2x + \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; \text{ මෙහි } n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

$$\therefore x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}; \text{ මෙහි } n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

$n \in \mathbb{Z}$ නිසා
අවශ්‍ය කොටේ.

20

$$24 \cos^2 x - 32 \sin x \cos x$$

$$= 24 \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} \right) - 32 \times \frac{1}{2} \sin 2x \quad (10) \quad \text{ආපේල 2ට (5) + (5)}$$

$$= 12 \cos 2x - 16 \sin 2x + 12$$

$$\therefore a = 12, \quad b = -16 \quad \text{හා} \quad c = 12. \quad (5)$$

15

$$24 \cos^2 x - 32 \sin x \cos x$$

$$= 12 \cos 2x - 16 \sin 2x + 12$$

$$= 2(6 \cos 2x - 8 \sin 2x) + 12$$

$$= 20 \cos(2x + \alpha) + 12 \quad (5)$$

$$\text{අවමය} = -1$$

$$\therefore \text{අවශ්‍ය අවමය} = -20 + 12$$

$$= -8. \quad (5)$$

10

(b) $\triangle ABC$ සඳහා සයින නිතිය :

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{p}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad (10/100)$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}p \left(\sin\frac{\pi}{4} \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4} \sin\alpha \right) \leftarrow (5) \text{ වාදනය}$$

$$= \sqrt{2}p \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\alpha \right)$$

$$= p(\cos\alpha + \sin\alpha). \quad (5)$$

20

$\triangle ABD$ සඳහා කොසයින නිතිය :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos\alpha \quad (5)$$

$$= p^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + 9p^2 - 2p(\cos\alpha + \sin\alpha)(3p\cos\alpha) \quad (5)$$

$AD = 3p$ යැයි සිතමු.

$$\text{එවිට } 9p^2 = p^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + 9p^2 - 6p^2(\cos\alpha + \sin\alpha) \cos\alpha \quad (5)$$

$$\therefore (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - 6(\cos\alpha + \sin\alpha) \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha + \sin\alpha = 6\cos\alpha \quad (5) \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = 5\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 5$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(5). \quad (5)$$

25

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \tan^{-1}(2)$. (5)

Let $\alpha = \tan^{-1}(x+1)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x-1)$ යැයි ගනිමු.

$\alpha + \beta = \tan^{-1}(2)$ (5)

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 2$ (5) $\tan \theta$ ගැත්ත

$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 2$ (5) ඉහත සමාන

$\Rightarrow \frac{x+1+x-1}{1-(x^2-1)} = 2$ (5) $\Rightarrow x = 2 - x^2$

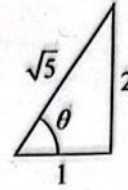
$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ or $x = -2$. (5)

$x = -2$ විසඳුමක් නොවේ. $x = 1$ විසඳුමකි.

$\therefore x = 1$. (5) $x = -2$ ඉවත් කිරීමට



35



PAST PAPERS
WIKI

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2024

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

II පත්‍රය

$$A \text{ කොටස} \quad 10 \times 25 = 250$$

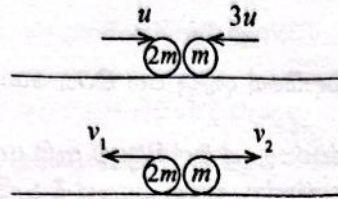
$$B \text{ කොටස} \quad 05 \times 150 = 750$$

එකතුව

$$= \frac{1000}{10}$$

$$II \text{ පත්‍රය අවසාන ලකුණු} = 100$$

1. ස්කන්ධය $2m$ වූ A අංශුවක් හා ස්කන්ධය m වූ B අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් u හා $3u$ වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටීමෙන් පසු A හා B ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $e > \frac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $I = \Delta(mv)$: $\rightarrow$ ගම්මන්ත සංරක්ෂිත නියමයට
ඉදිරි දෙන්න

$$0 = -2mv_1 + mv_2 - (2mu - 3mu) \leftarrow (5)$$

$$2v_1 - v_2 = u \text{ ----- (1)}$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්:

$$v_2 + v_1 = e(u + 3u) \leftarrow (5)$$

$$v_1 + v_2 = 4eu \text{ ----- (2)}$$

$$(1) \text{ හා } (2) \Rightarrow 3v_1 = u + 4eu$$

$$\therefore v_1 = \frac{1}{3}(1 + 4e)u > 0 \leftarrow (5)$$

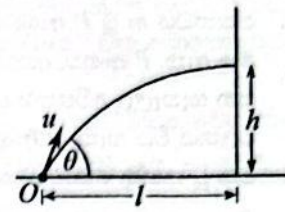
$$-3v_2 = u - 8eu$$

$$\therefore v_2 = \frac{1}{3}(8e - 1)u \leftarrow (5)$$

$$v_2 > 0 \text{ සඳහා } e > \frac{1}{8} \text{ විය යුතු ය. } \leftarrow (5)$$

2. තිරස් ගෙඩිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට u ආරම්භක වේගයකින් තිරසර $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට l තිරස් දුරකින් පිහිටි සිරස් කාථයක, ගෙඩිමේ සිට $h (> 0)$ උසකින් ගැටේ (රූපය බලන්න).

$$h = l \tan \theta - \frac{gl^2}{2u^2} \sec^2 \theta \text{ බව පෙන්වා } \sin 2\theta > \frac{gl}{u^2} \text{ බව අපෝහනය කරන්න.}$$



$$S = ut + \frac{1}{2}at^2: \rightarrow l = u \cos \theta t \leftarrow (5)$$

$$\uparrow h = u \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \leftarrow (5)$$

$$\therefore h = u \sin \theta \left(\frac{l}{u \cos \theta} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{l^2}{u^2 \cos^2 \theta} \right)$$

$$\Rightarrow h = l \tan \theta - \frac{gl^2}{2u^2} \sec^2 \theta \quad (5) \quad \uparrow \text{ අපෝහනය}$$

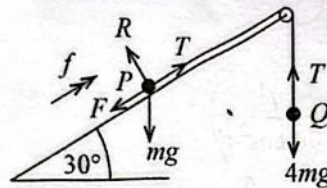
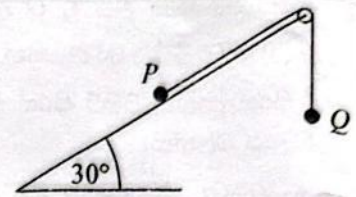
$$h > 0 \Rightarrow l \tan \theta > \frac{gl^2}{2u^2} \sec^2 \theta \leftarrow (5)$$

$$\Rightarrow \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} > \frac{gl}{u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} > \frac{gl}{u^2}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta > \frac{gl}{u^2}. \quad (5)$$

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තිරසර ආතතිය 30° ක් වූ රළු ආනත තලයක් මත ඇත. P අංශුව, ආනත තලයේ ඉහළින් වූ අවල සුමට කප්පියක් මගින් යන සැහැල්ලු අවිහන තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය $4m$ වූ සිරස්ව නිදහසේ චලනය විය හැකි Q අංශුවකට ඇඳා ඇත (රූපය බලන්න). ආනත තලය මත වූ තන්තු කොටස තලයේ උපරිම බැවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටා ඇත. P හා තලය අතර සර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P , ආනත තලයේ ඉහළට චලනය වන බව දී ඇත. තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



(5) - බල සඳහා
(P හා Q සඳහා
නියම බල)

$F = ma :$

(P) $\nearrow$ $R - mg \cos 30^\circ = 0 \leftarrow (5)$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{3}}{2} mg$$

$F = \frac{1}{2} R = \frac{\sqrt{3}}{4} mg \leftarrow (5)$ මෙය වත් ලඟු දෙව්ග.
R මෙර සොයා ඇති නිසා.

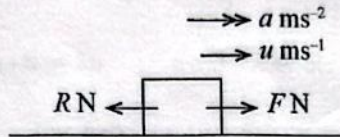
(P) $\nearrow$ $T - F - mg \cos 60^\circ = mf \leftarrow (5)$

$$\therefore T - F - \frac{mg}{2} = mf$$

(Q) $\downarrow$ $4mg - T = 4mf \leftarrow (5)$

4. ස්කන්ධය $M \text{ kg}$ වූ මෝටර් රථයක්, එහි එන්ජින් $P \text{ W}$ නියත ජවයකින් ක්‍රියා කරමින්, තිරස් සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ගමන් කරයි. කාරයෙහි වලිනයට $R \text{ N}$ නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එහි වේගය $u \text{ m s}^{-1}$ වන මොහොතෙහිදී, කාරයෙහි ත්වරණය සොයන්න.

දැන්, මෝටර් රථය, තිරස් $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට නියත වේගයකින් ගමන් කරයි. කාරය, එම $R \text{ N}$ ප්‍රතිරෝධයටම යටත්ව එම $P \text{ W}$ ජවයම ඇතිව ක්‍රියා කරයි නම්, මෙම නියත වේගය සොයන්න.



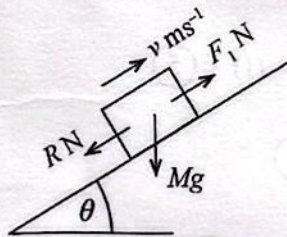
$$P = F \cdot u$$

$$\therefore F = \frac{P}{u} \quad (5) \text{ ජම්බර්තයටත් දෙන්න}$$

$$F = ma : \rightarrow$$

$$F - R = M \cdot a \quad (5)$$

$$\therefore a = \frac{1}{M} \left(\frac{P}{u} - R \right) \text{ ms}^{-2}. \quad (5) \text{ න්වර්තයට}$$



$$P = F_1 \cdot v:$$

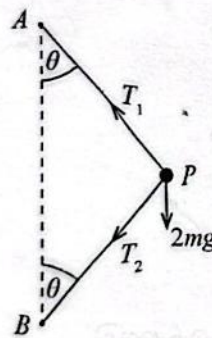
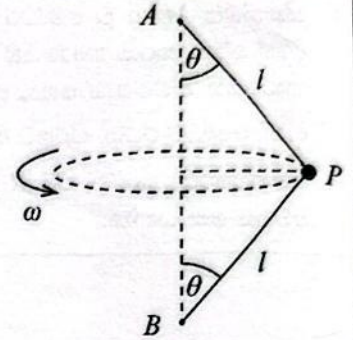
$$\therefore F_1 = \frac{P}{v}$$

$$F = ma : \nearrow \quad F_1 - R - Mg \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$\frac{P}{v} = R + Mg \sin \theta$$

$$\therefore v = \frac{P}{R + Mg \sin \theta} \text{ ms}^{-1}. \quad (5)$$

5. ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක්, සිරස් රේඛාවක් මත පිහිටි A හා B අවල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට, එක එකක දිග l වූ සැහැල්ලු අච්ඡන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් ඇඳ ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තු දෙකම තදව හා සිරස් සමග θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදමින් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව භ්‍රමය වන්නා වශයෙන් චලනය වේ.
 AP තන්තුවේ ආතතිය $m(l\omega^2 + g \sec \theta)$ බව පෙන්වන්න.



බල දෙකුත් ක්ෂරා
 දෙකුත් ද නැත

$F = ma :$

(P) $\uparrow$ $T_1 \cos \theta - T_2 \cos \theta - 2mg = 0$ (5)

$\therefore T_1 - T_2 = 2mg \sec \theta$ ----- (1) (5)

(P) $\leftarrow$ $T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta = 2ml \sin \theta \omega^2$ (5)

$\therefore T_1 + T_2 = 2ml\omega^2$ ----- (2) (5)

(1) හා (2) $\Rightarrow$ $2T_1 = 2mg \sec \theta + 2ml\omega^2$ *

$\therefore T_1 = m(l\omega^2 + g \sec \theta)$. (5)

6. u හා v යනු $u \cdot v = \frac{1}{2}$ වන පරිදි වූ ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු. $a = \alpha u + v$ හා $b = u + \beta v$ යැයි ද ගනිමු. මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ. a හා b දෛශික ලම්බ ද $a + b$ යන්න u ව සමාන්තර ද නම් α හා β හි අගයන් සොයන්න.

$$a \cdot b = (\alpha u + v) \cdot (u + \beta v)$$

$$0 = \alpha u \cdot u + \alpha \beta u \cdot v + v \cdot u + \beta v \cdot v$$

$$0 = \alpha + \alpha \beta \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \beta \quad \text{----- (1) } \quad (5)$$

$$a + b = \lambda u \quad ; \quad \text{මෙහි } \lambda \in \mathbb{R}. \quad \text{----- (2)}$$

$$(2) \cdot u \Rightarrow (\alpha u + v) \cdot u + (u + \beta v) \cdot u = \lambda u \cdot u$$

$$\alpha + \frac{1}{2} + 1 + \beta \cdot \frac{1}{2} = \lambda \quad \text{----- (3) } \quad (5)$$

$$(2) \cdot v \Rightarrow (\alpha u + v) \cdot v + (u + \beta v) \cdot v = \lambda u \cdot v$$

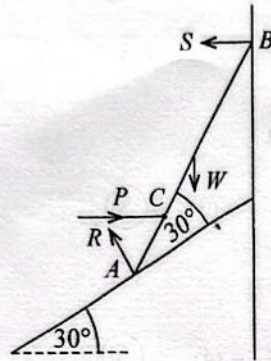
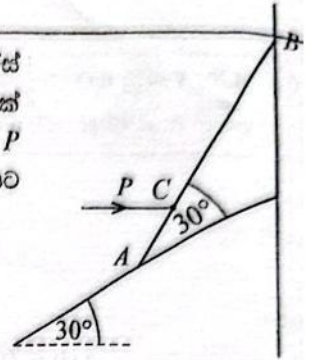
$$\frac{\alpha}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \beta = \frac{\lambda}{2} \quad \text{----- (4) } \quad (5)$$

$$(3) \text{ හා } (4) \Rightarrow \alpha + \frac{3}{2} + \frac{\beta}{2} = \alpha + 3 + 2\beta$$

$$\Rightarrow \beta = -1. \quad (5)$$

$$\text{දැන්, (1) } \Rightarrow \alpha = 1. \quad (5)$$

7. දිග $4a$ හා බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි B ඉහළ කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද A පහළ කෙළවර 30° කින් තිරසර ආනත සුමට තලයක් මත ද ඇතිව සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ $AC = a$ වන C ලක්ෂ්‍යයෙහිදී P තිරස් බලයක් දණ්ඩට යෙදීමෙනි. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, දණ්ඩ ආනත තලයට 30° කින් ආනත වේ. P හි අගය සොයන්න.



⑤ බල සඳහා

$$\rightarrow P - S - R \sin 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\therefore P = S + \frac{R}{2}$$

$$\uparrow R \cos 30^\circ - W = 0 \quad (5)$$

$$\therefore R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

$$\curvearrowleft P \times a \sin 60^\circ + W \times 2a \cos 60^\circ - S \times 4a \sin 60^\circ = 0 \quad (5)$$

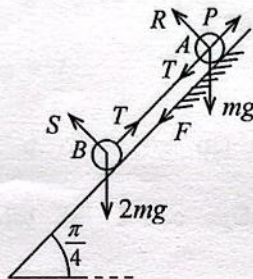
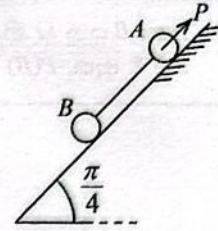
$$P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W - \left(P - \frac{R}{2}\right) 2\sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3}P + 2W - 4\sqrt{3}P + \frac{2W}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 0$$

$$3\sqrt{3}P = 6W.$$

$$P = \frac{2W}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

8. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ A හා B අංශු 2 ක් තිරසර $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත වූ තලයක් මත තබා සැහැල්ලු අවිනන්‍ය තන්තුවකින් ඇඳූ සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A ව යෙදූ P බලයක් මගිනි. P හි ක්‍රියා රේඛාව හා තන්තුව, තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටයි. A අංශුව තලයේ රළ කොටස මත පිහිටන අතර B අංශුව තලයේ සුමට කොටස මත පිහිටයි. A හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ.
- $2|\sqrt{2}P - 3mg| \leq mg$ බව පෙන්වන්න.



(5) බල සඳහා

පද්ධතිය සඳහා: $\nearrow P - F - mg \sin \frac{\pi}{4} - 2mg \sin \frac{\pi}{4} = 0.$ (5)

$$\therefore F = P - 3mg \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(A) $\nearrow R - mg \cos \frac{\pi}{4} = 0$ (5)

$$\therefore R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

සමතුලිතතාව සඳහා:

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|F|}{R} \quad (5) \quad (\text{අවශ්‍යතාව})$$

$$\therefore \left| P - \frac{3mg}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{mg}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\therefore 2|\sqrt{2}P - 3mg| \leq mg.$$

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක වූ සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(A|B) = \frac{1}{10}$ හා $P(B|A) = \frac{3}{10}$ බව දී ඇත. $P(B)$ හා $P(A \cup B)$ සොයන්න.

$$P(B|A) = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{10} \quad (5)$$

$$\therefore P(B \cap A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50} \leftarrow (5)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{10} \quad (5)$$

$$\therefore P(B) = 10 \times P(A \cap B) = 10 \times \frac{3}{50} = \frac{3}{5} \quad (5)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{50} = \frac{37}{50} \quad (5) \text{ අගයන් සඳහා}$$

10. ආරෝහණ පටිපාටියට සැකසූ, පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ හතෙහි මධ්‍යස්ථය, මාතය හා මධ්‍යන්‍යය පිළිවෙළින් 5, 7 හා 5 වේ:

$$1, 3, 4, p, q, r, s$$

මෙහි p, q, r හා s තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

p, q, r හා s හි අගයන් සොයා, නිරීක්ෂණ හතෙහි විචලනය $\frac{38}{7}$ බව පෙන්වන්න.

$$\text{මධ්‍යස්ථය} = 5.$$

$$\therefore p = 5. \leftarrow (5)$$

$$\text{මාතය} = 7.$$

$$\therefore q, r, s \text{ වලින් අඩු තරමින් දෙකක්වත් 7 ඒවා විය යුතු ය.} \leftarrow (5)$$

ඒවායින් 2ක් 7 ඒවා යැයිද, අනෙක් එක a යැයිද ගනිමු.

$$\text{මධ්‍යන්‍යය} = 5$$

$$\therefore 5 = \frac{1+3+4+5+7+7+a}{7} \leftarrow (5)$$

$$35 = 27 + a$$

$$\therefore a = 8.$$

$$\text{එනම්, } q = r = 7 \text{ හා } s = 8. \quad (5)$$

$$\text{විචලනය} = \frac{1}{7}[(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + 2(7-5)^2 + (8-5)^2]$$

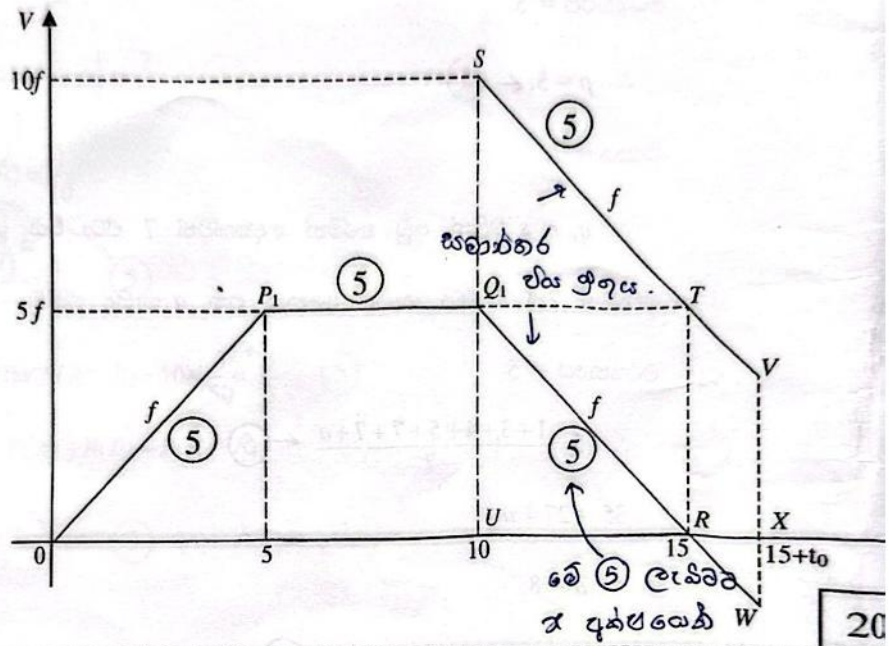
$$= \frac{1}{7}[16+4+1+8+9] = \frac{38}{7}. \quad (5)$$

11. (a) සෘජු මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට කාලය $t = 0$ s හිදී නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන P මෝටර් රථයක් $f \text{ m s}^{-2}$ නියත ත්වරණයකින් තත්පර 5 ක් ගමන් කරයි. පසුව එය $t = 5$ s හිදී ලබාගත් නියත වේගයෙන් නවත් තත්පර 5 ක් ගමන් කර $t = 10$ s හිදී $f \text{ m s}^{-2}$ ක නියත මන්දනයකින් මන්දනය වී A ලක්ෂ්‍යයකදී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එසැණින් තම දිශාව වෙනස් කරන P මෝටර් රථය $f \text{ m s}^{-2}$ නියත ත්වරණයෙන්ම එම මාර්ගයේම නැවත O දෙසට ගමන් කරයි.

එම මාර්ගයේම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $t = 10$ s හිදී $10f \text{ m s}^{-1}$ ක ආරම්භක වේගයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන Q මෝටර් රථයක් $f \text{ m s}^{-2}$ නියත මන්දනයෙන් P මෝටර් රථය දෙසට ගමන් කරයි. A ලක්ෂ්‍යයේදී P නිශ්චලතාවයට පත්වන විට, P හා Q අතර දුර 125 m බව දී ඇත. එකම රූපසටහනක P හා Q හි චලිත සඳහා, $t = 0$ s සිට ඒවා මුණගැසෙන මොහොත දක්වා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

(i) $f = 10$,

(ii) P හා Q මෝටර් රථ $t = 17.5$ s හිදී මුණගැසෙන බව පෙන්වන්න.



A වෙත ළඟා වීමට P ගනු ලැබූ කාලය = 15 s

$t = 10$ s සිට $t = 15$ s දක්වා Q ගමන් කළ දුර

$$= \text{STRU වර්ගඵලය} = \frac{1}{2}(SU + TR) \times UR$$

$$= \frac{1}{2}(10f + 5f) \times 5$$

$$= \frac{75}{2} f \text{ m}$$

O සිට A දුර = $OPQR$ වර්ගඵලය

$$= \frac{1}{2} \times (5 + 15) \times 5f = 50f \text{ m}$$

$$\text{දත්තයෙන් : } 125 = 50f - \frac{75}{2} f$$

$$250 = 25f$$

$$\therefore f = 10$$

$t = (15 + t_0)s$ හිදී P හා Q හමු වන්නේ යැයි සිතමු.

ඔවුන් හමුවන්නේ $RTVX$ වර්ගඵලය + RWX වර්ගඵලය = 125 විටය. (5)

එනම් $RTVW$ වර්ගඵලය = 125 විටය.

$$TR \times RX = 125 \quad (5)$$

$$5f \times t_0 = 125 \quad (5)$$

$$50 \times t_0 = 125$$

$$\therefore t_0 = \frac{125}{50} = 2.5s \quad (5)$$

$\therefore P$ හා Q හමුවන්නේ $t = (15 + 2.5)s$ විටය.

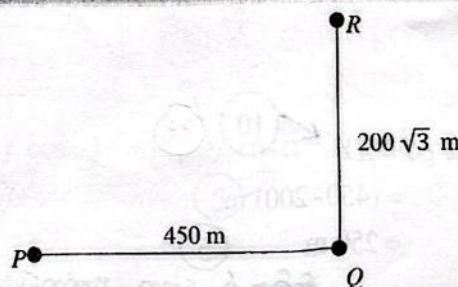
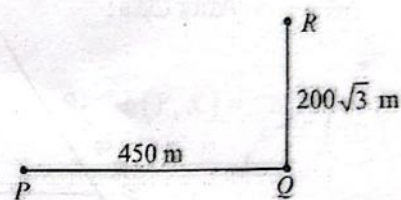
$$= 17.5s. \quad (5)$$

25

(b) P , Q සහ R බෝට්ටු තුනක් සරල රේඛීය පථවල ඒකාකාර වේගවලින් ගමන් කරයි. එක්තරා මොහොතකදී P බෝට්ටුවෙන් 450 m දුරක් නැගෙනහිරින් Q බෝට්ටුව පිහිටන අතර Q බෝට්ටුවෙන් $200\sqrt{3}$ m දුරක් උතුරින් R බෝට්ටුව පිහිටයි (රූපය බලන්න). P බෝට්ටුව, Q බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරන අතර Q බෝට්ටුව, R බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි.

P බෝට්ටුව තත්පර 45 කින් Q බෝට්ටුව හමුවන බවත්, Q බෝට්ටුව තත්පර 20 කින් R බෝට්ටුව හමුවන බවත් දී ඇත.

Q බෝට්ටුවට සාපේක්ෂව P බෝට්ටුවෙහි වේගය 10 m s^{-1} බව පෙන්වා Q බෝට්ටුව R බෝට්ටුව හමුවන මොහොතෙහිදී P බෝට්ටුව හා R බෝට්ටුව අතර දුර සොයන්න.



$$\underline{V}(P, Q) = \frac{450}{45} \text{ m s}^{-1} \rightarrow (10) = (5) + (5)$$

$$= 10 \text{ m s}^{-1} \rightarrow (5)$$

$\therefore Q$ ට සාපේක්ෂව P හි වේගය = 10 m s^{-1} . (5)

$$\underline{V}(Q, R) = \frac{200\sqrt{3}}{20} \text{ m s}^{-1} \uparrow (10) = (5) + (5)$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ m s}^{-1} \uparrow (5)$$

$$\frac{450}{45} = 10 \text{ m s}^{-1}$$

බ්‍රහ්මාණුක (15)

දෙන්නා

දිශාවට (5)

ප්‍රභව අවශ්‍යවේ

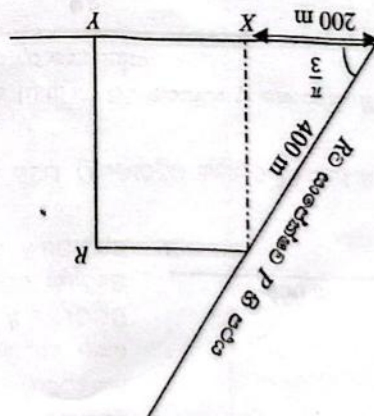
පිටපත් -

පිටපත් 6 සහ අනෙක් (5) 3

(5) = 250 m

= (450 - 200) m

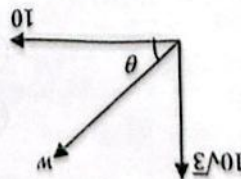
අවසන් දිග = XY (10) 100



After 20 s:

පිටපත් (5) $\theta = \frac{3}{\pi}$ →

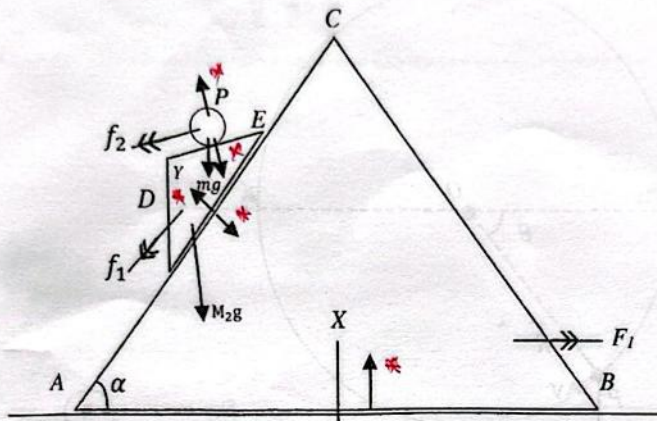
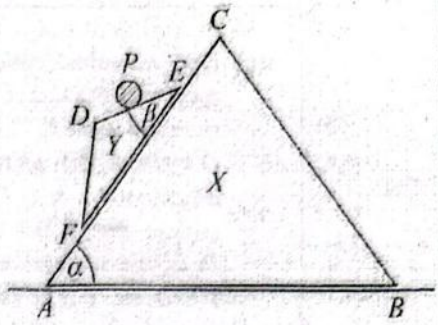
$$\tan \theta = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$



පිටපත් (5) $w = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 10^2} = 20 \text{ ms}^{-1}$

(5) $\bar{V}(P, R) = \bar{V}(P, Q) + \bar{V}(Q, R)$

12. (a) X, Y සුමට ඒකාකාර කුඳ්ඳු දෙකක හා P අංශුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් තරස්කඩ, රූපයෙන් දැක්වේ. AC, DE හා EF රේඛා එවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $\angle BAC = \alpha$ හා $\angle DEF = \beta (< \alpha)$ වේ. ස්කන්ධය M_1 වූ X කුඳ්ඳුයේ AB අයත් මුහුණත සුමට තිරස් මෙසයක මත තබා ඇත. ස්කන්ධය M_2 වූ Y කුඳ්ඳුයේ EF අයත් මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත මත තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුව DE මත තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. Y කුඳ්ඳුය එහි EF මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත ස්පර්ශ කරමින් චලනය වන හා P අංශුව DE ස්පර්ශ කරමින් චලනය වන අතරතුර, X කුඳ්ඳුයේ ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



$$a(X, E) = F_1 \rightarrow$$

$$a(Y, X) = \frac{f_1}{M_2} \quad \text{නවරස 3ව සඳහා} \quad (10/100)$$

$$a(P, Y) = \frac{f_2}{m} \quad \text{නවරස 3ව සඳහා} \quad (10/100)$$

$F = ma$ යොදමු :

පද්ධතිය සඳහා $\rightarrow$:

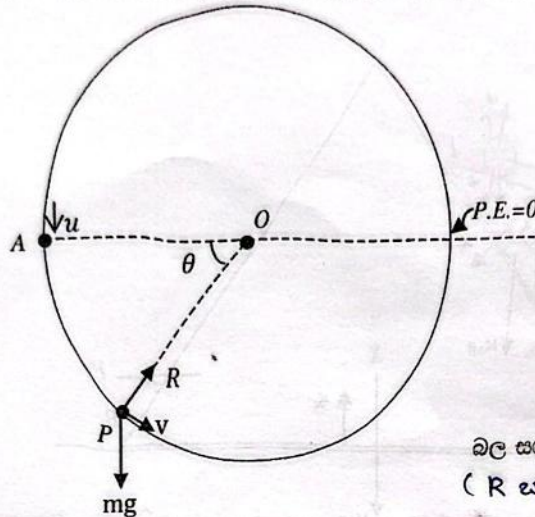
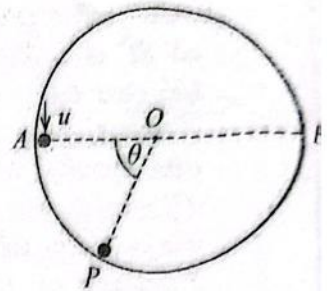
$$0 = M_1 F_1 + M_2 (F_1 - f_1 \cos \alpha) + m (F_1 - f_1 \cos \alpha - f_2 \cos(\alpha - \beta)). \quad (10/100) \quad \text{මුළු සමතුලිත නවරස}$$

Y හා P සඳහා $\nearrow$:

$$(M_2 + m) g \sin \alpha = M_2 (f_1 - F_1 \cos \alpha) + m (f_1 + f_2 \cos \beta - F_1 \cos \alpha). \quad (10/100) \quad \text{මුළු සමතුලිත නවරස}$$

P සඳහා $\nearrow$:

$$mg \sin(\alpha - \beta) = m (f_2 + f_1 \cos \beta - F_1 \cos(\alpha - \beta)). \quad (10/100) \quad \text{මුළු සමතුලිත නවරස}$$

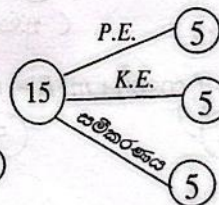


බල සඳහා (5)
(R භ්‍යන්තර බලය)

ශක්ති සංස්ථිතියෙන් :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mga \sin \theta$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2ga \sin \theta \quad (5)$$



(m)  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} :$

$$R - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{a} \quad (10)$$

$$\therefore R = \frac{m}{a}(u^2 + 2ga \sin \theta) + mg \sin \theta \quad (5) \quad \text{ସ୍ପଷ୍ଟ ହେଉଅଛି}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6} \text{ ଯିଠି } R=0 \text{ ଚିହ୍ନି. } \textcircled{5}$$

$$\therefore 0 = \frac{m}{a} \left(u^2 + 2ga \sin \frac{7\pi}{6} \right) + mg \sin \frac{7\pi}{6} \quad (5)$$

$$\therefore 0 = u^2 + 2ga \left(-\frac{1}{2} \right) + ga \left(-\frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

$$\therefore u^2 = \frac{3ga}{2}$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{3ga}{2}} \quad (5)$$

35

$$X = x - \frac{5a}{3} \text{ යැයි ගනිමු.}$$

$$\text{එවිට } \dot{X} = \dot{x} \text{ හා } \ddot{X} = \ddot{x}. \quad (5)$$

$$\text{දැන් (1) } \ddot{X} + \omega^2 X = 0 \text{ බවට පත් වේ.} \quad (5)$$

10

$$\text{කේන්ද්‍රයේදී } \ddot{X} = 0.$$

$$X = 0. \quad (5)$$

$$\therefore x = \frac{5a}{3}. \quad (5)$$

$$x = 3a \text{ විට } \dot{x} = 0.$$

$$\therefore \text{විස්ථාරය} = 3a - \frac{5a}{3} = \frac{4a}{3}. \quad (5)$$

$$\text{ආවර්ථ කාලය} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}. \quad (5)$$

20

$$\dot{X}^2 = \omega^2 (C^2 - X^2)$$

$$\text{උපරිම වේගය ලැබෙන්නේ } X = 0 \text{ විටය.}$$

$$\text{උපරිම } \dot{X}^2 = \omega^2 C^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{උපරිම } \dot{X}^2 &= \frac{3g}{2a} \cdot \left(\frac{4a}{3}\right)^2 \\ &= \frac{3g}{2a} \cdot \frac{16a^2}{9} = \frac{8}{3} ag \quad (5) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{උපරිම වේගය} = \sqrt{\frac{8ag}{3}}. \quad (5)$$

15

ගුරුත්වය යටතේ A සිට O දක්වා චලිතය

$$v^2 = u^2 + 2as:$$

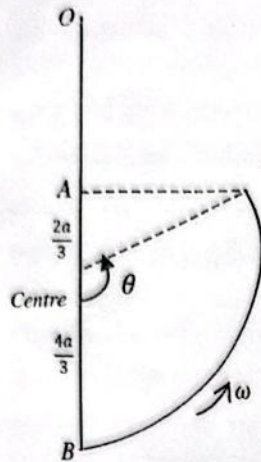
$$v^2 = 2ag - 2ga \quad \leftarrow \text{සමස්ත යෙන් ලබා ගත හැකිය}$$

$$= 0 \quad (5)$$

$$\therefore v = 0.$$

$$\therefore P \text{ යන්නේ O වෙත ළඟ වේ.} \quad (5)$$

10



B සිට A දක්වා කාලය = T_1 .

$$\text{එවිට } T_1 = \frac{\theta}{\omega} \quad (5)$$

$$\theta = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ (10) ද දෙන්න $\rightarrow \frac{2\pi}{3}$ (5)

diagram එහි ලකුණු තබා ගත් දෙන්න. $\therefore T_1 = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3g}} \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (5)$

A සිට O දක්වා කාලය = T_2 .

$$v = u + at :$$

$$0 = \sqrt{2ag} - gT_2. \quad (5) \text{ Apply කරනවා}$$

$$\therefore T_2 = \sqrt{\frac{2a}{g}} \quad (5)$$

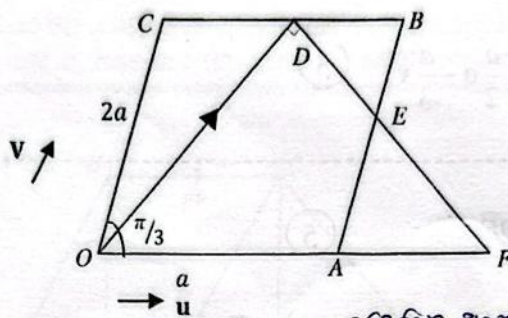
$\therefore$ B සිට O දක්වා මුළු කාලය = $T_1 + T_2 \leftarrow (5)$

$$= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3g}} \cdot \frac{2\pi}{3} + \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{27g}} (2\pi + 3\sqrt{3}). \quad (5)$$

P එහි ස්වභාවික දිගෙන් $2a$ දුරක් ඇඳිය යුතු ය.

- 14.(a) $OA = a$, $OC = 2a$ හා $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ වන $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ගනිමු. u හා v යනු පිළිවෙළින් $\vec{OA}$ හා $\vec{OC}$ දිශාවලට වූ ඒකක දෛශික යැයි ද ගනිමු.
 $\vec{OD} = \frac{1}{2}au + 2av$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.
 OD යන න DE ට ලම්භ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු.
 $\vec{DE} = \frac{a}{2}u - \frac{a}{3}v$ බව පෙන්වන්න.
 OA හා DE දික්කඳු රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. $\vec{OF} = \frac{7a}{2}u$ බව පෙන්වන්න.



දෛශික ආකූලනය

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} \quad (5)$$

$\vec{OC} \perp$ ඇතුළත් කිරීම

$$= 2av + \frac{1}{2}au \quad (5) + (5) \quad \vec{CD} \perp$$

$\vec{CD}$ ඇතුළත් කිරීම.

$$= \frac{1}{2}au + 2av \quad (5)$$

20

$$\vec{DE} = \vec{DO} + \vec{OA} + \vec{AE}$$

$$= -\frac{1}{2}au - 2av + au + \lambda v = \frac{1}{2}au + (\lambda - 2a)v \quad (10) \quad \text{100}$$

$\vec{AE}$ තෙත් ඡායාරූපය සමඟ ලියා ඇත.

$$\vec{OD} \perp \vec{DE} \Rightarrow \vec{OD} \cdot \vec{DE} = 0 \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{2}au + 2av\right) \cdot \left(\frac{1}{2}au + (\lambda - 2a)v\right) = 0 \quad (5) \quad \text{ආදේශනය}$$

$$\frac{1}{4}a^2 \underbrace{u \cdot u}_{=1} + \frac{1}{2}a(\lambda - 2a) \underbrace{u \cdot v}_{=\frac{1}{2}} + a^2 \underbrace{v \cdot u}_{=\frac{1}{2}} + 2a(\lambda - 2a) \underbrace{v \cdot v}_{=1} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}(\lambda - 2a) + \frac{1}{2}a + 2(\lambda - 2a) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{9\lambda}{4} = 4a - \frac{3}{4}a + \frac{2a}{4}$$

$$\frac{9\lambda}{4} = 4a - \frac{a}{4}$$

$$\lambda = \frac{15}{9}a = \frac{5}{3}a. \quad (5)$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + \left(\frac{5a}{3} - 2a\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF} \quad (5)$$

$$(5) \quad \mu\mathbf{u} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v} + \beta\left(\frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v}\right) \quad (5)$$

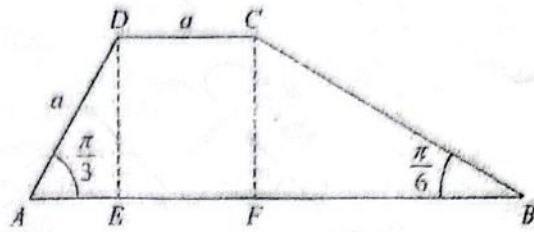
$$\mu = \frac{1}{2}a + \beta\frac{a}{2} \quad \text{හා} \quad 0 = 2a - \frac{\beta a}{3} \quad (5) + (5)$$

සමකරණ 20

$$\therefore \beta = 6 \quad \text{හා} \quad \mu = \frac{7a}{2}$$

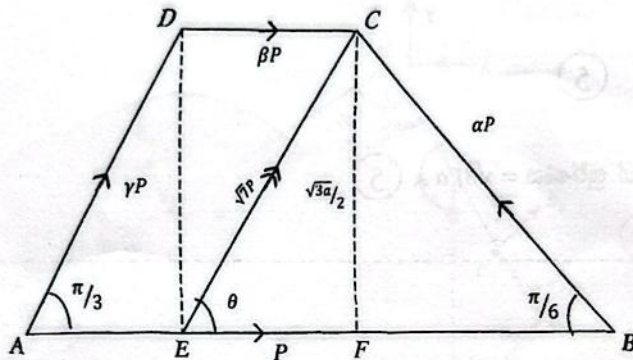
$$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{7a}{2}\mathbf{u}. \quad (5)$$

(b) AB හා DC සමාන්තර ද $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$
හා $AD = DC = a$ ද වන $ABCD$ ක්‍රමිකයකින් යුතු
ගතිමි. $\angle AED = \angle AFC = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි AB මත P
ලක්ෂ්‍ය E හා F වේ (රූපය බලන්න). විශාලත්ව
 P , αP , βP හා γP වූ බල පිළිවෙළින් AB , BC , DC
හා AD දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන
දිශාවලට ක්‍රියාකරයි.



එවිට සමීප්‍රයුක්ත බලය $\sqrt{7}P$ විශාලත්වයකින් යුත් බව හා එය E හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා E සිට C දක්වා
යන බව ද දී ඇත. α , β හා γ හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, පද්ධතියට බල යුග්මයක් එකතු කරනු ලබන්නේ නම් පද්ධතියේ සමීප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා මධ්‍යය F ලක්ෂ්‍යය
හරහා යන පරිදි ය, එකතු කළ බල යුග්මයෙහි ස්පර්ෂකය සොයන්න.



$$\curvearrowleft C \left(\frac{\gamma P}{2} + P \right) \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{\gamma P \sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{2} + a \right) = 0 \quad (10) \quad / \infty$$

$$\frac{\gamma}{2} + 1 - \frac{3\gamma}{2} = 0$$

$$\gamma = 1. \quad (5)$$

$$\uparrow \gamma P \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha P \frac{1}{2} = \sqrt{7} P \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad (10) \quad / \infty$$

ඒ නිසා ඇති වන බලය නිවැරදි කර (10) දෙක

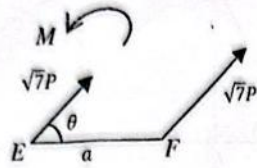
$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \sqrt{3}. \quad (5)$$

$$\rightarrow P + \beta P + P \times \frac{1}{2} - \sqrt{3} P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{7} P \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \quad (10) \quad / \infty$$

$$\beta = 2. \quad (5)$$

45



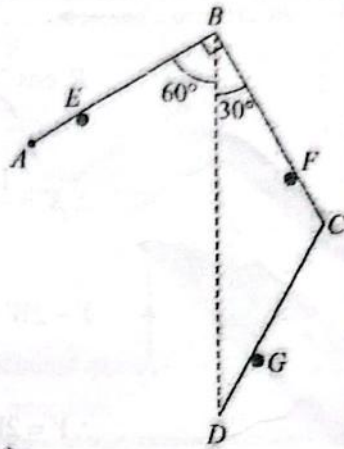
$$\sum F \curvearrowright \sqrt{7}Pa \sin \theta - M = 0 \quad (5)$$

$$M = \sqrt{7}Pa \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$= \sqrt{3}Pa \quad (5)$$

$$\text{යුග්මයේ ස්පර්ශය} = \sqrt{3}Pa \quad (5)$$

15. (a) $4a$ සමාන දිගින් හා W සමාන බරින් යුත් AB, BC හා CD එකතුව දඩු තුනක් B හා C අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. A අන්තය අවල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසවු කර ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $AE = CF = DG = a$, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$ හා BD සිරස් වන පරිදි දඩු තුන සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ E, F හා G සුමට නාදැති තුනක් මත තැබීමෙනි.



(i) G නාදැත්ත මගින් CD දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ

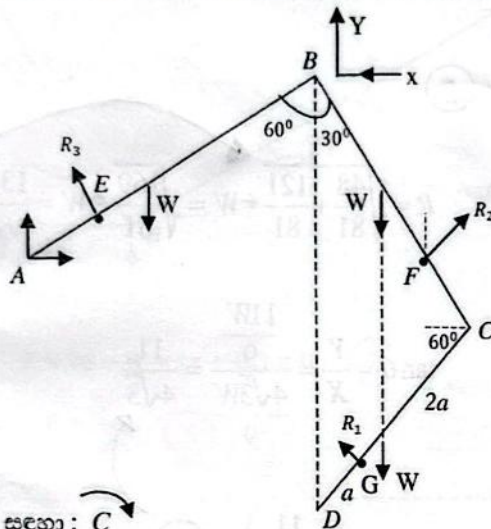
විශාලත්වය $\frac{W}{3}$ බව ද,

(ii) F නාදැත්ත මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ

විශාලත්වය $\frac{11W}{9}$ බව ද,

පෙන්වන්න.

AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.



⑤ බල සඳහා
(A වල ප්‍රතික්‍රියා නැර,
B හි X හා Y නැර
ඉතිරි බල.)

(i) DC දණ්ඩය සඳහා: $\curvearrowright C$

$$R_1 \times 3a - W \times 2a \cos 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$R_1 = \frac{W}{3} \quad (5)$$

15

(ii) BCD සඳහා: $\curvearrowright B$

$$R_2 \times 3a - 2 \times W \times 2a \sin 30^\circ - R_1 \cos 30^\circ \times 7a \cos 30^\circ + R_1 \sin 30^\circ \times a \sin 30^\circ = 0 \quad (10)$$

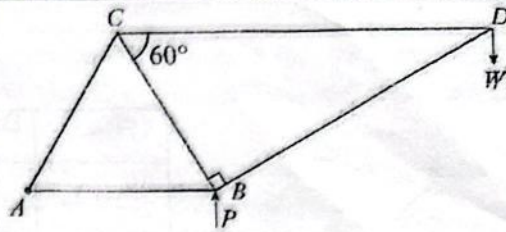
$$3R_2 = 2W + \frac{W}{3} \times 7 \times \frac{3}{4} - \frac{W}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2W + \frac{20W}{12}$$

$$\therefore R_2 = \frac{11W}{9} \quad (5)$$

15

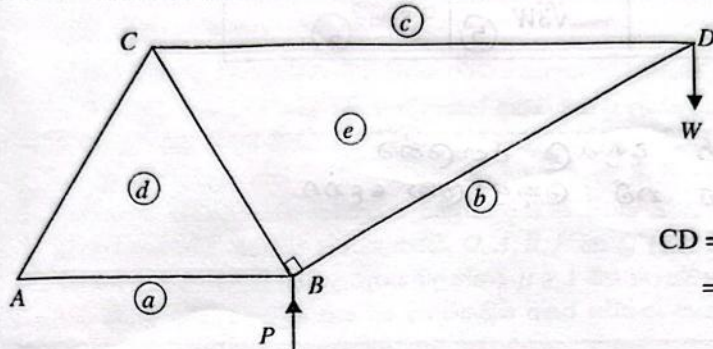
(b) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තඃප්ලේ සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CA, CD හා DB සැහැල්ලු දඬු පහතින් සමන්විත වේ. $AB = BC = CA = 2a$, $\angle CBD = 90^\circ$ හා $\angle BCD = 60^\circ$ බව දී ඇත. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හිදී අවල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර AB තිරස්ව තිරස් කලයක සම්බලිතව තබා ඇත්තේ එයට B සන්ධියෙහිදී තිරස්ව උඩු අතට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බවේ අංකනය භාවිතයෙන් D, C හා B සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නමින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

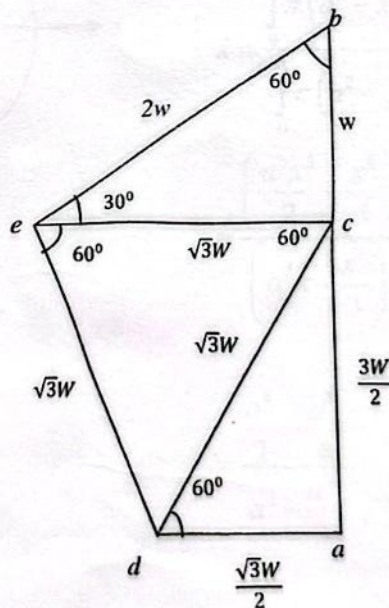


$$CD = 2a \sec 60^\circ = 4a$$

$$\uparrow A) \quad P \times 2a - W \times (a + 4a) = 0 \quad (5)$$

$$\therefore P = \frac{5W}{2} \quad (5)$$

10



ඔබේ යකඩ (10) බැහැර

30

* P වැරදි වුවහි
හැඩය වෙනස් වූ නොමැති
නම් ලකුණු ලබා දෙන්න.

* ඔබ 30 වෙන වෙනම
යටහන් ඇඳ ඇත්නම්
ල. (10) දෙන්න.

30

දෘශ්‍ය	විශාලත්වය	ආතතිය/තෙරපුම
AB	$\frac{\sqrt{3}W}{2}$ (5)	තෙරපුම (5)
BD	2W (5)	තෙරපුම (5)
DC	$\sqrt{3}W$ (5)	ආතතිය (5)
CA	$\sqrt{3}W$ (5)	ආතතිය (5)
BC	$\sqrt{3}W$ (5)	තෙරපුම (5)

(50)

P වැරදි වුවත් දැමුවේ වශාලත්වය
වෙනස් නොවේ නම් ලකුණු ලබා දෙන්න.

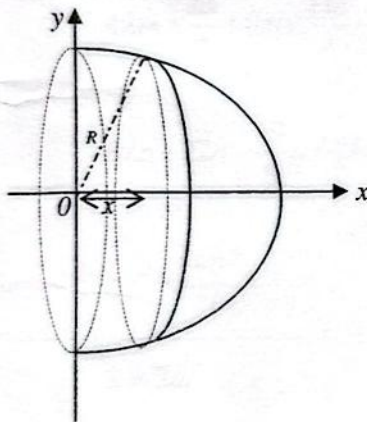
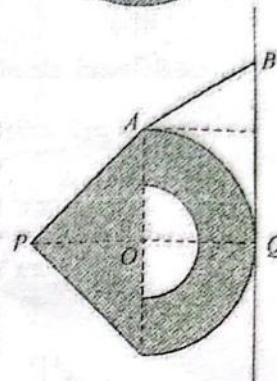
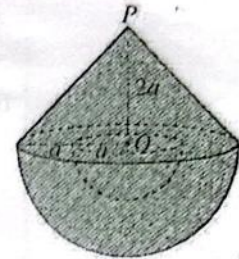
16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන සාදු-වාත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් අරය $2a$, කේන්ද්‍රය O හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, පතුලෙහි අරය $2a$ හා උස $2a$ වූ ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන සාදු වාත්තාකාර කේතුවක් අර්ධ ගෝලයෙහි ඉතිරි කොටසට යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති ආකාරයට දෘඪ ලෙස සවි කර ඇත. මෙලෙස සාදාගනු ලැබූ S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, P සිට $\frac{(48\lambda + 157)}{8(4\lambda + 7)}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි P යනු S හි ඝන කේතුවෙහි ශීර්ෂය වේ.

S හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O හි පිහිටීම සඳහා λ හි අගය සොයන්න.

දැන්, λ ව මෙම අගය ඇතුළු සිතමු.

Q යනු දික්කළ PO රේඛාව S හි පිටත අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හමුවන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. තව ද, A යනු S හි වාත්තාකාර දාරය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අවල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ ඇති සැතැල්ලු අවිභ්‍රත තන්තුවක ආධාරයෙනි. සමතුලිත පිහිටුමේදී S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය Q ලක්ෂ්‍යයෙහිදී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. O, A, B, P හා Q ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්භ සිරස් තලයක පිහිටයි (යාබද රූපය බලන්න). $\mu \geq 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය හා බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.



සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

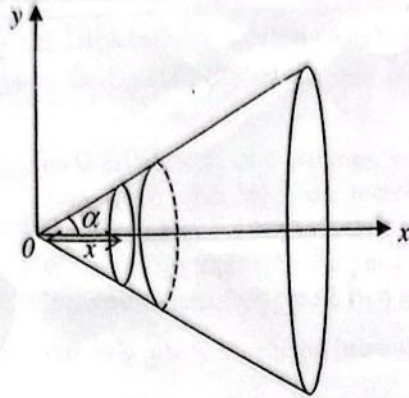
$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2) \rho x dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2) \rho dx} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a}{\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{3a}{8} \quad (5)$$



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha \cdot \rho x dx}{\int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha \cdot \rho dx} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_0^h}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^h} \quad (5)$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4} \quad (5)$$

$\therefore$ පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට OG දුර

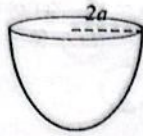
$$= h - \frac{3h}{4} \quad (5)$$

$$= \frac{h}{4}$$

60

සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O හා P යන කරන රේඛාව මත පිහිටයි. (5)

5

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධය P හි දී
	$\frac{1}{3}\pi(2a)^2 2a\lambda\rho$ $=\frac{8}{3}\pi a^3\lambda\rho = 4\lambda m$	$\frac{3}{4}(2a) = \frac{3a}{2}$
	$\frac{2}{3}\pi(2a)^3\rho$ $=\frac{16}{3}\pi a^3\rho = 8m$	$2a + \frac{3}{8}(2a)$ $=\frac{11a}{4}$
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho = m$	$2a + \frac{3a}{8}$ $=\frac{19}{8}a$
S	$(4\lambda + 7)m$	$\bar{x}$

35

මෙහි $m = \frac{2}{3}\pi a^3\rho$.

$$4\lambda m \times \frac{3a}{2} + 8m \times \frac{11a}{4} - m \times \frac{19a}{8} = (4\lambda + 7)m \times \bar{x} \quad (10) / (100)$$

$$6\lambda a + 22a - \frac{19}{8}a = (4\lambda + 7)\bar{x}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{(48\lambda + 157)}{8(4\lambda + 7)}a. \quad (5)$$

55

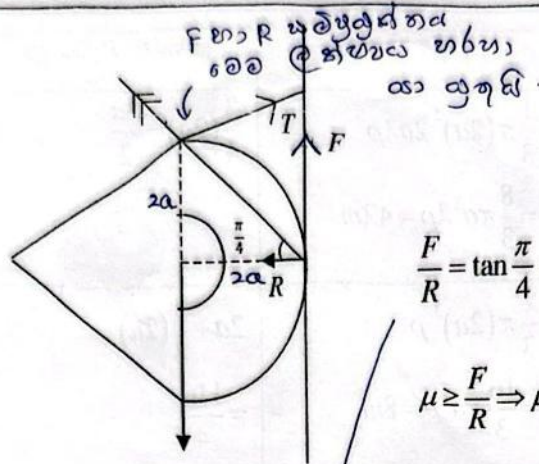
$$\bar{x} = 2a. \quad (5)$$

$$\frac{48\lambda + 157}{8(4\lambda + 7)}a = 2a \quad (5)$$

$$\therefore 48\lambda + 157 = 64\lambda + 112$$

$$\therefore \lambda = \frac{45}{16}. \quad (5)$$

15



$$\frac{F}{R} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad (15) \quad \frac{F}{R} = 1 \quad \text{වට}$$

ගෙන ආත්තව
(15) ව දෙන්න.

$$\mu \geq \frac{F}{R} \Rightarrow \mu \geq 1. \quad (5)$$

→ හා ඒ වෙනුවෙන් → (5)

දිශාභේදනය වටා ප්‍රති
ගැලීමට → (5)

$\frac{F}{R}$ වැඩි නොවන පරිදි
ගැලීමට → (5)

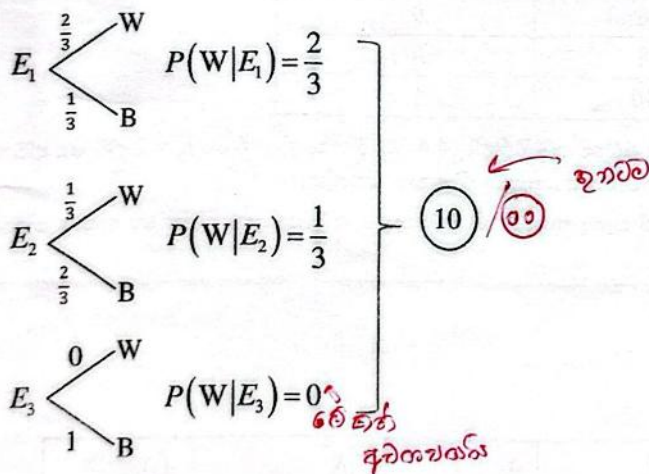
17.(a) පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම් සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියක අඩංගු වේ. බෝල 3 ක් B_2 පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස, හිස් B_2 පෙට්ටියකට මාරු කරනු ලැබේ. ඉන්පසු B_2 පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට වීමේ,

(ii) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවත ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට බව දී ඇති විට, B_1 පෙට්ටියෙන් B_2 පෙට්ටිය තුළට සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 1 ක් මාරු කර තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

B_1 න් ඉවතට ගත බෝල 3 න් i බෝල කළු පාට වීමේ සිද්ධිය E_i යැයි ගනිමු; $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \text{එවිට, } P(E_1) &= \frac{{}^3C_1 {}^2C_2}{{}^5C_3} = \frac{3}{10}, & (10) \\ P(E_2) &= \frac{{}^3C_2 {}^2C_1}{{}^5C_3} = \frac{6}{10}, & (10) \\ P(E_3) &= \frac{{}^3C_3}{{}^5C_3} = \frac{1}{10}. & (10) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{අගයන් 30} \\ \text{ලකුණු දෙක} \end{array}$$



මුළු සම්භාවිතා නියමයෙන් :

$$P(W) = P(W|E_1)P(E_1) + P(W|E_2)P(E_2) + P(W|E_3)P(E_3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} + 0 \times \frac{1}{10} \quad (10) \quad \text{ඉවහර නැත.}$$

$$= \frac{2}{5} \quad (5)$$

බේස් ප්‍රමේය :

$$P(E_1|W) = \frac{P(W|E_1) \cdot P(E_1)}{P(W)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(10) / (20)

විච්ඡේද අනුව නිවැරදි නම් දෙක.

(5)

වේලාව 7.5.

15

(b) සිසුන් 20 දෙනෙකු ප්‍රවේශිකාවක් විසඳීම සඳහා ගත් කාලයන් එම එක් එක් කාලයෙන් 10 ක් අඩුකර ඉන්පසු 2 න් බෙදීම මගින් කේත කර ඇත.

සංඛ්‍යාත 2 ක් අනුරූද්ධත් වූ කේත කළ දත්තයන්හි සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දී ඇත:

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 - 2	2
2 - 4	f_1
4 - 6	9
6 - 8	f_2
8 - 10	1

කේත කළ කාලයන්හි නිමානය කළ මධ්‍යන්‍යය මිනිත්තු 4.4 බව දී ඇත. $f_1 = 6$ හා $f_2 = 2$ බව පෙන්වන්න. කේත කළ කාලයන්හි සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

දැන්, ප්‍රවේශිකාව විසඳීම සඳහා ගත් සැබෑ කාලයන්හි මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0 - 2	2	1	2	2
2 - 4	f_1	3	$3f_1$	$9f_1 = 54$
4 - 6	9	5	45	225
6 - 8	f_2	7	$7f_2$	$49f_2 = 98$
8 - 10	1	9	9	81
			$56 + 3f_1 + 7f_2$	460

$$12 + f_1 + f_2 = 20$$

$$\therefore f_1 + f_2 = 8 \quad (1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{\sum_{i=1}^5 f_i} = \frac{56 + 3f_1 + 7f_2}{20} = 4.4 \quad (10)$$

(56 වැඩි කම් 10න් 5ක් දෙක)

$$\therefore 3f_1 + 7f_2 = 32 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f_1 = 6 \text{ and } f_2 = 2 \quad (5)$$

25

$$\text{සම්මත අපගමනය} = \sqrt{\frac{460}{20} - (4.4)^2}$$

for 460

$$= \sqrt{3.64} \quad (5)$$

$$\approx 1.91 \text{ අවමන් නැති.}$$

$$\text{මාන පරාස} : 4 - 6$$

$$\text{මානය} = L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

$$= 4 + \left(\frac{9 - 6}{(9 - 6) + (9 - 2)} \right) \times 2 \quad (5)$$

$$= 4 + \left(\frac{3}{3 + 7} \right) \times 2$$

$$= 4.6 \quad (5)$$

30

y යනු සැබෑ කාලය යැයි ගනිමු.

එවිට, $x = \frac{y-10}{2}$.

$$\therefore y = 2x + 10. \quad (5)$$

$$\bar{y} = 2\bar{x} + 10$$

$$\therefore \bar{y} = 2 \times 4.4 + 10$$

$$\text{සැබෑ මාධ්‍යය} = 18.8 \quad (5)$$

$$\sigma_y = 2\sigma_x \quad (5)$$

$$\text{සැබෑ සම්මත අපගමනය} = 2 \times \sqrt{3.64} \approx 2 \times 1.91 = 3.82 \quad (5)$$

$$\text{සැබෑ මානය} = 2 \times 4.6 + 10$$

$$= 19.2 \quad (5)$$

