අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2025

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

I පත්‍රය

A කොටස	=	**10 × 25**	=	**250**
B කොටස	=	**05 × 150**	=	**750**

එකතුව $= \dfrac{1000}{10}$

අවසන් ලකුණ = **100**

A කොටස

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $9(2^n) < (n+3)!$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා ව.පැ. $= 9.2^1 = \underline{18}$ හා ද.පැ. $= 4! = \underline{24}$ බැවින් ව.පැ. $<$ ද.පැ. වේ.
උත්තර ප්‍රමාණයක්

$\therefore n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය k ගෙන, ප්‍රතිඵලය

$n=k$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $9 \cdot 2^k < (k+3)!$ වේ. 5

$\therefore 9 \cdot 2^{k+1} < 2 \cdot (k+3)!$ 5 දෙකෙන් × කිරීම

$$< (k+4)(k+3)!$$
$$= (k+4)!$$ 5 $(\because 2 < k+4)$
අවශ්‍ය

එබැවින් $9 \cdot 2^{k+1} < (k+4)!$ වේ.

ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n=k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

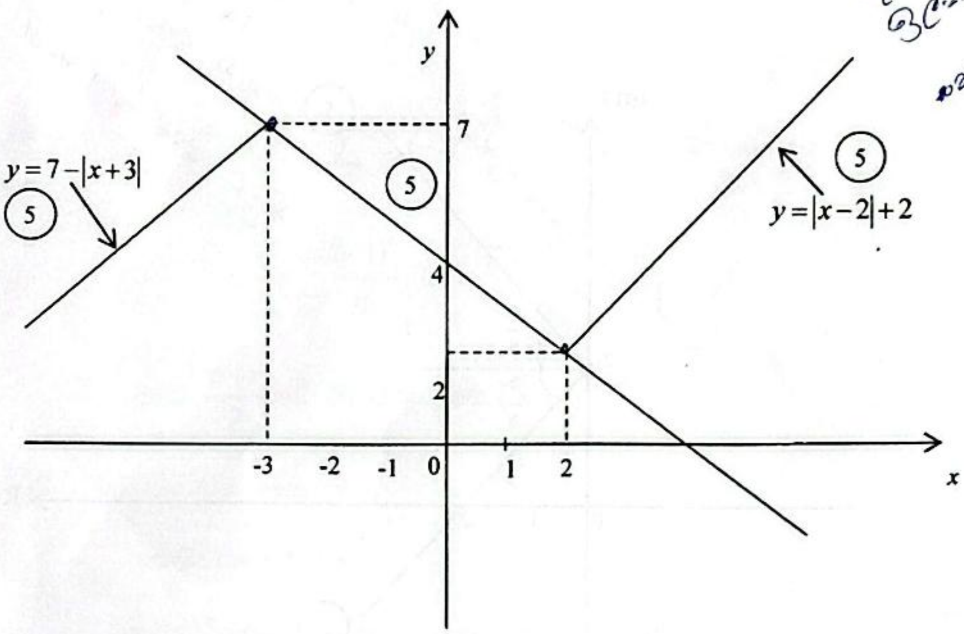
$n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය කර ඇත.

ඒ නයින්, ගණිතමය අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ප්‍රතිඵලය

සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහාම සත්‍ය වේ. 5

2. එකම රූප සටහනක $y=|x-2|+2$ හා $y=7-|x+3|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින්, $|x-2|+|x+3|=5$ සමීකරණය විසඳන්න.

10

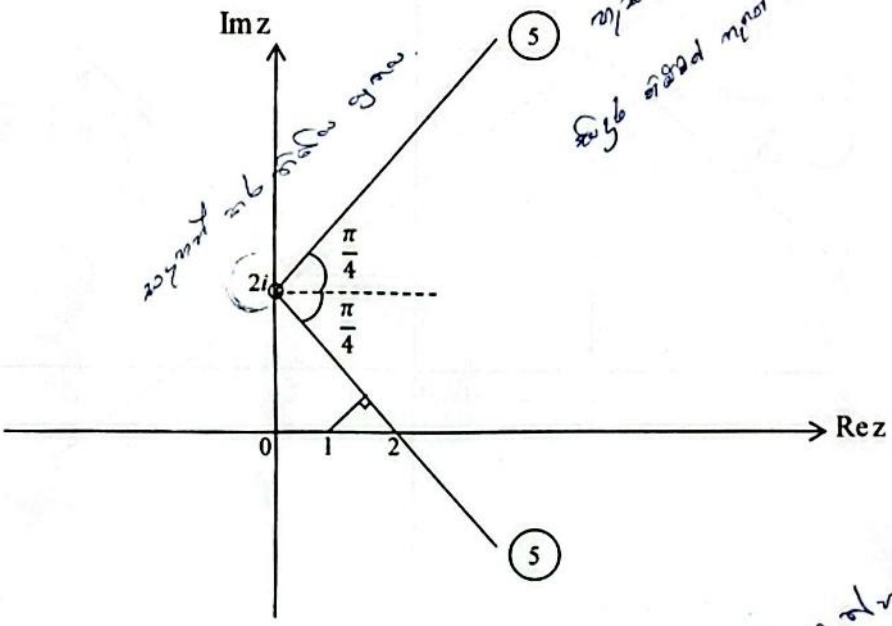


$|x-2|+|x+3|=5$

$\Leftrightarrow |x-2|+2=7-|x+3|.$ 5

රූප සටහනෙන්, $-3\le x\le 2.$ 5

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\left|\operatorname{Arg}(z-2i)\right| = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\left|\operatorname{Arg}(\overline{z}+2i)\right| = \frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සඳහා $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



$$\left|\operatorname{Arg}(\overline{z}+2i)\right| = \left|\operatorname{Arg}(\overline{z-2i})\right| = \left|\operatorname{Arg}(z-2i)\right| \quad (5)$$

$\therefore$ $\left|\operatorname{Arg}(\overline{z}+2i)\right| = \frac{\pi}{4}$ යන්න හා $\left|\operatorname{Arg}(z-2i)\right| = \frac{\pi}{4}$ යන්න එකම වේ.

අවශ්‍ය අවමය $= 1\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (10)

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ ඔත්තේ පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. $\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයෙහි x^2 පදයක් අන්තර්ගත වන බව දී ඇත. $n = 3$ බව පෙන්වා, x^2 හි සංගුණකය සොයන්න.

$$\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)^n = x^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n$$

$$= x^{\frac{n}{2}}\sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r(-1)^r \frac{x^{\frac{r}{2}}}{n^r}$$ (5) හෝ සාධාරණ පදය

දෙකෙන් ඕනෙම

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{n^r}\, {}^{n}C_r\, x^{\frac{n+r}{2}}$$

අපට $\frac{n+r}{2} = 2$ වීම අවශ්‍ය වේ. (5)

$\therefore n + r = 4.$

මෙයින් $n \leq 4$ ලැබේ.

$n \in \mathrm{Z}^+$ ඔත්තේ බැවින් $n = 1$ හෝ $n = 3$ විය යුතු ය. (5)

$n = 1$ නම් $r = 3$ වන අතර $r \leq n$ බැවින් මෙය විය නොහැක.

$n = 3$ නම් $r = 1$ වන අතර මෙය අවශ්‍යතා තෘප්ත කරයි.

$\therefore n = 3$. (5)

-1 ම තිබිය යුතුය.

x^2 හි සංගුණකය $= \frac{(-1)}{3}\,{}^{3}C_1 = -1.$ (5)

$\frac{3}{2}n - \frac{r}{2} = 2$

$3n - r = 4$

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r\,x^{\frac{r}{2}}.\frac{(-1)^{n-r}}{n^{n-r}}x^{n-r}$$ 5 හෝ සාධාරණ පදය

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^{n-r}}{n^{n-r}}\,{}^nC_r\,x^{n-\frac{r}{2}}$$

අපට $n-\frac{r}{2}=2$ වීම අවශ්‍ය වේ. 5

$\therefore r=2n-4.$

$r\le n$ බැවින් $n\le 4$ අපට ලැබේ.

$n\in Z^+$ ඔත්තේ බැවින් $n=1$ හෝ $n=3$ විය යුතුය. 5

$n=1$ නම් $r=-2$ වන අතර මෙය විය නොහැක.

$n=3$ නම් $r=2$ වන අතර මෙය අවශ්‍යතා තෘප්ත කරයි.

$\therefore n=3$. 5 නොද සහිතව $n=3$ ලිවීම

x^2 හි සංගුණකය $=\frac{(-1)}{3}\,{}^3C_2=-1.$ 5

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}=\dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} \quad (5)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{2x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\cos x}$$

(5)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{4\cos x} \quad (5) + (5)$$

$$\frac{\sin^3 x}{x^3}$$

$$=1\times 1^2\times\frac{2}{4} \quad (5)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

6. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $y = \left(e^{kx} - e^{-kx}\right)^2 \sqrt{e^{kx} + e^{-kx}}$, $y = 0$, $x = -\dfrac{1}{k}$ හා $x = \dfrac{1}{k}$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙ
x-අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමා
$\dfrac{2\pi}{5k}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)^5$ බව පෙන්වන්න.

$$\text{අවශ්‍ය පරිමාව} = \pi \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \left(e^{kx} - e^{-kx}\right)^4 \left(e^{kx} + e^{-kx}\right) dx \qquad 5$$

$$= 2\pi \int_{0}^{\frac{1}{k}} \left(e^{kx} - e^{-kx}\right)^4 \left(e^{kx} + e^{-kx}\right) dx$$

$u = e^{kx} - e^{-kx}$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට $\dfrac{du}{dx} = k\left(e^{kx} + e^{-kx}\right)$ වේ.

$x = \dfrac{1}{k}$ සඳහා $u = e - \dfrac{1}{e}$.

$x = 0$ සඳහා $u = 0$.

$$= 2\pi \int_{0}^{e-\frac{1}{e}} \frac{u^4}{k} du \qquad 5^{*}$$

$$= 2\pi \left.\frac{u^5}{5k}\right|_{0}^{e-\frac{1}{e}} \qquad 5^{*}$$

$$= \frac{2\pi}{5k}\left(e - \frac{1}{e}\right)^5. \qquad 5$$

$[f(x)]^n f'(x)$

$\dfrac{\left(e^{kx} - e^{-kx}\right)^5}{5k}$ සෘජුව ලියා තිබ්බොත් * 15 ම දෙන්න.

7. $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = e^t - 2e^{-t}$ හා $y = 2e^t + e^{-t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු.
$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}-1}{e^{2t}+2}$ බව පෙන්වන්න.
C වක්‍රයට එය මත $x = 1$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය සොයන්න.

$x = e^t - 2e^{-t}$ හා $y = 2e^t + e^{-t}$.

$\frac{dx}{dt} = e^t + 2e^{-t}$ හා $\frac{dy}{dt} = 2e^t - e^{-t}$. (5) දෙකටම

දැන්, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^t - e^{-t}}{e^t + 2e^{-t}}$

$= \frac{2e^{2t}-1}{e^{2t}+2}$. (5)

$x = 1$ විට $1 = e^t - 2e^{-t}$ වේ. (5)

එනම් $e^{2t} - e^t - 2 = 0$ වේ.

$\therefore (e^t+1)(e^t-2) = 0$

$\therefore e^t = 2 \quad (\because e^t + 1 > 0)$ (5)

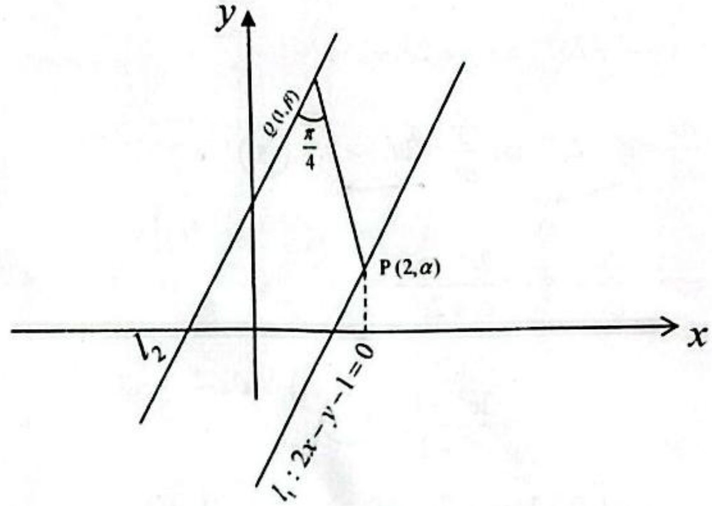
$\therefore t = \ln 2$.

$e^t = -1$ විය නොහැක
ලියා නැතිව $e^t = 2$ ලියා දක්වාම
ල. 5 දෙන්න.
$e^t = -1$ ලිය දක්වාම එය විය
නොහැකි බව ලියා තිබිය යුතුය

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\ln 2} = \frac{2 \times 2^2 - 1}{2^2 + 2} = \frac{7}{6}$. (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය අනුක්‍රමණය $= \frac{7}{6}$.

8. $P \equiv (2, \alpha)$ හා $Q \equiv (1, \beta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ. P ලක්ෂ්‍යය l_1: $2x - y - 1 = 0$ රේඛාව මත ද Q ලක්ෂ්‍යය, l_1 රේඛාවට සමාන්තර වූ l_2 සරල රේඛාව මත ද පිහිටා ඇත්තේ PQ හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි ය. α හා β හි අගයන් සොයන්න.



$P = (2, \alpha)$ ලක්ෂ්‍යය l_1 මත බැවින් $4 - \alpha - 1 = 0$ වේ.

$\therefore \alpha = 3.$ 5

PQ හි බෑවුම $= \alpha - \beta.$ දෙකටම 5

l_1 හා l_2 සමාන්තර බැවින් l_2 හි බෑවුම $= 2$ වේ.

PQ හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ බැවින්,

$$\left|\frac{\alpha - \beta - 2}{1 + 2(\alpha - \beta)}\right| = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \text{ වේ.}$$ 5

මෙය ලිව්වා
ලිය අත්හැර දෙන
ල. 5 ක් දෙන්න
| | නැත්නම්
ල. 5 නැත

$$\therefore |1 - \beta| = |7 - 2\beta|$$

$$\therefore 1 - \beta = 7 - 2\beta \text{ හෝ } 1 - \beta = -7 + 2\beta$$

$$\therefore \beta = 6 \quad \text{හෝ} \quad \beta = \frac{8}{3}.$$

5 5

9. අරය ඒකක 4 ක් වන, කේන්ද්‍ර $4x - 3y = 0$ රේඛාව මත පිහිටන හා $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරන වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය (a,b) යැයි ගනිමු.

එහි අරය = 4.

මෙම කේන්ද්‍රය $4x-3y=0$ මත බැවින් $4a-3b=0$ වේ. 5

$$\therefore b=\frac{4a}{3}.$$

මෙම වෘත්තය, $x^2+y^2=1$ වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරන බැවින්,

කේන්ද්‍ර අතර දූර = අරයයන්ගේ එකතුව විය යුතු ය. ---------(1)

$x^2+y^2=1$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය $(0,0)$ හා එහි අරය 1 වේ. 5 ← මෙ ජේදය ප්‍රමාණවත්..

දැන් (1) න් $\sqrt{a^2+b^2}=4+1$ අපට ලැබේ. 5

$$\therefore a^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=5^2$$

$\therefore a^2=9$ හා එබැවින් $a=\pm 3$ වේ. 5

$a=3$ විට $b=4$, හා $a=-3$ විට $b=-4$ වේ.

a ට එක අගයක් ලියා
b ට අදාළ වෘත්තයේ සමී.
ලියා ඇත්නම් 5 ක් දෙන්න

පිළිතුර :
$$\left.\begin{array}{l}(x-3)^2+(y-4)^2=16\\(x+3)^2+(y+4)^2=16\end{array}\right\}\ 5$$

$x^2-6x+9+y^2-8y+16=16$
$x^2+y^2-6x-8y+9=0$

$x^2+6x+9+y^2+8y+16=16$
$x^2+y^2+6x+8y+9=0$

10. $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ යන්න $R\sin(\theta-\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R>0$ හා $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ වේ.
ඒ නයින්, $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ ට එහි අවම අගය තිබෙන පරිදි වූ θ හි අගයන් සොයන්න.

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta = 2\left\{\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right\} \quad (5)$$

$$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta-\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\right\} \quad (5)$$

$$= 2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right). \quad (5)$$

$R=2$ හා $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ හි අවමය -2 වන අතර,

එය ලැබෙන්නේ $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ විටය. (5)

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta-\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right);\ \text{මෙහි } n\in\mathbb{Z}. \quad (5)$$

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{3}-(-1)^n\frac{\pi}{2};\ \text{මෙහි } n\in\mathbb{Z}.$$

B කොටස

11. (*a*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = x^2 - 2kx - k^2 - 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට ශුන්‍ය නොවන තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු $f(x) = 0$ හි මූල යැයි ද, $r = \dfrac{1}{2\alpha}$ හා $s = \dfrac{1}{2\beta}$ යැයි ද ගනිමු.

r හා s මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $4(k^2+1)x^2 + 4kx - 1 = 0$ බව හා $|r-s| = \dfrac{\sqrt{2k^2+1}}{k^2+1}$ බව පෙන්වන්න.

$y = x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ හා $y = x^3 + x^2 - x + 2$ හි ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක අතර තිරස් දුර $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) (i) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $(x-a)$ යන්න $p(x)$ බහුපදයක සාධකයක් නම්, $p(x) - (x-a)p'(x) = (x-a)^2 s(x)$ වන පරිදි $s(x)$ බහුපදයක් පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි $p'(x)$ යනු $p(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වේ.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = x^3 - \lambda x^2 - 2x - (x-2)(3x^2 + \mu x - 2)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-2)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව ද $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -3 බව ද දී ඇත. $\lambda = 1$ හා $\mu = -2$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (i) භාවිතයෙන්, $(x-2)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*a*) $$f(x) = x^2 - 2kx - k^2 - 1$$

විවේචකය $\Delta = (-2k)^2 - 4(-k^2-1)$ 5

$= 8k^2 + 4 > 0 \quad (\because k \in \mathbb{R})$

5 බෑ සා හිතා

$\therefore f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇත. 5

තවද, මූලවල ගුණිතය $= -(k^2+1) \neq 0.$

5

$\therefore \quad f(x) = 0$ හි මූල නිශ්ශුන්‍ය වේ. 5

$\boxed{25}$

r හා s මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $x^2-(r+s)x+rs=0$ වේ. --------- (1)

10

දැන් $r+s=\dfrac{1}{2\alpha}+\dfrac{1}{2\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}$. 5

$\alpha+\beta=2k$ හා $\alpha\beta=-(k^2+1)$ වේ.

5 5

$\therefore r+s=\dfrac{2k}{-2(k^2+1)}=-\dfrac{k}{(k^2+1)}$. 5

තවද $rs=\dfrac{1}{4\alpha\beta}=-\dfrac{1}{4(k^2+1)}$. 5

$\therefore$ (1), $x^2+\dfrac{k}{(k^2+1)}x-\dfrac{1}{4(k^2+1)}=0$ බවට පත්වේ.

එනම් $4(k^2+1)x^2+4kx-1=0$.

$|r-s|=\left|\dfrac{1}{2\alpha}-\dfrac{1}{2\beta}\right|=\dfrac{|\alpha-\beta|}{2|\alpha\beta|}$. --------- (2) 5

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(2k)^2+4(k^2+1)$ 5

$=8k^2+4$.

$\therefore|\alpha-\beta|=2\sqrt{2k^2+1}$. 5

(2) $\Rightarrow |r-s|=\dfrac{2\sqrt{2k^2+1}}{2(k^2+1)}=\dfrac{\sqrt{2k^2+1}}{(k^2+1)}$. 5

55

ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන්හි $x-$ ඛණ්ඩාංක

$x^3+9x^2+3x+1=x^3+x^2-x+2$ හි විසඳුම් වේ. 5

මෙයින් අපට $8x^2+4x-1=0$ ලැබේ.

මෙය $k=1$ විට $4(k^2+1)x^2+4kx-1=0$ ම වේ. 5

$\therefore$ අවශ්‍ය දුර $=|r-s|$; මෙහි $k=1$ වේ.

$=\dfrac{\sqrt{2+1}}{1+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 5

15

(*b*) (i) $(x-a)$ යනු $p(x)$ හි සාධකයක් යැයි ගනිමු.

එවිට $p(x)=(x-a)\,q(x)$; මෙහි $q(x)$ යනු බහුපදයකි. 5

$\therefore p'(x)=q(x)+(x-a)q'(x)$. 5

ඒ නයින්, $p(x)-(x-a)p'(x)=\cancel{p(x)}-\cancel{(x-a)q(x)}-(x-a)^2q'(x)$

$=-(x-a)^2q'(x)$ 5

$=(x-a)^2s(x)$; මෙහි $s(x)=-q'(x)$ යනු බහුපදයකි.

5

$\boxed{20}$

(ii) $g(2)=0 \Rightarrow 8-4\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=1.$ 5

5

$g(1)=-3 \Rightarrow 1-\lambda-2+3+\mu-2=-3 \Rightarrow \mu=-2$ 5

5

$\boxed{20}$

$p(x)=x^3-x^2-2x$ ලෙස ගන්න. එවිට $p'(x)=3x^2-2x-2$ වේ.

5

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0$

$\therefore g(x)=p(x)-(x-2)p'(x).$ 5

(i) න්, $g(x)=(x-2)^2q(x)$; මෙහි $q(x)$ යනු බහුපදයකි.

$\therefore (x-2)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. 5

$\boxed{15}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

(i) න්, $g(x)-(x-2)g'(x)=(x-2)^2s(x)$; මෙහි $s(x)$ බහුපදයකි. 5

$(-6x+2)$

$\therefore g(x)-(x-2)\left[\cancel{3x^2-2x-2}-(x-2)(6x-2)-\cancel{(3x^2-2x-2)}\right]=(x-2)^2s(x)$

5

$-6x+2$

$\therefore g(x)=(x-2)^2(s(x)+6x-2)$

$\Rightarrow (x-2)^2$ is a factor of $g(x)$ 5

$\boxed{15}$

---

12. (*a*) එකිනෙකින් වෙනස් පොත් පහක්, A, B හා C යන සිසුන් තිදෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත.

(i) A ට හරියටම පොත් 2 කුත්, B ට හරියටම පොත් 2 කුත් හා C ට හරියටම 1 පොතකුත්,

(ii) එක් එක් සිසුවාට අවම වශයෙන් 1 පොතක්

ලැබිය හැකි වෙනස් විධි ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{7r+4}{r(r+1)(r+2)}$, $f(r) = \dfrac{A}{r}$ හා $g(r) = \dfrac{B}{r+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = [f(r) - f(r+2)] + [g(r) - g(r+1)]$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{9}{2} - \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{5}{n+2}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{r=1}^{2n} U_r + m \sum_{r=1}^{n-1} U_{n-r} \right) = 18$ වන පරිදි m තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

(*a*) (i)

A	B	C
2	2	1

පිළිතුර $= {}^5C_2 \times {}^3C_2 \times {}^1C_1$ 5

5 5 5

$= \dfrac{5!}{2!3!} \times 3 \times 1 = 10 \times 3 = 30$ 5

25

(ii)

A	B	C	වෙනස් ආකාර ගණන
2	2	1	${}^5C_2 \times {}^3C_2 \times {}^1C_1 = 30$ (5)
2	1	2	${}^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^2C_2 = 30$ (5)
1	2	2	${}^5C_1 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 30$ (5)
3	1	1	${}^5C_3 \times {}^2C_1 \times {}^1C_1 = 20$ (5)
1	3	1	${}^5C_1 \times {}^4C_3 \times {}^1C_1 = 20$ (5)
1	1	3	${}^5C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_3 = 20$ (5)

$30\times3 + 20\times3$

150

150 [illegible] 35 [illegible]

මුළු වෙනස් ආකාර ගණන $= 90 + 60 = 150$. (5)

35

(*b*) $u_r = \dfrac{7r+4}{r(r+1)(r+2)},\ f(r) = \dfrac{A}{r},\ g(r) = \dfrac{B}{r+1}.$

$$u_r = [f(r) - f(r+2)] + [g(r) - g(r+1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{7r+4}{r(r+1)(r+2)} = \left(\frac{A}{r} - \frac{A}{r+2}\right) + \left(\frac{B}{r+1} - \frac{B}{r+2}\right) \quad (10)\ /0$$

$$\Leftrightarrow\ 7r+4 = A(r+1)(r+2) - (A+B)r(r+1) + Br(r+2)$$

$$\Leftrightarrow\ 7r+4 = (2A+B)r + 2A \quad \text{for } r \in \mathbb{Z}^+. \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 2A + B = 7 \text{ and } 2A = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad A = 2 \text{ and } \quad B = 3$$

(5) (5)

[illegible]

25

$$\therefore f(r)=\frac{2}{r} \quad \text{හා} \quad g(r)=\frac{3}{r+1}.$$

දැන්,

$$U_1 = f(1) - \cancel{f(3)} + g(1) - \cancel{g(2)}$$

$$U_2 = f(2) - \cancel{f(4)} + \cancel{g(2)} - \cancel{g(3)} \quad (10)$$

$$U_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(5)} + \cancel{g(3)} - \cancel{g(4)}$$

$$\vdots$$

$$U_{n-2} = \cancel{f(n-2)} - \cancel{f(n)} + \cancel{g(n-2)} - \cancel{g(n-1)}$$

$$U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - f(n+1) + \cancel{g(n-1)} - \cancel{g(n)} \quad (10)$$

$$U_n = \cancel{f(n)} - f(n+2) + \cancel{g(n)} - g(n+1)$$

(5)

(10)

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} u_r = f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)+g(1)-g(n+1)$$

$$=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{n+2} \quad (5)$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}. \quad (5)$$

40

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}\right)$$

(5)

$$=\frac{9}{2}. \quad (5)$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $\frac{9}{2}$ වේ. (5)

15

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{2n} u_r + m\sum_{r=1}^{n-1} u_{n-r}\right) = 18$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n} u_n + m\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1} u_r = 18$$

(5)

$$m\sum_{r=1}^{n-1} u_{n-r} = m\sum_{r=1}^{n-1} u_r$$

reverse order

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{2}+m\times\frac{9}{2}=18$$

$$\Leftrightarrow \quad m=3. \quad (5)$$

(10)

1[illegible]

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4+a & 7 \\ 6 & 7 \\ 3a & 4 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{-1}$ පවතින පරිදි a හි අගයන් සොයන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{AB}$ සොයන්න.

$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ වන පරිදි a හි අගය නිර්ණය කරන්න.

a හි මෙම අගය සඳහා, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1} = 3\mathbf{I}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $w = -\dfrac{\sqrt{2}(3+i)}{(1+2i)}$ යැයි ගනිමු. $|w| = 2$ හා $\operatorname{Arg} w = \dfrac{3\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$|z| = 2$ හා $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

තවද, ආගන්ඩ් සටහනක් මත A හා B යනු, පිළිවෙළින් z හා w සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. $AB^2 = 8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ බව පෙන්වන්න.

AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. AOC ත්‍රිකෝණය භාවිතයෙන් $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{24}\right) = \dfrac{1}{8}\left(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි O මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

(*c*) $m \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $(1 + \sqrt{3}\,i)^{3m}(1 + i)^8 = 2^{3m+4}$ බව දී ඇත.

m හි අඩුතම අගය සොයන්න.

(*a*) A^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |\mathrm{A}| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2 - 3a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq \dfrac{2}{3}.$ 5

$\boxed{10}$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+a & 2+4a & 3a \\ 7 & 7 & 3a+1 \end{pmatrix}$$ 10 /0

$\boxed{10}$

$$\mathrm{B^T A^T} = \mathrm{C}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{C} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 4+a & 7 \\ 2+4a & 7 \\ 3a & 3a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a & 7 \\ 6 & 7 \\ 3a & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$\Leftrightarrow 2+4a=6$ හා $3a+1=4$

$\Leftrightarrow a=1.$ (5)

20

$a=1$ සඳහා, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

දැන්, $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{(2-3)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (10)

$$\therefore \mathrm{A}-\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=3\mathrm{I} \quad (5)$$

(5)

20

(*b*) $w=\dfrac{-\sqrt{2}(3+i)}{(1+2i)}\times\dfrac{(1-2i)}{(1-2i)}$ (5)

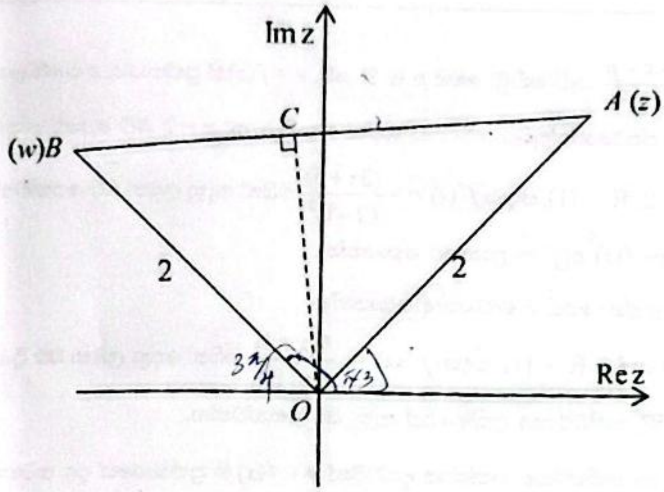
$$=\frac{-\sqrt{2}\left(3-6i+i+2\right)}{1+4}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{5}(5-5i) \quad (5)$$

$$=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

(5) (5)

$\therefore |w|=2$ හා $\mathrm{Arg}\ w=\dfrac{3\pi}{4}.$ (5)



$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad 5$$

$$= 1 + \sqrt{3}i \quad 5$$

$$w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$AB^2 = |z-w|^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 \quad 5$$

5

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 3 - 2\sqrt{6} + 2$$

$$= 8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}. \quad 5$$

$\boxed{25}$

$$O\hat{C}A = \frac{\pi}{2},\ A\hat{O}C = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{24} \quad 5$$

$$\sin^2\frac{5\pi}{24} = \frac{AC^2}{OA^2} \quad 5$$

$$= \frac{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2^2} = \frac{1}{16}.\ \left(8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}\right). \quad 5$$

$\boxed{15}$

(c) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3m}\left(1+i\right)^8 = 2^{3m+4}$ --------- (1)

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad 5$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad 5$$

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්,

$$(1) \Leftrightarrow 2^{3m}\left(\cos m\pi + i\sin m\pi\right).2^4.\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = 2^{3m+4} \quad 5 + 5$$

$$\Leftrightarrow \cos m\pi + i\sin m\pi = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos m\pi = 1$$

$$\Leftrightarrow m\pi = 2n\pi \qquad n \in Z.$$

m හි අඩුතම අගය $= 2 \quad (\because m \in Z^+)$. 5

$\boxed{25}$

---

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ සඳහා, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + p}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p \in \mathbb{R}$ වේ. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය, x-ඛණ්ඩා
$-\dfrac{1}{3}$ වන ලක්ෂ්‍යයකදී, එහි තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය ඡේදනය කරන බව දී ඇත. $p = 2$ බව පෙන්වන්න
$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ සඳහා $f'(x) = -\dfrac{(3x+5)}{(x-1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය $f''(x)$ යන්න $\mathbb{R} - \{1\}$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{6(x+3)}{(x-1)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව දී

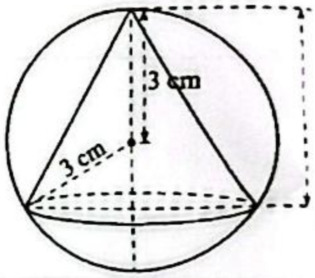
$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට $(-3, \frac{1}{2})$ හිදී නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය, ස්පර්ශෝන්මුඛ හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සට
අඳින්න.

(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, අරය 3 cm ක් වූ ගෝලයක සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් අන්තර්ගත කළ යුතුව ඇත.

කේතුවේ උස h cm යැයි ගනිමු. කේතුවේ පරිමාව V cm^3 යන්න $V = \dfrac{\pi}{3}\left(6h^2 - h^3\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තවද, ගෝලය තුළ අන්තර්ගත කළ හැකි විශාලතම එබඳු කේතුව ලැබෙන්නේ $h = 4$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(*a*) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + p}{(x-1)^2}$; $x \neq 1$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$ 5

$\therefore$ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය $y = 1$ වේ. 5

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1$ බව දී ඇත. 5

එවිට $\dfrac{\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3} + p}{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2} = 1$ 5

$\therefore p - \dfrac{2}{9} = \dfrac{16}{9}$

$\therefore p = 2.$ 5

25

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(x-1)^2(2x+1)-(x^2+x+2)2(x-1)}{(x-1)^4} \quad (10)$$

10

$$=\frac{(x-1)(2x+1)-2(x^2+x+2)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2x^2-x-1-2x^2-2x-4}{(x-1)^3}$$

$$=-\frac{(3x+5)}{(x-1)^3};\ x\neq 1 \text{ සඳහා} \quad (5)$$

15

$$f'(x)=0 \iff x=\frac{-5}{3}. \quad (5)$$

	$-\infty<x<\frac{-5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	$1<x<\infty$	
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$	(10) 3 ම සඳහා (5) ඕනෑම 2 ක් සඳහා
$f(x)$	අඩු වේ.	වැඩි වේ.	අඩු වේ.	(10) 3 ම සඳහා (5) ඕනෑම 2 ක් සඳහා

$f(x)$ යන්න $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]$ මත හා $(1,\infty)$ මත අඩු වේ.

$f(x)$ යන්න $\left[-\frac{5}{3},1\right)$ මත වැඩි වේ.

25

$$f\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^2-\frac{5}{3}+2}{\left(\frac{-5}{3}-1\right)^2}=\frac{\frac{25}{9}-\frac{5}{3}+2}{\frac{64}{9}}=\frac{28}{64}=\frac{7}{16}. \quad (5)$$

(5)

හැරවුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $=\left(-\frac{5}{3},\frac{7}{16}\right)$. (5)

15

$$f''(x) = \frac{6(x+3)}{(x-1)^4};\ x \neq 1 \text{ සඳහා}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3. \quad 5$$

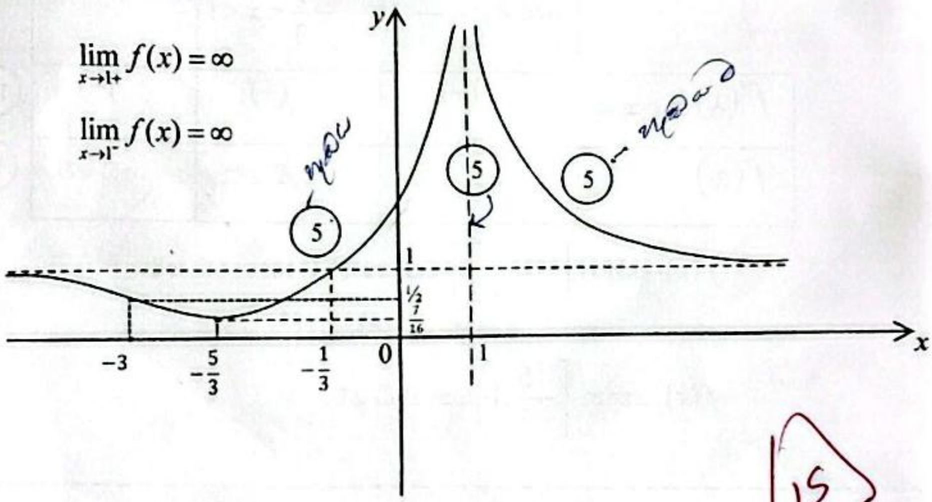
	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 1$	
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	5 + 5
අවකලතාව	යටි අවතල	උඩු අවතල	5 දෙකම සඳ

$$f(-3) = \frac{9-3+2}{16} = \frac{1}{2}. \quad 5$$

$\therefore\ y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයට $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ හිදී නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් ඇත.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$



15

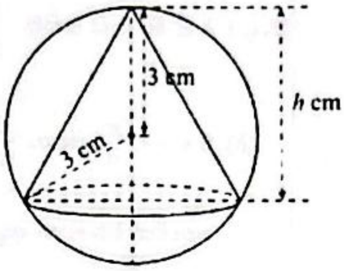
(*b*) කේතුවේ පතුලේ අරය

$= \sqrt{3^2-(h-3)^2}$ 5

$= \sqrt{6h-h^2}$

$V = \frac{1}{3}\pi\left(6h-h^2\right)\times h$

$= \frac{\pi}{3}\left(6h^2-h^3\right)$; $h>0.$ 5



10

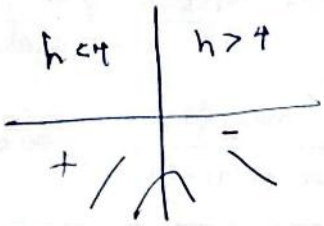
$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(12h-3h^2) = \pi(4-h)h$ 5

$\frac{dV}{dh} = 0 \Leftrightarrow h=4 \ (\because h>0)$ 5 5

$\frac{dV}{dh} > 0,\ 0<h<4$ විට

$\frac{dV}{dh} < 0, h>4$ විට. 5

$\therefore V$ උපරිම වන්නේ $h=4$ විටය. 5



20

---

15. (*a*) $k \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1-k^2x)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ සඳහා $\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)\right\} = \frac{2}{\cos 2x}$ බව පෙන්වන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int (\cos 2x)\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)dx$ සොයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx = \frac{\pi}{12} \text{ බව අපෝහනය කරන්න.}$$

(*a*) (i) අවස්ථාව : $k \neq 0$

$\int \frac{\sqrt{x}}{(1-k^2x)}dx$ $\qquad u = \sqrt{x}$ යැයි ගනිමු. (5)

$= \int \frac{u}{(1-k^2u^2)} 2u\,du$ (5) $\qquad$ එවිට $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. හා $dx = 2\sqrt{x}\,du$. (5)

$$= 2\int \frac{u^2}{(1-k^2u^2)}du$$

$$= \frac{2}{-k^2}\int \frac{1-k^2u^2-1}{(1-k^2u^2)}du \quad (5)$$

$$= \frac{-2}{k^2}\int \left\{1 - \frac{1}{(1-ku)(1+ku)}\right\}du \quad (5)$$

$$= \frac{-2}{k^2}\int \left\{1 - \frac{\frac{1}{2}}{1-ku} - \frac{\frac{1}{2}}{1+ku}\right\}du \quad (5) + (5)$$

$= \frac{-2}{k^2}\left\{u + \frac{1}{2k}\ln|1-ku| - \frac{1}{2k}\ln|1+ku|\right\} + C$; මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. (5)

(5) (5)

$$= \frac{-2}{k^2}\left\{\sqrt{x} + \frac{1}{2k}\ln\left|1-k\sqrt{x}\right| - \frac{1}{2k}\ln\left|1+k\sqrt{x}\right|\right\} + C. \quad (5)$$

(ii) අවස්ථාව: $k = 0$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-k^2x}\,dx = \int \sqrt{x}\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1$$; මෙහි C_1 යනු අභිමත නියතයකි. (5)

$\boxed{65}$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)\right\} = \frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)} \cdot \frac{\cos 2x(2\cos 2x) + (1+\sin 2x)2\sin 2x}{\cos^2 2x} \quad (10)$$ / 0

$$= \frac{2(\cos^2 2x + \sin 2x + \sin^2 2x)}{(1+\sin 2x)\cos 2x}$$

$$= \frac{2(1+\sin 2x)}{(1+\sin 2x)\cos 2x} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{\cos 2x}. \quad (5)$$

$\boxed{20}$

$$\int (\cos 2x)\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{2}\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right) - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot \frac{2}{\cos 2x}\,dx \quad (10)$$ / 6

$$= \frac{1}{2}\sin 2x.\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right) + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$$; මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. (10)

| | හා C නැති · ඇත්නම් දෙකම නැත්නම් 5 ක් අඩු කරන්න

$\boxed{20}$

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$ (10)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin x}dx \quad (5)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx \quad (5)$$

25

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{12} \quad (5)$$

20

---

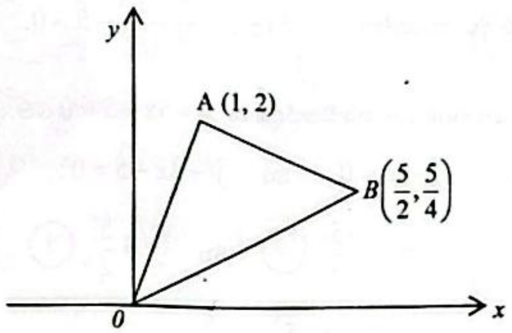
16. O මූල ලක්ෂ්‍යය ද, $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ යැයි ද ගනිමු. $A\hat{O}B$ හා $O\hat{A}B$ කෝණවල කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයා, මෙම කෝණ සමච්ඡේදක $D \equiv \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

D සිට OA රේඛාවට ලම්බ දුර සොයන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ පාද තුනම ස්පර්ශ කරන C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 වෘත්තය, OA හා AB ස්පර්ශ කරන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E හා F යැයි සිතමු. A, E හා F ලක්ෂ්‍ය හරහා යන C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය $4x^2 + 4y^2 - 9x - 13y + 15 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්තයන්හි ඡේදනය ප්‍රලම්බ දැයි නිර්ණය කරන්න.



$m = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$

OA හි සමීකරණය : $y = 2x$ (5)

OB හි සමීකරණය : $2y = x$ (5).

$A\hat{O}B$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය සඳහා

$$\frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} = \frac{|2y-x|}{\sqrt{5}}. \quad (10)$$

| | abs නැත්නම් (5) ක් අඩු කරන්න

$\therefore y - 2x = \pm(2y - x)$

$\therefore y - 2x = 2y - x$ හෝ $y - 2x = -(2y - x)$

$\therefore y + x = 0$ හෝ $y - x = 0.$ (5) ලැබෙනවා.

$(1, 2)$ ආදේශ කරන්න : $y + x = 3 > 0$

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ ආදේශ කරන්න : $y + x = \frac{15}{4} > 0.$

$\therefore$ $A\hat{O}B$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය $y - x = 0$ වේ. (5)

AB හි සමීකරණය: $y - 2 = \dfrac{\left(\frac{5}{4} - 2\right)}{\left(\frac{5}{2} - 1\right)}(x - 1)$ (5)

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y+x-5=0 \quad (5)$$

$O\hat{A}B$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය සඳහා

$$\frac{|2y+x-5|}{\sqrt{5}}=\frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} \quad (10)$$

$$\therefore 2y+x-5=\pm(y-2x)$$

$$\therefore y+3x-5=0 \text{ හෝ } 3y-x-5=0. \quad (5)$$

$(0,0)$ ආදේශ කරන්න : $y+3x-5=-5<0.$

$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$ ආදේශ කරන්න : $y+3x-5=\frac{5}{4}+\frac{15}{2}-5>0.$

$\therefore$ $O\hat{A}B$ කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය $y+3x-5=0$ වේ. (5)

D සඳහා $\quad y-x=0 \quad$ හා $\quad y+3x-5=0:$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{4} \quad (5) \quad \text{හා} \quad y=\frac{5}{4}. \quad (5)$$

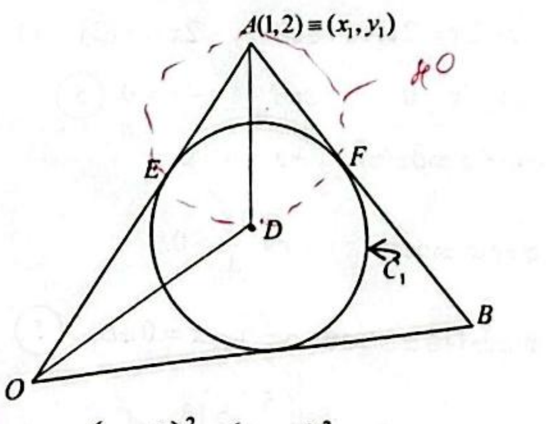
$$\therefore D\equiv\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right).$$

70

D සිට OA ට ලම්බ දුර

$$\frac{\left|\frac{5}{4}-2.\frac{5}{4}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}. \quad (10)$$

10



C₁ හි සමීකරණය $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$ වේ. (10)

එනම් $\quad x^2+y^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{45}{16}=0.$

20

EF යනු A සිට C_1 ට වූ ස්පර්ශ ජ්‍යාය වේ.

$\therefore$ EF හි සමීකරණය $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ වේ.

එනම් $x+2y-\frac{5}{4}(x+1)-\frac{5}{4}(y+2)+\frac{45}{16}=0.$ (10)

$$16x+32y-20x-20-20y-40+45=0$$

$$-4x+12y-15=0.$$

$$4x-12y+15=0.$$ (5)

$\therefore$ C_2 හි සමීකරණය

$$x^2+y^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{45}{16}+\lambda(4x-12y+15)=0\,;$$ (10) / or 0

මෙහි λ නිර්ණය කළ යුතුය.

$A\equiv(1,2)$ ලක්ෂ්‍යය C_2 මත වේ.

$$\therefore 1+4-\frac{5}{2}-5+\frac{45}{16}+\lambda(4-24+15)=0.$$

$$\frac{5}{16}-\lambda\times 5=0$$

$$\therefore \lambda=\frac{1}{16}.$$ (5)

C_2 හි සමීකරණය

$$x^2+y^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{45}{16}+\frac{4}{16}x-\frac{12}{16}y+\frac{15}{16}=0.$$

$$16x^2+16y^2-40x-40y+45+4x-12y+15=0$$

$$16x^2+16y^2-36x-52y+60=0$$

$$4x^2+4y^2-9x-13y+15=0.$$ (10)

40

E ; F (5)+(5)

E , F , A (5)

$E = 3/4 , 3/2$

$F = 3/2 , 7/4$

C_1 සඳහා : $g = -\frac{5}{4},\ f = -\frac{5}{4}, c = \frac{45}{16}$

C_2 සඳහා : $g' = -\frac{9}{8},\ f' = -\frac{13}{8}, c' = \frac{15}{4}$

$$2gg' + 2ff' = 2\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{8}\right) + 2\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{13}{8}\right) = \frac{45}{16} + \frac{65}{16} = \frac{55}{8} \quad (10)$$

$$c + c' = \frac{45}{16} + \frac{15}{4} = \frac{105}{16} \neq 2gg' + 2ff'. \quad (5)$$

(5)

$\therefore$ ප්‍රලම්භව ඡේදනය නොවේ.

20

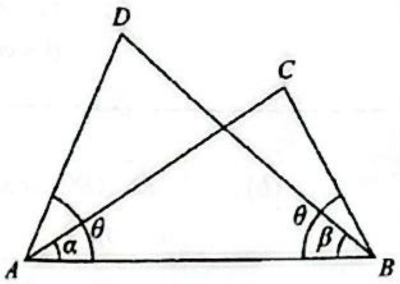
17. (*a*) $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වන්න.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\cot\theta - 2\tan\theta = \sin 2\theta$ සමීකරණය $a\cos^4\theta + b\cos^2\theta + c = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a, b හා c තාත්ත්වික නියත වේ.

ඒ නයින්, $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) තලයක් මත A, B, C හා D ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $B\hat{A}D = A\hat{B}C = \theta$ හා $3AD = 4BC$ වන පරිදි ය.



$B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{B}D = \beta$ යැයි ගනිමු. (රූපය බලන්න.)

සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)}$ බව පෙන්වන්න.

$\cot\theta = 3\cot\alpha - 4\cot\beta$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) පහත සමගාමී සමීකරණ, x හා y සඳහා විසඳන්න:

$\sin^{-1}\sqrt{x} = \cos^{-1}\sqrt{y}$

$\tan(\tan^{-1}3x - \tan^{-1}2y) + \tan(\tan^{-1}3y - \tan^{-1}2x) = 1.$

(*a*) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$ 5 **05**

$A = B = \theta.$

$\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$ 5 **05**

$\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2}}$

$\cot\theta - 2\tan\theta = \sin 2\theta$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ 5

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ 5

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta - 2(1-\cos^2\theta) = 2(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta$ 10

5 5

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^4\theta + \cos^2\theta - 2 = 0.$ 5

$a = 2,\ b = 1$ and $c = -2.$ **25**

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4},\quad \text{නමුත් } \cos^2\theta > 0.$$
(10)

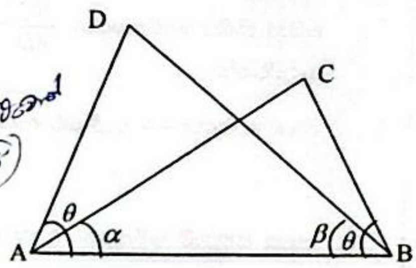
$$\therefore \cos^2\theta = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$ (5)

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}} \quad (\because \cos\theta > 0)$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}.$$ (5)

20

(b) $\triangle ABC$ සඳහා සයින් නීතිය :



$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(\pi-(\theta+\alpha))}$$ (10)

$$= \frac{AB}{\sin(\theta+\alpha)} \quad \text{-------(1)}$$
(5)

(15)

$\triangle ABD$ සඳහා සයින් නීතිය :

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\pi-(\theta+\beta))}$$ (10)

$$= \frac{AB}{\sin(\theta+\beta)} \quad \text{-------(2)}$$
(5)

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{BC}{AD}\times\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)}$$ (10)

40

40

$$3AD = 4BC \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \quad \frac{3}{4} = \frac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)}$$ (5)

$$4\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta) = 3\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$ (10)

$$\div\sin\theta\sin\alpha\sin\beta:\quad 4\cot\beta+4\cot\theta = 3\cot\alpha+3\cot\theta$$

$$\therefore \cot\theta = 3\cot\alpha - 4\cot\beta.$$ (5)

20

90

(c) $\sin^{-1}\sqrt{x} = \cos^{-1}\sqrt{y} = \alpha$ (say).

එවිට $\sin\alpha = \sqrt{x}$ සහ $\cos\alpha = \sqrt{y}$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (5)

$\Rightarrow x + y = 1$. -------(1) (5) ← කෙළින්ම ගත්තොත් ලකුණු (10)

$\therefore y = 1 - x$

$\tan(\tan^{-1}3x - \tan^{-1}2y) + \tan(\tan^{-1}3y - \tan^{-1}2x) = 1$

$$\frac{3x-2y}{1+3x\times 2y} + \frac{3y-2x}{1+3y\times 2x} = 1$$ (10) / 0

(1) $\Rightarrow$

$3x - 2(1-x) + 3(1-x) - 2x = 1 + 6x(1-x)$ (5)

$3x - \cancel{2} + 2x + \cancel{3} - 3x - 2x = \cancel{1} + 6x - 6x^2$

$6x(1-x) = 0$

$x = 0$ හෝ $x = 1$. (5)

$x=0$ විට $x=1$ විට

$y = 1$ විට ~~$x=0$~~ හා $y = 0$ විට ~~$x=1$~~ ($\because$(1))

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right\} \quad \text{හෝ} \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right\}.$$ (5)

යුගල දෙකම සමීකරණ දෙකම තෘප්ත කරයි.

35

***

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2025

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

II පත්‍රය

A කොටස	= 10 × 25	=	250
B කොටස	= 05 × 150	=	750

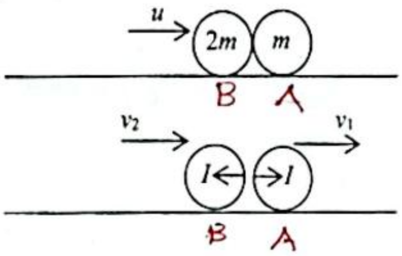
එකතුව $= \dfrac{1000}{10}$

අවසන් ලකුණ = 100

A කොටස

1. ස්කන්ධය m වූ A අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව ඇත. u වේගයකින් මේසය මත චලනය වන ස්කන්ධය $2m$ වූ B අංශුවක් A සමග සරල ලෙස ගැටේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. ගැටුමට පසු A අංශුවෙහි වේගය $\frac{2}{3}(1+e)u$ බව පෙන්වන්න.

   ගැටුමෙහිදී B මගින් A මත යොදන ආවේගයෙහි විශාලත්වය mu බව දී ඇත. $e=\frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{V}) \rightarrow$

$$0 = mv_1 + 2mv_2 - 2mu \quad 5$$

ග: සං: නි

$$\therefore v_1 + 2v_2 = 2u \quad \text{---------} \ (1)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන් :

$$v_1 - v_2 = eu \quad \text{---------} \ (2) \quad 5$$

(1) හා (2) $\Rightarrow 3v_1 = 2u + 2eu$

$$\therefore v_1 = \frac{2}{3}(1+e)u. \quad 5$$

A සඳහා, $\underline{I} = \Delta(m\underline{V}) \rightarrow$

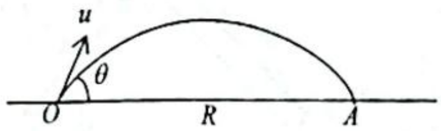
$$I = mv_1 \quad 5$$

$$\therefore mu = m.\frac{2}{3}(1+e)u \quad 5$$

$$3 = 2 + 2e$$

$$\therefore e = \frac{1}{2}. \quad 5$$

2. u ආරම්භක ප්‍රවේගයක් ඇතිව තිරස සමග $\theta \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින්, තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයකින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. ප්‍රක්ෂිප්තයෙහි තිරස් පරාසය සොයා. එය $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$ නම්, $\theta=\frac{\pi}{6}$ හෝ $\theta=\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



$\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$(\sqrt{3}\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

R යනු තිරස් පරාසය යැයි ගනිමු.

O සිට A දක්වා, $s = ut + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow$

$$R = u\cos\theta \cdot T. \text{ --------- } (1) \quad 5$$

$$\uparrow \; 0 = u\sin\theta \cdot T - \frac{1}{2}gT^2 \quad 5$$

$$\Rightarrow T = \frac{2u\sin\theta}{g}.$$

$$(1) \Rightarrow R = u\cos\theta \cdot \frac{2u\sin\theta}{g} \quad 5$$

$$= \frac{2u^2}{g}\sin\theta\cos\theta.$$

$R = \frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$ යැයි ගනිමු. එවිට $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g} = \frac{2u^2}{g}\sin\theta\cos\theta$

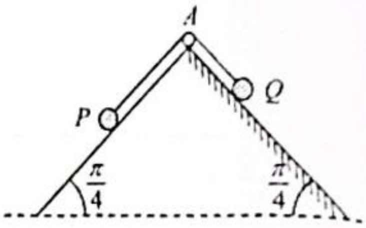
$$\therefore \sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 5$$

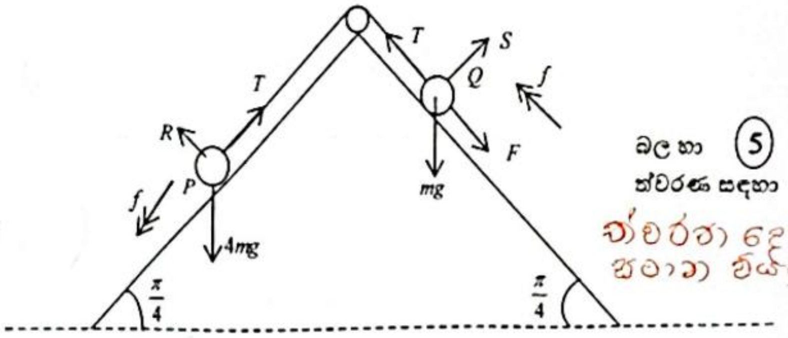
$$\therefore \sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{3}$$

$2\theta = \frac{\pi}{3}$ හෝ $\frac{2\pi}{3}$ $\quad \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ හෝ $\theta = \frac{\pi}{3}$. $\quad 5$

3. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $4m$ හා m වන P හා Q අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් යා කර ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, තන්තුව, එක එකක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත වූ අචල තල දෙකක මුදුනෙහි සවි කර ඇති A සුමට කුඩා කප්පියක් මතින් යයි. P අංශුව තබා ඇති තලය සුමට වන අතර, Q අංශුව තබා ඇති තලය රළු වේ. Q හා රළු තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. තන්තුව තදව ඇතිව හා තන්තුවේ AP හා AQ කොටස් අනුරූප තලවල උපරිම බෑවුම් රේඛා දිගේ තිබෙමින් අංශු අල්වා තබා, නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. P, තලයේ පහළට චලනය වන බව දී ඇත. තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.





බල හා (5)
ත්වරණ සඳහා

ත්වරණ දෙක සමාන විය යුතුය

$$F = \frac{1}{2}S \quad (5)$$

$\underline{F} = m\underline{a}$:

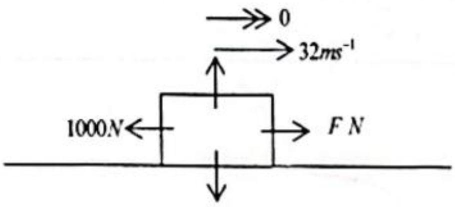
(P) $\swarrow$ $4mg\sin\frac{\pi}{4} - T = 4mf$ (5)

(Q) $\nwarrow$ $T - F - mg\sin\frac{\pi}{4} = mf$ (5)

(Q) $\nearrow$ $S - mg\cos\frac{\pi}{4} = 0$ (5)

ත්වරණ F_1 හා F_2 ලෙස ලියා ඇත්විට
පසු (20) දෙනවා

4. ස්කන්ධය 1250 kg වූ මෝටර් රථයක් 1000 N නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සෘජු තිරස් මාර්ගයක් මත $32\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ නියත වේගයකින් චලනය වෙමින් ඇත. මෝටර් රථයෙහි එන්ජිම මගින් ජනනය කරනු ලබන ජවය 32 kW බව පෙන්වන්න.
දැන්, මෝටර් රථය, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ ක කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ පහළට එම නියත ප්‍රතිරෝධයටම එරෙහිව චලනය වේ. එහි ත්වරණය $4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ වන හා එහි එන්ජිම 20 kW ජවයකින් ක්‍රියාකරන මොහොතකදී මෝටර් රථයේ වේගය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a} \rightarrow$

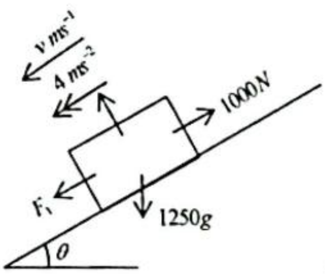
$$F - 1000 = 0 \quad (5)$$

$$\therefore F = 1000$$

ජවය : $P = F \times 32$

$$= 32 \times 1000\,\mathrm{W}$$

$$= 32\mathrm{kW}. \quad (5)$$



$$\sin\theta = \frac{1}{5}$$

නව $P = 20\mathrm{kW}$

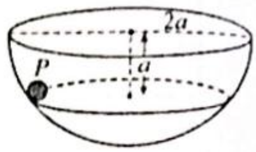
$$= 20 \times 1000\,\mathrm{W}$$

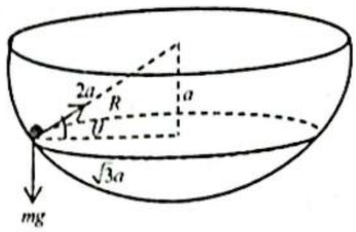
$$20 \times 1000 = F_1 \times v \quad (5)$$

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$ ↙ $F_1 - 1000 + 1250g\sin\theta = 1250 \times 4$ (10) or 0

$F_1 = 3500\,\mathrm{N}$

5. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, අරය $2a$ වූ සුමට අර්ධගෝලාකාර කබොලක් එහි වෘත්තාකාර ගැටිය තිරස්ව ඇතිව සවි කර ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට u වේගයක් දෙනු ලබන්නේ කබොලෙහි ඇතුළත සුමට පෘෂ්ඨය මත, කබොලෙහි වෘත්තාකාර ගැටියේ කේන්ද්‍රයට a දුරක් පහළින් කේන්ද්‍රය පිහිටි තිරස් වෘත්තයක චලනය වන පරිදි ය. $u = \sqrt{3ga}$ බව පෙන්වන්න.





බල හා $\theta = \frac{\pi}{6}$ 5

$\underbrace{\text{බල හා}}$ දෙකට ම

$\underline{F} = m\underline{a} \uparrow,\ R\sin\frac{\pi}{6} - mg = 0$ 5

$\therefore R = 2mg.$ 5

$\rightarrow R\cos\frac{\pi}{6} = m.\frac{u^2}{\sqrt{3}a}$ 5

$\cancel{2}\cancel{m}g \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{m}u^2}{\sqrt{3}a}$

$u^2 = 3ga$

$\therefore u = \sqrt{3ga}.$ 5

6. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ හා $\mathbf{b} = \gamma\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$ යනු $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 1$ සපුරාලන පරිදි වූ දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු. $\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 = 1$ බව පෙන්වන්න.
$\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ දෛශික එකිනෙකට ලම්බ බව දී ඇත. $\beta^2 = \alpha\gamma$ බව පෙන්වන්න.
$\alpha = \frac{1}{3}$ නම් γ හි අගය සොයන්න.

$$\left.\begin{array}{l} |\underline{a}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ |\underline{b}|^2 = \gamma^2 + (-\beta)^2 = \gamma^2 + \beta^2 \end{array}\right] \quad 5$$

$$|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta^2 = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 = 1. \text{ --------- } (1) \quad 5$$

$$\underline{a} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\gamma - \beta^2 = 0 \quad 5$$

$$\therefore \beta^2 = \alpha\gamma$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ යැයි ගනිමු. එවිට $\beta^2 = \frac{\gamma}{3}. \Rightarrow \gamma > 0$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{9} + 2.\frac{\gamma}{3} + \gamma^2 = 1 \quad 5$$

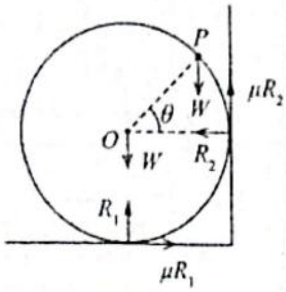
$$9\gamma^2 + 6\gamma - 8 = 0$$

$$(3\gamma - 2)(3\gamma + 4) = 0$$

$$\gamma = \frac{2}{3} \text{ or } \cancel{\gamma = -\frac{4}{3}}.$$

$$\therefore \gamma = \frac{2}{3}. \quad 5$$

8. බර W වූ P අංශුවක්, කේන්ද්‍රය O, අරය a හා බර W වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තුනී තැටියක ගැට්ටට සවි කර ඇත. රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තැටිය සමතුලිතව ඇත. තැටිය හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වන අතර තැටිය හා බිත්තිය අතර ද එය μ ම වේ. OP තිරස සමඟ $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට තැටිය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇති බව දී ඇත. තැටිය මත ක්‍රියාකරන බල රූපයේ ලකුණු කර ඇත.
$\cos\theta = \frac{2\mu(\mu+1)}{\mu^2+1}$ බව පෙන්වන්න.



$$\rightarrow R_2 = \mu R_1 \text{ ---------- } (1) \quad 5$$

$$\uparrow R_1 + \mu R_2 = 2W \quad 5$$

$$\therefore R_1 + \mu \cdot \mu R_1 = 2W$$

$$\therefore R_1 = \frac{2W}{(1+\mu^2)} \text{ ---------- } (2) \quad 5$$

$$\circlearrowleft O) \ \mu R_1 \cdot a + \mu R_2 \cdot a - W \cdot a\cos\theta = 0 \quad 5$$

$$\cos\theta = \frac{\mu(R_1+R_2)}{W}$$

$$= \frac{\mu(1+\mu)R_1}{W} \quad ((1)\text{න්})$$

$$= \frac{2\mu(1+\mu)}{(1+\mu^2)}. \quad ((2)\text{න්}) \quad 5$$

9. A, B හා C යනු, A හා B ස්වායත්ත ද, B හා C අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර ද, $P(B) = \frac{1}{5}$ ද $P(A \cup B) = P(B \cup C)$ ද වන පරිදි, Ω නියැදි අවකාශයක වූ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. $P(C) = \frac{4}{5}P(A)$ බව පෙන්වන්න.
$P(C|A) = 2P(A \cap C) \neq 0$ නම් $P(C)$ සොයන්න.

$$P(A \cup B) = P(B \cup C)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) + P(C) \quad 5$$

$$\Rightarrow P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(C)$$

5

$$\Rightarrow P(C) = \frac{4}{5}P(A) \quad 5 \quad \left(\because P(B) = \frac{1}{5}\right)$$

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = 2P(A \cap C)$$

5

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \qquad (\because P(A \cap C) \neq 0)$$

$$\therefore P(C) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \qquad \left(\because P(C) = \frac{4}{5}P(A)\right)$$

5

10. ආරෝහණ පිළිවෙළට සකස් කරන ලද $1, p, 4, 10, q$ නිරීක්ෂණ පහක මධ්‍යන්‍යය 6 වේ; මෙහි p හා q යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. මෙම නිරීක්ෂණ, $y = 3x + c$ පරිණාමනය මගින් පරිණාමනය කර ඇත; මෙහි x මගින් මුල් නිරීක්ෂණ දක්වන අතර c යනු තාත්වික සංඛ්‍යාවකි. පරිණාමිත නිරීක්ෂණවල මධ්‍යන්‍යය හා පරාසය පිළිවෙළින් 20 හා 33 වේ. p, q හා c හි අගයන් සොයන්න.

$$\frac{1+4+p+10+q}{5}=6 \quad 5$$

$$\Rightarrow p+q=15$$

$$3\times 6+c=20 \quad 5$$

$$\therefore c=2.$$

පරිණාමිත නිරීක්ෂණවල පරාසය $=(3q+c)-(3+c)$

$$\therefore 3q-3=33 \quad 5$$

$$\therefore q=12$$

$$\therefore p=3.$$

p, q හා c හි අගයන් සඳහා 10

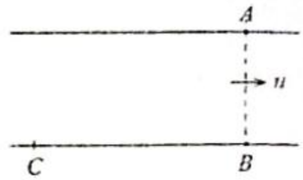
ඕනෑම දෙකක් 5

B කොටස

11. (a) නියත $f \text{ m s}^{-2}$ මන්දනයකින් සරල රේඛාවක් දිගේ ගමන් කරන P අංශුවක්, කාලය $t = 0$ s හිදී 60 m s^{-1}ක ප්‍රවේගයකින් O ලක්ෂ්‍යයක් පසු කරයි; මෙහි $f > 0$ වේ. P අංශුව නිශ්චලතාවයට පැමිණි විගසම, එය O දෙසට $f \text{ m s}^{-2}$ නියත ත්වරණයකින් චලනය වේ. O හි නිශ්චලතාවයේ පැවති තවත් Q අංශුවක්, කාලය $t = \dfrac{30}{f}$ s හිදී $f \text{ m s}^{-2}$ නියත ත්වරණයකින් එම සරල රේඛාව දිගේම P දෙසට චලනය ආරම්භ කර, 30 m s^{-1} ප්‍රවේගයක් ලබාගත් පසු එම නියත ප්‍රවේගයම පවත්වා ගෙන යයි. Q අංශුව නියත ප්‍රවේගයට පැමිණ තත්පර 10 කට පසු Q අංශුව P අංශුව හමුවේ. එකම රූපසටහනක, $t = 0$ s සිට P හා Q හමුවන තෙක්, ඒවායේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

$f = 3$ බවත් O සිට අංශු හමුවන ලක්ෂ්‍යයට දුර 450 m බවත් පෙන්වන්න.

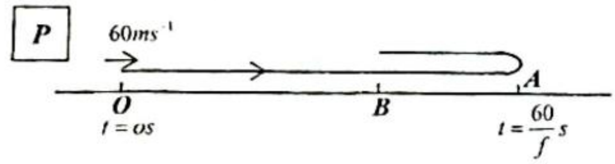
(b) සමාන්තර සෘජු ඉවුරු සහිත පළල a වූ ගඟක් u ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගලයි. රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි, A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ඉවුරු මත පිහිටා ඇත්තේ AB ඉවුරුවලට ලම්බක හා $BC = 2a$ වන පරිදි ය. P හා Q බෝට්ටු දෙකක් පිළිවෙළින් A හා B හිදී එකම මොහොතකදී තම ගමන් ආරම්භ කරයි. P බෝට්ටුව ජලයට සාපේක්ෂව $2\sqrt{5}\,u$ ප්‍රවේගයකින් $\overrightarrow{AC}$ දිශාවට ගමන් කරයි. Q බෝට්ටුව ජලයට සාපේක්ෂව $\sqrt{2}\,u$ වේගයකින් පොළොවට සාපේක්ෂව $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට ගමන් කරයි. එකම රූපයක, P හි හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



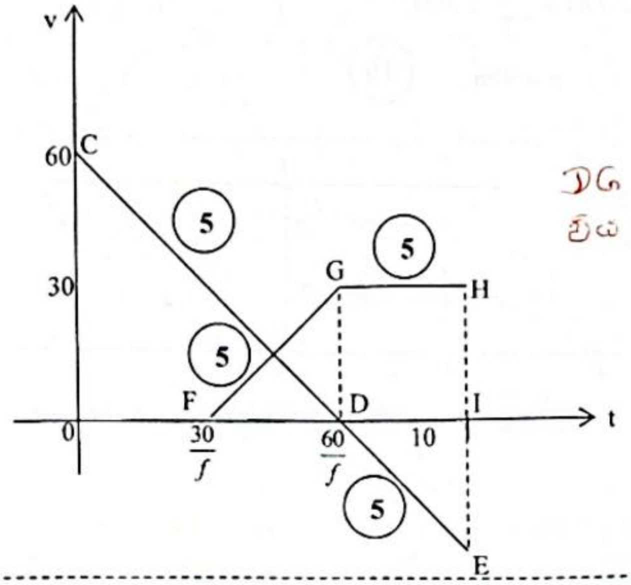
පොළොවට සාපේක්ෂව P හි ප්‍රවේගයත් පොළොවට සාපේක්ෂව Q හි වේගයත් සොයන්න.

තවද, Q ට සාපේක්ෂව P හි ප්‍රවේගයේ දිශාවත් **ඒ නයින්**, P හා Q අතර කෙටිම දුරත් සොයන්න.

(a)



P සහ Q හමුවන ලක්ෂ්‍යය B යැයි ගනිමු.



GH රේඛාව තිරස් විය යුතු නෑ

20

P හි චලිතය සැලකීමෙන්,

$OB = \triangle\, OCD$ හි වර්ගඵලය $- \triangle\, DIE$ හි වර්ගඵලය

$$= \frac{1}{2} \times \frac{60}{f} \times 60 - \frac{1}{2} 10 \times 10f \quad 5$$ මුළු ප්‍රකාශනයට

5 5

$$= \frac{1800}{f} - 50f \text{ --------- (1)}$$

Q හි චලිතය සැලකීමෙන්,

$OB = \triangle\, DFG$ හි වර්ගඵලය $+ DGHI$ හි වර්ගඵලය

$$= \frac{1}{2} \times \frac{30}{f} \times 30 + 30 \times 10 \quad 5$$ මුළු ප්‍රකාශනයට

5 5

$$= \frac{450}{f} + 300 \text{ --------- (2)}$$

$$(1) \text{ හා } (2) \Rightarrow \frac{1800}{f} - 50f = \frac{450}{f} + 300 \quad 10$$ or 0

$$\frac{1350}{f} = 50f + 300$$

$$50f^2 + 300f - 1350 = 0 \quad 5$$

$$f^2 + 6f - 27 = 0$$

$$(f-3)(f+9) = 0 \quad 5$$

$$f = 3. \quad 5 \quad (\because f > 0)$$

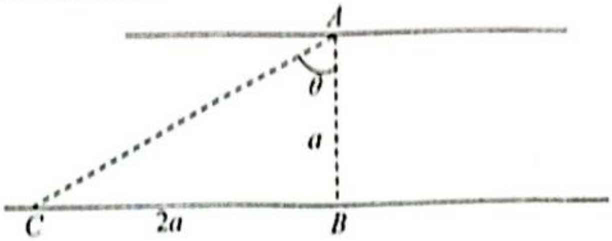
45

$\therefore OB = \dfrac{450}{3} + 300$

$= 450m$ (10)

10

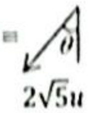
(b)



$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = 2$

$\underline{V}(P,W) =$ 

(5) $\qquad \underline{V}(W,E) = u \rightarrow$ (5)

$\underline{V}(Q,W) = \sqrt{2}u$ (5) $\qquad \underline{V}(Q,E) = \uparrow$ (5)

$\underline{V}(P,E) = \underline{V}(P,W) + \underline{V}(W,E)$

$= \vec{XY} + \vec{YZ}$

$= \vec{XZ}$

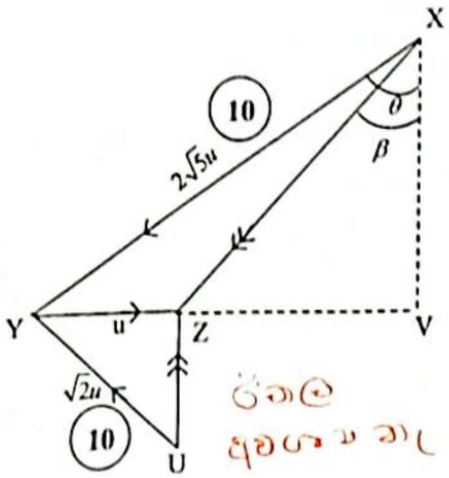
$\underline{V}(Q,E) = \underline{V}(Q,W) + \underline{V}(W,E)$

$= \vec{UY} + \vec{YZ}$

$= \vec{UZ}$

වෙන වෙනම ඇඳලා තියෙනම්

15/20



එකම අවශ්‍ය නෑ

45

$XV = 2\sqrt{5}u\cos\theta = 2u$

$YV = 2\sqrt{5}u\sin\theta = 4u$

$\underset{\sim}{V}(P,E) = \overrightarrow{XZ}$

$= \sqrt{2^2+3^2}u$ 

10

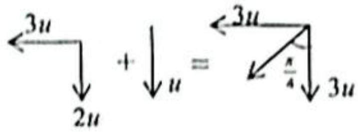
$= \sqrt{13}u$ 

$\tan\beta = \dfrac{3}{2}$ 5

පෘථිවියට සාපේක්ෂව Q හි ප්‍රවේගය $= UZ = u$ 5

$\boxed{20}$

$\underset{\sim}{V}(P,Q) = \underset{\sim}{V}(P,E) + \underset{\sim}{V}(E,Q)$

$=$ 

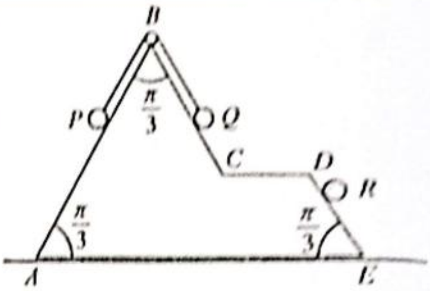
$\therefore$ P හා Q අතර කෙටිම දුර $a\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

10

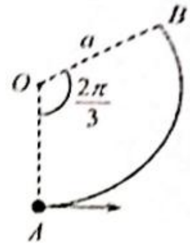
$\boxed{10}$

---

12. (a) ස්කන්ධය $10m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ $ABCDE$ සිරස් හරස්කඩ රූපයේ දැක්වේ. AE අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක තබා ඇත. තවද, AB, BC හා DE ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර, CD, AE ට සමාන්තර ද $E\hat{A}B = A\hat{B}C = D\hat{E}A = \frac{\pi}{3}$ ද වේ. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $5m, m$ හා m වන P, Q හා R අංශු තුනක්, පිළිවෙළින් AB, BC හා DE මත අල්වා තබා ඇත. B හිදී කුට්ටියට සවි කර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා කප්පියක් මගින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට P හා Q අංශු ඈදා ඇත. රූපයේ දක්වා ඇති පිහිටුමේ සිට තන්තුව තදව ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හැරේ. කුට්ටියෙහි ත්වරණයත්, කුට්ටිය මගින් P මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයත් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.

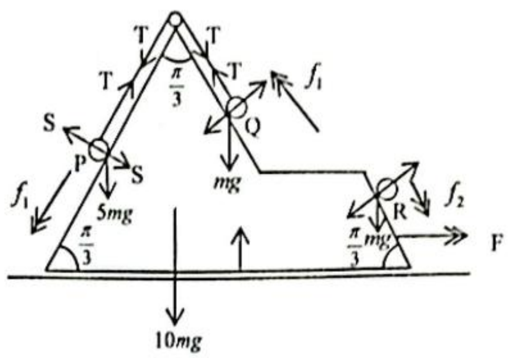


(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, අරය a ද, කේන්ද්‍රය O ද හා $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{3}$ ද වූ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩැති AB සුමට තුනී දෘඪ කම්බියක්, OA සිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ස්කන්ධය m වූ සුමට කුඩා පබළුවක් A හි තබා $\sqrt{\frac{7ga}{2}}$ වේගයකින් කම්බිය දිගේ ප්‍රක්ෂේපනය කරනු ලැබේ. පබළුව O වටා θ $\left(0 < \theta \leq \frac{2\pi}{3}\right)$ කෝණයකින් හැරී ඇති විට එහි v වේගය $v^2 = \frac{ga}{2}(3 + 4\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



තවද, කම්බිය හැර ගිය පසු, පබළුව නැවත A වෙත පැමිණෙන බව පෙන්වා, පබළුව A කරා ළඟා වන විට එහි වේගය සොයන්න.

(a)



$\underline{a}$(කුට්ටිය, E) $= \rightarrow F$ 　　 $\underline{a}$(R, කුට්ටිය) $= \searrow f_2$

$\underline{a}$(P, කුට්ටිය) $= \swarrow f_1$

$\underline{a}$(Q, කුට්ටිය) $= \nwarrow f_1$ 　 5

බල සඳහා :

P මත 5

Q මත 5

කුට්ටිය මත ~~10~~ 5

R මත 5

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන් : 5 5 5 5

පද්ධතිය සඳහා $\rightarrow$ $0 = 10mF + 5m\left(F - \frac{f_1}{2}\right) + m\left(F - \frac{f_1}{2}\right) + m\left(F + \frac{f_2}{2}\right)$ 5

$P \swarrow$ $5mg \times \frac{\sqrt{3}}{2} - T = 5m\left(f_1 - \frac{F}{2}\right)$ 10 දෝෂ 1 කට (5)

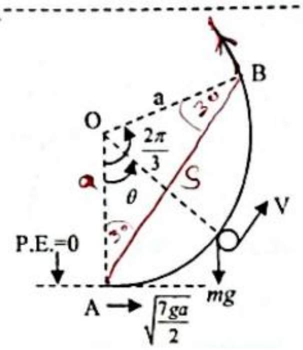
$Q \nwarrow$ $T - mg \times \frac{\sqrt{3}}{2} = m\left(f_1 - \frac{F}{2}\right)$ 10

$R \searrow$ $mg\frac{\sqrt{3}}{2} = m\left(f_2 + \frac{F}{2}\right)$ 5

$P \nwarrow$ $S - 5mg \times \frac{1}{2} = 5m\left(-F \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 10

$\boxed{85}$

(b)



ශක්ති සංස්ථිතියෙන් :

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg(a - a\cos\theta) = \frac{1}{2}m \times \frac{7ga}{2} \quad 15$$

P.E. 5

K.E. 5

සමීකරණය 5

$$V^2 = -2ga(1 - \cos\theta) + \frac{7ga}{2}$$

$$= \frac{ga}{2}(3 + 4\cos\theta). \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ විට, } V^2 = \frac{ga}{2}\left(3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{ga}{2}. \quad 5$$

B සිට OA හමුවන ලක්ෂ්‍යය දක්වා ගුරුත්වය යටතේ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$:

$$\leftarrow \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{ga}{2}} \times \frac{1}{2}T. \quad (5)$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{6a}{g}} \quad (5)$$

$$\downarrow \quad h = -\sqrt{\frac{ga}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}T + \frac{1}{2}gT^2 \quad (10)$$

$$= -\sqrt{\frac{ga}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{6a}{g}} + \frac{1}{2}g \times \frac{6a}{g} \quad (5)$$

$$= -\frac{3a}{2} + 3a = \frac{3a}{2}. \quad (5)$$

$\therefore$ පබලුව ආපසු A වෙත පැමිණෙයි.

35

ශක්ති සංස්ථිතිය $\Rightarrow$ ආපසු A වෙත පැමිණෙන විට පබලුවේ වේගය $= \sqrt{\frac{7ga}{2}}$. (10) 0 ✗ 0

10

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$S = 0 + \frac{1}{2} g \cos 30\, t^2$

$2S = g \frac{\sqrt{3}}{2} t^2$

$\frac{4S}{\sqrt{3}g} = t^2$

$\frac{4S}{\sqrt{3}\cancel{g}} = \frac{2a}{\cancel{g}}$

$S = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$0 = \sqrt{\frac{ga}{2}}\, t - \frac{1}{2} g t^2.$

$\frac{1}{2} g t^{\cancel{2}} = \sqrt{\frac{ga}{2}}\, \cancel{t}$

$\frac{1}{\cancel{4}} t^2 g^2 = \frac{ga}{\cancel{2}}$

$t^2 = \frac{2a}{g}$

13. $AB = 16a$ වන පරිදි, A හා B අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකක් සුමට තිරස් මේසයක් මත පිහිටා ඇත. ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $3mg$ වන S_1 සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ඇදා ඇති අතර S_1 හි අනෙක් කෙළවර A ට ඇදා ඇත. තවද, ස්වභාවික දිග $4a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වන දෙවන S_2 සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් ද P ට ඇදා ඇති අතර S_2 හි අනෙක් කෙළවර B ට ඇදා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, C ලක්ෂ්‍යයකදී P අංශුව සමතුලිතතාවේ පවතී.

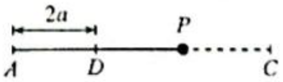
AC හි දිග හා BC හි දිග සොයන්න.

දැන්, P අංශුව B දෙසට $2a$ දුරක් ඇද, නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \omega^2(x - 6a) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $AP = x$ වන අතර $\omega\ (>0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වේ.

$X = x - 6a$ ලෙස ගෙන, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ බව පෙන්වා මෙම සරල අනුවර්ති චලිතයේ ආවර්ත කාලය ප්‍රකාශ කරන්න.

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, මෙම චලිතයේ විස්තාරය c ද, P හි උපරිම වේගය ද සොයන්න.

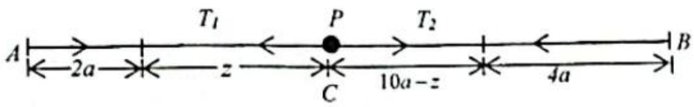
මෙම චලිතයේදී P, C ට ළඟා වන පළමු මොහොතේදී, S_2 තන්තුව කපනු ලැබේ.



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, D යනු $AD = 2a$ වන පරිදි වූ AC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. C සිට D දක්වා P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{y} + \omega_1^2 y = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $DP = y$ වන අතර $\omega_1\ (>0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වේ.

මෙම සරල අනුවර්ති චලිතයේ විස්තාරය $\sqrt{\frac{68}{3}}\,a$ බව පෙන්වන්න.

P චලිතයේ යෙදවූ මොහොතේ සිට එය A ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන තෙක් ගත වූ මුළු කාලය සොයන්න.



$$T_1 = T_2$$

$$\frac{z}{2a} \times 3mg = \frac{(10a - z)}{4a} \times 4mg \quad 10$$

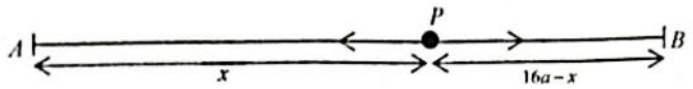
$$3z = 20a - 2z$$

$$\therefore z = 4a \quad 5$$

$\therefore AC = 6a$ හා $BC = 10a.$

5   5

25



P ට $\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$

$$m\ddot{x} = \frac{(16a - x - 4a)}{4a} \times 4mg - \frac{(x - 2a)}{2a} \times 3mg$$ 5 5 5

$$\ddot{x} = (12a - x)\frac{g}{a} - (x - 2a)\frac{3g}{2a}$$

$$= \frac{g}{2a}\{24a - 2x - 3x + 6a\}$$

$$= \frac{g}{2a}\{30a - 5x\}$$

$$= -\frac{5g}{2a}(x - 6a)$$ 10

$\therefore \ddot{x} + \omega^2(x - 6a) = 0$; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{5g}{2a}}$. 5

30

$X = x - 6a \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$ හා $\ddot{X} = \ddot{x}$ 5

$\therefore \ddot{X} + \omega^2 X = 0.$ 5

ආවර්ත කාලය $= \frac{2\pi}{\omega}$. 5 $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{5g}{2a}}} = \sqrt{\frac{8a}{5g}}\,\pi$

15

$$\dot{X}^2 = \omega^2\left(c^2 - X^2\right) \text{ ---------- } (1)$$

$x = 8a$ විට $\dot{x} = 0$ වේ.

එනම්, $X = 2a$ විට $\dot{X} = 0$ වේ. 5

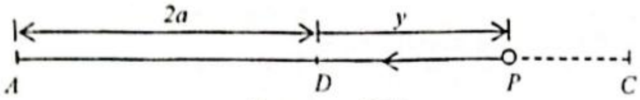
දැන්, $(1) \Rightarrow c = 2a.$ 5

උපරිම $\dot{X}^2 = \omega^2 c^2$

$\therefore$ උපරිම $\dot{X} = \omega c = \sqrt{\frac{5g}{2a}} \times 2a = \sqrt{10ga}.$

10

20



$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow: m\ddot{y} = -\dfrac{y}{2a} \cdot 3mg$ 5

$\therefore \ddot{y} = -\dfrac{3g}{2a} y.$

$\therefore \ddot{y} + \omega_1^2 y = 0;$ මෙහි $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3g}{2a}}.$ 5

10

$\dot{y}^2 = \omega_1^2 \left(c_1^2 - y^2\right)$

$y = 4a$ විට $\dot{y} = \sqrt{10ag}$ වේ. 5

$\therefore 10ag = \dfrac{3g}{2a}\left(c_1^2 - 16a^2\right)$ 5

$20a^2 = 3c_1^2 - 48a^2$

$\therefore c_1^2 = \dfrac{68}{3} a^2$

$\therefore c_1 = \sqrt{\dfrac{68}{3}} a.$ 5

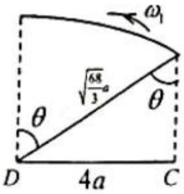
$\therefore$ මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි විස්තාරය $= \sqrt{\dfrac{68}{3}} a.$

15

C වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලය $= t_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{2a}{5g}}.$

5

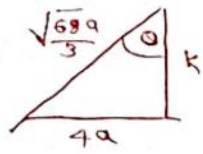
C සිට D දක්වා ගන්නා කාලය $= t_2$



5

$\omega_1 t_2 = \theta = sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{68}}\right).$

5



$\frac{68a^2}{3} = 16a^2 + k$

$\frac{20a^2}{3} = k^2$

$k = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\,a$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{68}}$

$\therefore t_2 = \sqrt{\frac{2a}{3g}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{12}{17}}\right)$ 5

D හිදී වේගය $= \omega_1 c_1$ 5

D සිට A දක්වා ගන්නා කාලය $= t_3 = \frac{2a}{\omega_1 c_1} = 2\cancel{a}\sqrt{\frac{2a}{3g}}.\sqrt{\frac{3}{68}}.\frac{1}{\cancel{a}}$

5

$\therefore$ අවශ්‍ය කාලය $= \frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{2a}{5g}} + \sqrt{\frac{2a}{3g}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{12}{17}}\right) + \sqrt{\frac{2a}{17g}}.$ 5

35

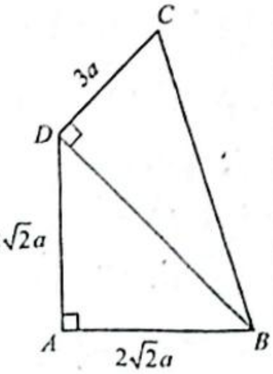
14.(*a*) O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින්, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ හා $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. තවද, D යනු DC, AB ට සමාන්තර හා AD, AB ට ලම්බ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OD} = -\frac{8}{5}\mathbf{i} + \frac{11}{5}\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න.

AB හා OD හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු.

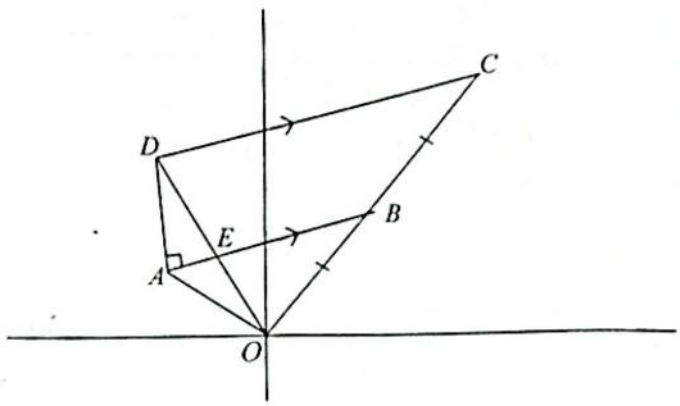
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $B\hat{A}D = B\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$, $AB = AD = 2\sqrt{2}a$ හා $CD = 3a$ වූ $ABCD$ තල චතුරස්‍රයක් රූපයෙහි දැක්වේ. විශාලත්ව $3P, 3P, 2\sqrt{2}P, 5\sqrt{2}P$ හා $3\sqrt{2}P$ වූ බල පිළිවෙළින් AB, AD, BD, BC හා DC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. මෙම බල පද්ධතිය, විශාලත්ව αP හා βP වූ පිළිවෙළින් AB හා AD දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරන බල දෙකකට හා වාමාවර්ත අතට ක්‍රියාකරන ඝූර්ණය M වූ බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. α, β හා M හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, ඉහත බල පද්ධතියට, චතුරස්‍රයේ තලයෙහි ක්‍රියාකරන බල යුග්මයක් එකතු කරනු ලබන්නේ නව බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය D හරහා යන පරිදි ය. එකතු කළ බල යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න.



(*a*)



$\underline{c} = \overrightarrow{OC}$ හා $\underline{d} = \overrightarrow{OD}$ යැයි ගනිමු.

DC, AB ට සමාන්තර බැවින්,

$\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB}$; මෙහි λ යනු අදිශයකි. 5

$\underline{c} - \underline{d} = \lambda(\underline{b} - \underline{a})$ 5

$\therefore \underline{d} = 2\underline{b} - \lambda(\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{i} - \underline{j})$

$\overrightarrow{OD} = 2\underline{i} + 4\underline{j} - \lambda(2\underline{i} + \underline{j})$ ----------- (1) 5

$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$
$= 2\underline{b}$
$= 2(\underline{i} + \underline{j})$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
$= \underline{i} - \underline{j} + \underline{i} + 2\underline{j}$
$= 2\underline{i} + \underline{j}$

$AD \perp AB$ බැවින්,

$\vec{AD}.\vec{AB} = 0.$ 5

$\left[2\underline{i}+4\underline{j}-\lambda\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)+\underline{i}-\underline{j}\right].\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)=0$ 5

$\left[(3-2\lambda)\underline{i}+(3-\lambda)\underline{j}\right].\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)=0$

$6-4\lambda+3-\lambda=0$

$\therefore \lambda = \frac{9}{5}.$ 5

දැන්, (1) $\Rightarrow \vec{OD} = 2\underline{i}+4\underline{j}-\frac{9}{5}\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$ 5

$=\left(2-\frac{18}{5}\right)\underline{i}+\left(4-\frac{9}{5}\right)\underline{j}$

$=-\frac{8}{5}\underline{i}+\frac{11}{5}\underline{j}.$ 5

$\overline{OD} = x\underline{i}+y\underline{j}$

$\overline{OD} = \overline{OD}$

$x\underline{i}+y\underline{j} = 2\underline{i}+4\underline{j}-\lambda(2\underline{i}+\underline{j})$

$x = 2-2\lambda \quad y = 4-\lambda$

$\overline{AD} = \overline{AO}+\overline{OD}$

$= x\underline{i}+y\underline{j}+\underline{i}-\underline{j}$

$= (x+1)\underline{i}+(y-1)\underline{j}$

$\overline{AD}.\overline{AB} = 0$

$\{(x+1)\underline{i}+(y-1)\underline{j}\}.(2\underline{i}+\underline{j}) = 0$

$2(x+1)+(y-1) = 0$

$2x+y = -1$

$\lambda = \frac{9}{5}$

40

$\vec{AE} = \mu\left(\vec{AB}\right)$; මෙහි μ යනු අදිශයකි. 5

$\vec{OE}-\vec{OA} = \mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

$\frac{1}{2}\vec{OD}-\vec{OA} = \mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$ 5

$\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\underline{i}+\frac{11}{5}\underline{j}\right)-\left(-\underline{i}+\underline{j}\right) = \mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

$-\frac{8}{10}\underline{i}+\frac{11}{10}\underline{j}+\underline{i}-\underline{j} = \mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

$\frac{2}{10}\underline{i}+\frac{1}{10}\underline{j} = \mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$ 5

$\therefore \mu = \frac{1}{10}$ 5

$\therefore \vec{AE} = \frac{1}{10}\vec{AB}.$

$\overline{OE} = \mu(2\underline{i}+\underline{j})-\underline{i}+\underline{j}$

$\overline{OE} = k\,\overline{OD}$

$\overline{OE} = k\left[-\frac{8}{5}\underline{i}+\frac{11}{5}\underline{j}\right]$

$(2\mu-1) = -\frac{8k}{5}$

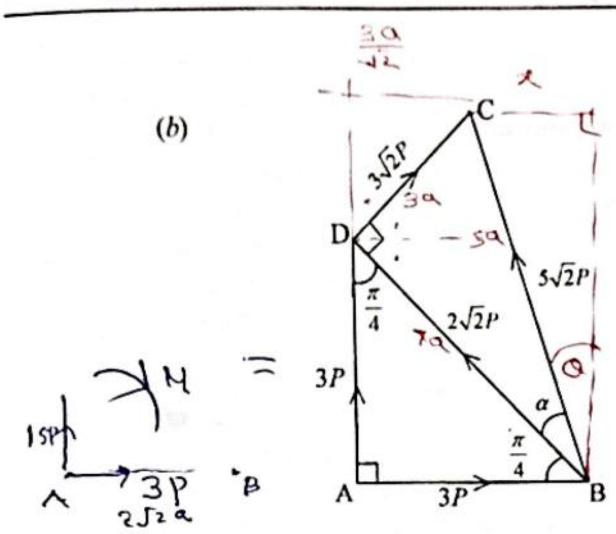
$(\mu+1) = \frac{11}{5}k$

20

$x = 2\sqrt{2}a - \frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{2}\,5a} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

(b)



$BD = \sqrt{8a^2 + 8a^2} = 4a$

$BC = 5a$

$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{4}{5} \\ \sin\alpha = \frac{3}{5}.\end{array}\right\}$ (5)

$\uparrow \beta P = 3P + 2\sqrt{2}P\sin\frac{\pi}{4} + 3\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4} + 5\sqrt{2}P\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ (10) ද. පැ. සඳහා

$= 3P + 2P + 3P + 5\sqrt{2}P\left\{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right\}$ (5)

$= 8P + 5\sqrt{2}P\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{5}\right\}$ (5)

$= 15P.$

$\therefore \beta = 15.$ (5)

$\rightarrow \alpha P = 3P - 2\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4} + 3\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4} - 5\sqrt{2}P\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ (10) ද. පැ. සඳහා

$= 3P - 2P + 3P - 5\sqrt{2}P\left\{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right\}$ (5)

$= 4P - 5\sqrt{2}P\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{5}\right\}$ (5)

$= 3P.$

$\therefore \alpha = 3.$ (5)

$A \circlearrowleft$

$M = -3\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4}\times 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}P\sin\frac{\pi}{4}\times 2\sqrt{2}a + 5\sqrt{2}P\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\times 2\sqrt{2}a$ (15) ද. පැ. සඳහා

වරදී ① ට ⑤ } අඩු කරනවා
වරදී ② ට ⑩ }

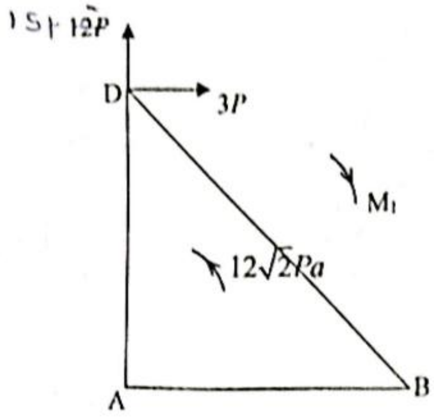
$= 2\sqrt{2}a\{-3P + 2P + 7P\}$

$= 12\sqrt{2}Pa.$ (5)

75

$B \circlearrowleft = 3P \times 2\sqrt{2}a + 3\sqrt{2}P \times 4a - 15P \times 2\sqrt{2}a$

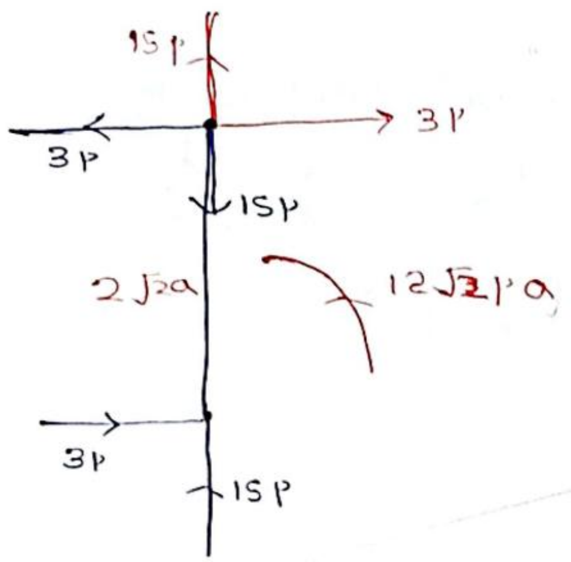
එකතු කළ යුග්මයෙහි ඝූර්ණය M_1 යැයි ගනිමු.



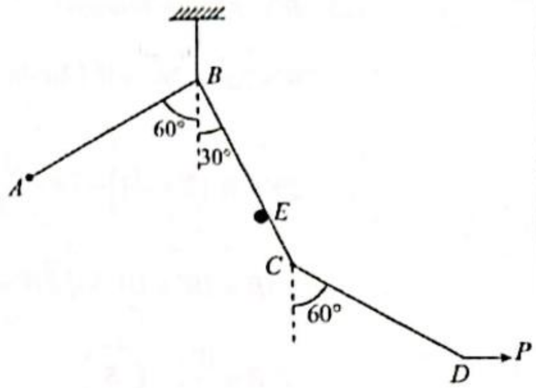
D $\quad 3P\times 2\sqrt{2}a+12\sqrt{2}Pa-M_1=0$ $\quad$ 10 or ⊙

$\therefore M_1=18\sqrt{2}Pa.$ $\quad$ 5

15



15. (*a*) $4a$ සමාන දිගින් යුත් හා බර පිළිවෙළින් W, $2W$ හා W වන AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් B සන්ධියට ඈදා ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර, තිරස් සිවිලිමක් මත B ට සිරස්ව ඉහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයකට ඈදා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, AB හා CD දඬු එක එකක් සිරස සමග $60°$ ක කෝණයක් ද BC දණ්ඩ සිරස සමග $30°$ ක කෝණයක් ද සාදමින් හා තන්තුව තදව ඇතිව දඬු තුන සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ $BE = 3a$ වන පරිදි E හි ඇති අචල සුමට නාදැත්තක් මත BC දණ්ඩ තැබීමෙන් හා, D හිදී විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් යෙදීමෙනි.



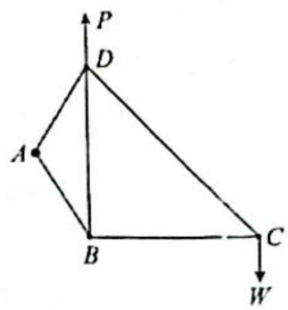
(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) නාදැත්ත මගින් BC දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\dfrac{W}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) තන්තුවෙහි ආතතිය සොයන්න.

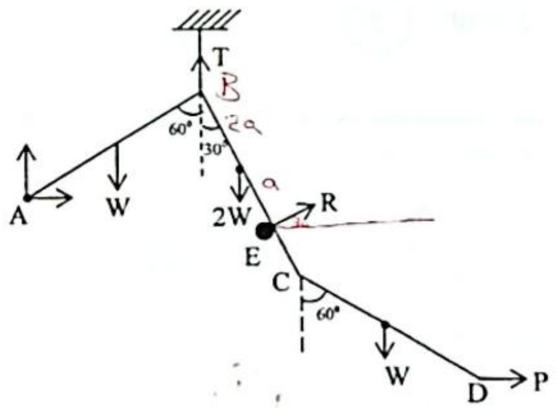
(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල, අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. $AB = AD = 2a$, $BC = BD = 2\sqrt{3}a$ හා $C\hat{B}D = \dfrac{\pi}{2}$ බව දී ඇත.

C සන්ධියේදී W බරක් එල්ලා, රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව අසවු කර, BC තිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ D සන්ධියේදී සිරස්ව උඩු අතට යෙදූ විශාලත්වය P වූ බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.



ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් සොයන්න.

(*a*)



එක වරදකට (-5)

(i) C ↶ CD සඳහා : $W \times 2a\sin 60^0 - P \times 4a\cos 60^0 = 0.$ (10)

$$\sqrt{3}W - 2P = 0$$

$$\therefore P = \frac{\sqrt{3}}{2}W. \quad (5)$$

$\boxed{15}$

එක වරදකට (5)
වරදවල් දෙකකට (10)

(ii) $B \curvearrowright$ BC හා CD සඳහා :

$$2W\times 2a\sin 30^0+W\left(4a\sin 30^0+2a\sin 60^0\right)-R\times 3a-P\times\left(4a\cos 30^0+4a\cos 60^0\right)=0.$$

(15)

$$2W+W\left(2+\sqrt{3}\right)-3R-\frac{\sqrt{3}}{2}W\left(2\sqrt{3}+2\right)=0. \quad (5)$$

$$\therefore 3R=2W+2W+\cancel{\sqrt{3}}W-3W-\cancel{\sqrt{3}}W$$

$$\therefore R=\frac{W}{3}. \quad (5)$$

$\boxed{25}$

(iii) $A \curvearrowright$ පද්ධතිය සඳහා :

වරද 1 කට (-5)
වරද 2 කට (-10)

$$W\times 2a\sin 60^0+2W\left(4a\sin 60^0+2a\sin 30^0\right)+$$

$$W\left(4a\sin 60^0+4a\sin 30^0+2a\sin 60^0\right)-P\left(4a\cos 30^0+4a\cancel{\cos}60^0-4a\cancel{\cos}60^0\right)-$$

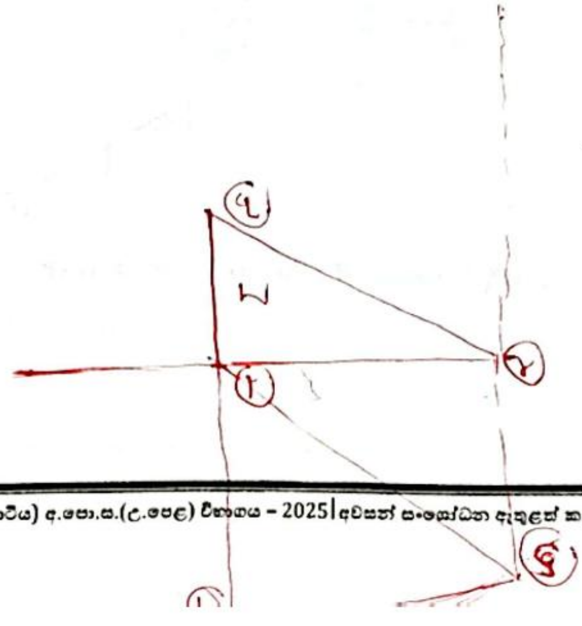
$$R\times 3a-T\times 4a\sin 60^0=0. \quad (20)$$

$$\therefore T\times 2\sqrt{3}=W\times\sqrt{3}+2W\left(2\sqrt{3}+1\right)+W\left(3\sqrt{3}+2\right)-\frac{\sqrt{3}W}{2}\left(2\sqrt{3}\right)-\frac{W}{3}\times 3 \quad (5)$$

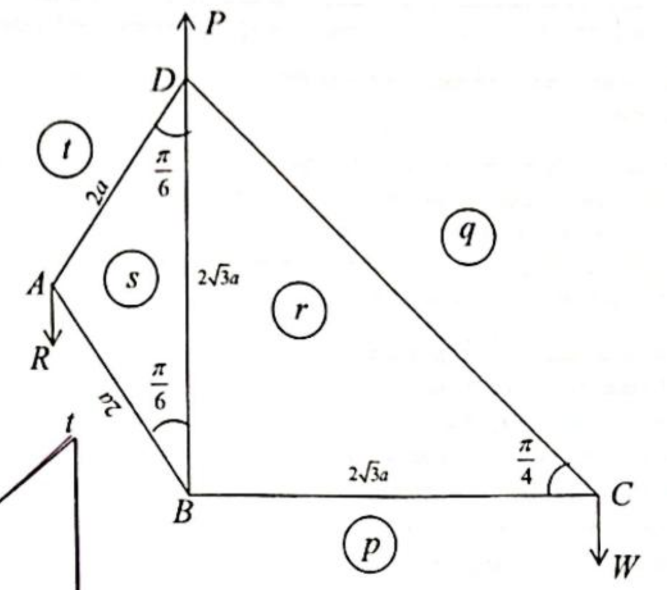
$$=8\sqrt{3}W$$

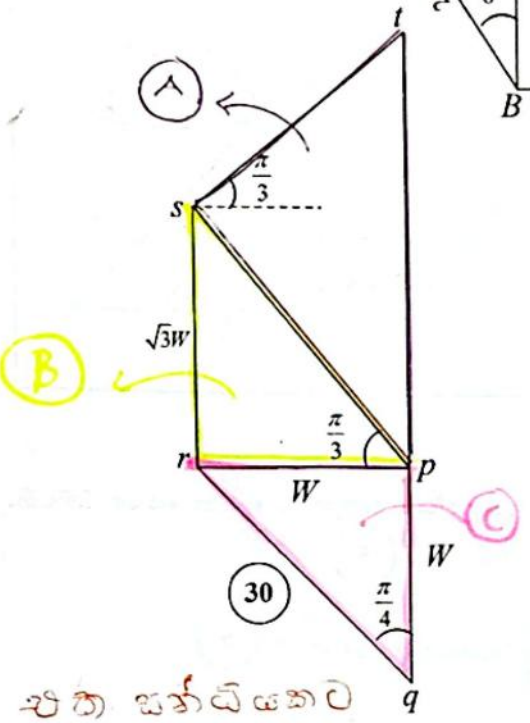
$$\therefore T=4W. \quad (5)$$

$\boxed{30}$



(b)





දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතතිය/තෙරපුම
BC	W 5	තෙරපුම 5
CD	$\sqrt{2}W$ 5	ආතතිය 5
BD	$\sqrt{3}W$ 5	ආතතිය 5
AB	$2W$ 5	තෙරපුම 5
AD	$2W$ 5	ආතතිය 5

50

එක සන්ධියකට
10 × 3

80

සන්ධි වෙනම ඇඳලා නම්
−5

ආතති තෙරපුම

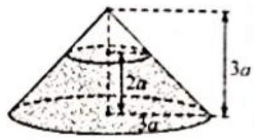
CD ($\sqrt{2}W$) BC (W)

BD ($\sqrt{3}W$) AB (2W)

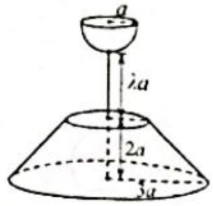
AD (2W)

16. අරය a වූ ඒකාකාර අර්ධගෝලාකාර කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් ද, උස h වූ ඝන ඒකාකාර සෘජු-වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{4}$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

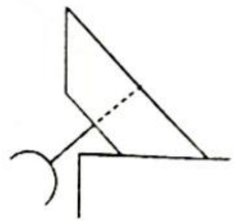
උස $2a$ වූ ඡින්නකයක් සාදා ඇත්තේ, පතුලේ අරය $3a$ හා උස $3a$ වන ඝන ඒකාකාර සෘජු-වෘත්තාකාර කේතුවකින්, එහි පතුලට සමාන්තර තලයක් හරහා කපා, කුඩා සෘජු-වෘත්තාකාර කේතුව ඉවත් කිරීමෙනි. (යාබද රූපය බලන්න). ඡින්නකය සෑදීම සඳහා ඉවත් කළ සෘජු-වෘත්තාකාර කේතුවේ ස්කන්ධය m වේ. ඡින්නකයේ ස්කන්ධය $26m$ බව පෙන්වන්න.

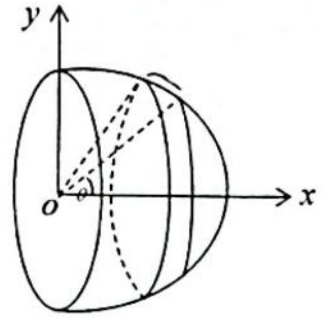


අරය a හා ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර අර්ධගෝලාකාර කබොලක් හා ඉහත ඡින්නකය, දිග λa හා ස්කන්ධය m වන ඒකාකාර දණ්ඩක අන්තවලට දෘඪ ලෙස සවි කර, යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත්තේ, දණ්ඩත්, අර්ධගෝලාකාර කබොලේ කේන්ද්‍රයත්, ඡින්නකයේ අක්ෂයත් යන සියල්ල එකම සරල රේඛාවක පිහිටන පරිදි ය. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, ඡින්නකයේ විශාල වෘත්තාකාර පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{56}(15+\lambda)a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



සංයුක්ත වස්තුව, තිරස් මේසයක් මත, ඡින්නකයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මේසය ස්පර්ශ කරමින් තබා ඇත. සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිතික අක්ෂය හරහා සිරස් හරස්කඩ යාබද රූපයේ දැක්වේ. සංයුක්ත වස්තුව සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, $\lambda \le \frac{11}{3}$ බව පෙන්වන්න.





සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, $x-$ අක්ෂය මත පිහිටයි.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු. 5

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta . a\cos\theta .\sigma a\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\, \sigma a\, d\theta} \quad 5 \quad 5$$

හරයට $2\pi a^2 \sigma$

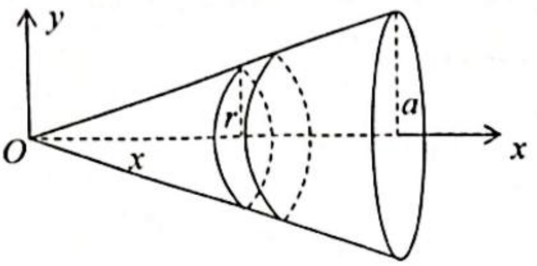
5 + 5

සීමාව වැරදි වට 10ක්ම නැ

$$= \frac{a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{a\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left.-\cos\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}} \quad 5 \quad 5 \qquad = \frac{a}{2}. \quad 5$$

30



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, $x-$ අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

$$\frac{r}{a} = \frac{x}{h}.$$

$$\bar{x} = \frac{\int_o^h \pi\left(\frac{ax}{h}\right)^2 .x\rho dx}{\int_o^h \pi\left(\frac{ax}{h}\right)^2 \rho dx}$$ 5 5

භාරයට $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ යෙදුවට (5)

$$= \frac{\int_o^h x^3 dx}{\int_o^h x^2 dx}$$

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_o^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_o^h} \quad = \frac{3h}{4}.$$ 5

5

$\therefore$ පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට G ට ඇති දුර $= h - \frac{3h}{4}$

$$= \frac{h}{4}.$$ 5

30

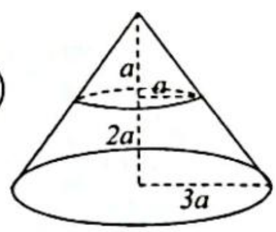
අනවශ්‍යයි.

5 $m = \frac{1}{3}\pi a^2 .a\rho$; මෙහි ρ යනු ඝනත්වය වේ.

පින්නකයෙහි ස්කන්ධය $= \frac{1}{3}\pi(3a)^2 . 3a\rho - m$ 5

$= 27m - m$

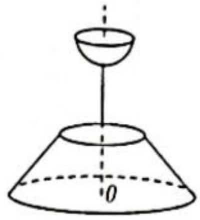
$= 26m.$ 5



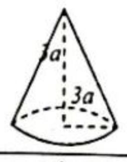
15

සමමිතියෙන්, S සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු. 5



 26m. $\frac{9a}{13}$

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්.කේ. ට O සිට දුර
	$27m$ 5	$\frac{3a}{4}$ 5
	m	$2a+\frac{a}{4}$ 5
	m	$2a+\frac{\lambda a}{2}$ 5
	m	$2a+\lambda a+\frac{a}{2}$ 10
S	$28m$ 5	$\bar{x}$

$\frac{9a}{4}$

$\frac{5a}{2}+\lambda a$

$$28m\,\bar{x} = 27m\times\frac{3a}{4} - m\left(2a+\frac{a}{4}\right) + m\left(2a+\frac{\lambda}{2}\right) + m\left(2a+\lambda a+\frac{a}{2}\right)$$ 10 or 0

$$28\bar{x} = \frac{81}{4}a - \frac{9a}{4} + \left(2+\frac{\lambda}{2}\right)a + \left(\frac{5}{2}+\lambda\right)a$$

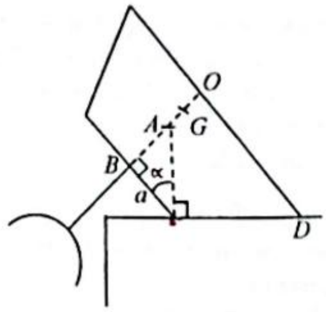
$$= \frac{72}{4}a + \frac{9a}{2} + \frac{3\lambda}{2}a$$

$$= \frac{90a}{4} + \frac{3\lambda}{2}a$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3}{56}(15+\lambda)a.$$ 10

60

ඡින්නකය ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට 10



සමතුලිතතාව සඳහා, $OG \leq OA$. 5

$B\hat{C}D = \frac{3\pi}{4}$.

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore AB = a$.

$\therefore OA = 2a - a = a$. 5

$\therefore \frac{3}{56}(15+\lambda)a \leq a$

$\therefore 45 + 3\lambda \leq 56$

$\therefore \lambda \leq \frac{11}{3}$. 5

15

17.(*a*) C පෙට්ටියක කළු පාට බෝල 2 ක් හා සුදු පාට බෝල 2 ක් අඩංගු වන අතර, D පෙට්ටියක කළු පාට බෝල 2 ක් හා සුදු පාට බෝල 1 ක් අඩංගු වේ. මෙම බෝල, පාටින් හැර අන් හැම අයුරකින්ම සමාන වේ. පළමුව, C පෙට්ටියෙන් එක බෝලයක් සසම්භාවී ලෙස D පෙට්ටිය තුළට මාරු කරනු ලැබේ. පසුව, D පෙට්ටියෙන් එක බෝලයක් සසම්භාවී ලෙස C පෙට්ටිය තුළට මාරු කරනු ලැබේ. දැන්, D පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) D පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් වීමේ,

(ii) D පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් බව දී ඇති විට, පළමුව C පෙට්ටියෙන් D පෙට්ටියට මාරු කළ බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

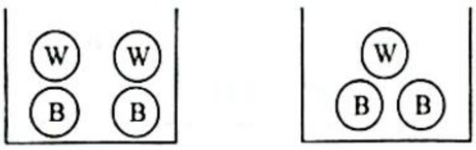
(*b*) බැංකුවක පාරිභෝගිකයින් 100 දෙනෙකුගේ වාර්ෂික ඉතුරුම්වල දත්ත ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙන් දෙයි.

ඉතුරුම්, රුපියල් දහස්වලින්	සංඛ්‍යාතය
10 – 30	35
30 – 50	40
50 – 70	15
70 – 90	10

ඉහත දත්ත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය, මාතය හා විචලතාවය සොයන්න.

දැන්, අමතර පාරිභෝගිකයින් x සංඛ්‍යාවක් දත්ත ව්‍යාප්තියට එකතු කරන අතර ඒ සියලුදෙනා තනි පන්ති ප්‍රාන්තරයකට අයත් වන බව සොයාගන්නා ලදී. පාරිභෝගිකයින් $(100 + x)$ දෙනාගේ වාර්ෂික ඉතුරුම්වල මධ්‍යන්‍යය රු. 40 000 බව දී ඇත. නව පාරිභෝගිකයින් x දෙනා අයත් වන පන්ති ප්‍රාන්තරය 30 – 50 බව පෙන්වන්න.

(*a*) (i)

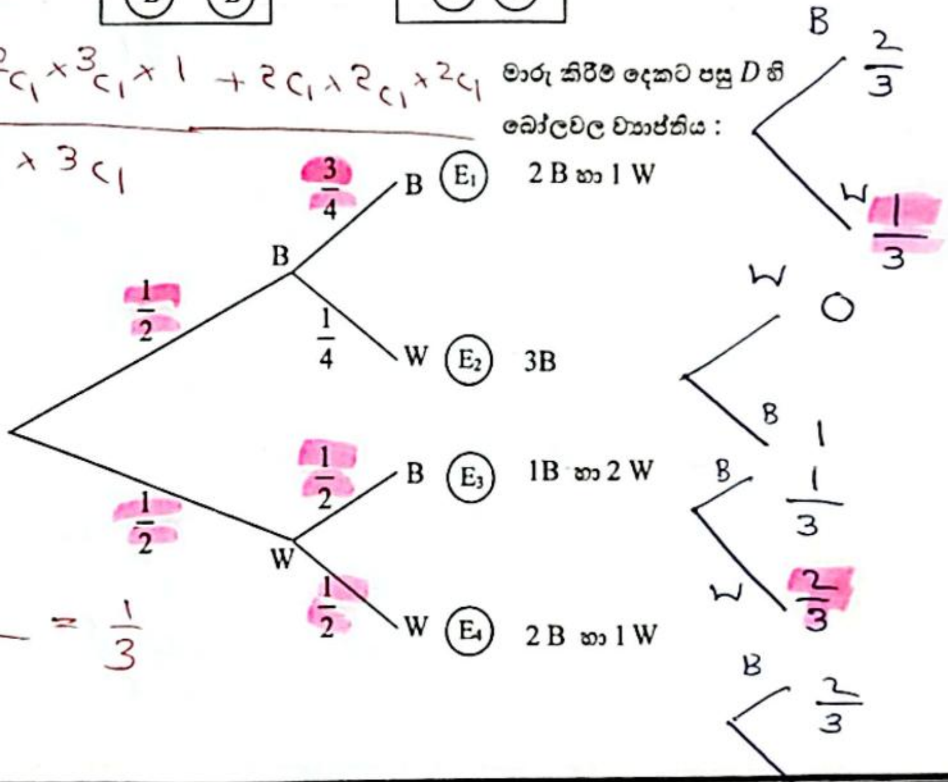


i)

$$\frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1 \times 1 + {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times 1 + {}^2C_1 \times {}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_1}$$

$$\frac{4 + 6 + 8}{48}$$

$$\frac{3}{8}$$



ii)

$$\frac{{}^2C_1 \times {}^3C_1 \times 1}{3/8} = \frac{1}{3}$$

W 1/3

X : D වලින් ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් වීම.

$$P(X) = P(X \cap E_1) + P(X \cap E_2) + P(X \cap E_3) + P(X \cap E_4)$$

$$= P(X|E_1).P(E_1) + P(X|E_2).P(E_2) + P(X|E_3).P(E_3) + P(X|E_4).P(E_4)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

10 10 10

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{3}{8}$$ 5

35

(ii)

Y : C වලින් D ට මාරු කළ බෝලය කළු පාට එකක් වීම.

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

$$P(X|Y) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$P(Y) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{P(X|Y).P(Y)}{P(X)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}$$ 10 5

$\frac{3}{8}$ නැතිව වෙන අගයන් තිබුනොත් $\frac{15}{20}$ ත්?

$$= \frac{1}{3}.$$ 5

20

(b)

පන්ති ප්‍රාන්තරය	f_i	x_i (5)	f_ix_i (5)	$f_ix_i^2$ (10)	
10 - 30	35	20	700	14000	5
30 - 50	40	40	1600	64000	5
50 - 70	15	60	900	54000	5
70 - 90	10	80	800	64000	5
	100		4000	196000	

* වගුවෙන් උපරිමය 20

මධ්‍යන්‍යය $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} f_2 \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{4} f_i} = \dfrac{4000}{100} = 40$ (දහස් වලින්) 10

මධ්‍යස්ථ පන්තිය $= 30 - 50.$

මධ්‍යස්ථය $= 30 + \dfrac{\left(\dfrac{100}{2} - 35\right)}{40} \cdot 20 = 37.5$ (දහස් වලින්) 10 5

මාත පන්තිය $= 30 - 50.$

මාතය $= L + \dfrac{\Delta_1}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \cdot c = 30 + \dfrac{5}{(5+25)} \cdot 20$ 10

$= 30 + \dfrac{10}{3} \approx 33.333$ (දහස් වලින්) 5

විචලතාව $= \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{x}^2$

$= \dfrac{196000}{100} - 40^2$ 10 වරදට අනුව 5

$= 1960 - 1600$

$= 360$ ((දහස්)^2 වලින්) 5

75

d යනු නව x පාරිභෝගිකයන් එකතු කරන ලද පංති ප්‍රාන්තරයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යයි ගනිමු.

නව මධ්‍යන්‍යය 40 (දහස් වලින්) බැවින්

$$(100+x)40 = d\cdot x + 40\times 100 \quad (10)$$

$$\therefore d = 40. \quad (5)$$

මධ්‍යන්‍යය වෙනස් නොවන බැවින් කියා ලියා ඇති විට ප්‍රමාණවත්.

$\therefore$ නව පාරිභෝගිකයින් අයත් වන පන්ති ප්‍රාන්තරය $30-50$. (5)

$\boxed{20}$

---

	x_i	f_i	y_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
$10-30$	20	35	-1	-35	35
$30-50$	40	40	0	0	0
$50-70$	60	15	1	15	15
$70-90$	80	10	2	20	40
		$\sum_{i=1}^{n} f_i = 100$		$\sum_{i=1}^{n} f_i y_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 = 90$

$$y_i = \frac{x_i - 40}{20} \qquad S_y^2 = \frac{S_x^2}{20^2}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{x} - 40}{20} \qquad \frac{90}{100}\times 400 = S_x^2$$

$$0 = \frac{\bar{x} - 40}{20} \qquad 360 = S_x^2$$

$$\bar{x} = 40$$