முழுப் பதிப்புரிமையுடையது

அந்தரங்கமானது

இலங்கை பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை – 2025

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக் கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்பட்டவுள்ளன.

பகுதி A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $9(2^n) < (n+3)!$ என நிறுவுக.

$n = 1$ ஆக, இ.ப $= 9.2^1 = 18$, வ.ப $= 4! = 24$,

எனவே இ.ப $<$ வ.ப.

இதிலிருந்து $n = 1$. இற்கு பேறு உண்மையாகும். 5

k யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் என்க. $n = k$ இற்கு பேறு உண்மையானது எனக் கொள்வோம்.

i.e. $9 \cdot 2^k < (k+3)!$ 5

$\therefore\ 9 \cdot 2^{k+1} < 2 \cdot (k+3)!$ 5

$< (k+4)(k+3)!$ $(\because 2 < k+4)$

$= (k+4)!$ 5

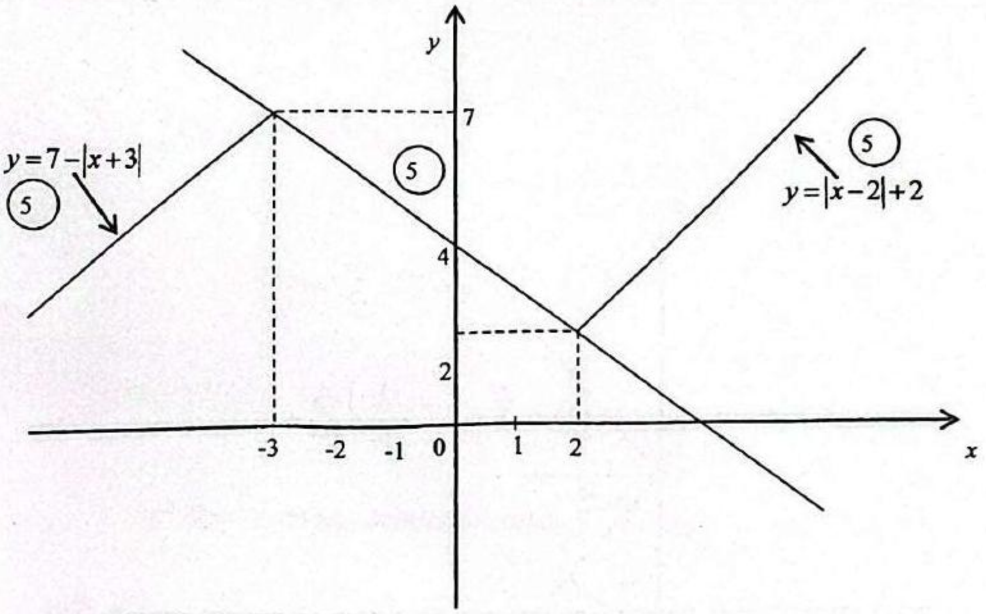
எனவே, $9 \cdot 2^{k+1} < (k+4)!$

ஆகவே $n = k$ இற்கு பேறு உண்மையானது எனின் $n = k+1$ இற்கும் பேறு உண்மையானது ஆகும்.

$n = 1$ இற்கு பேறு உண்மையானது என்று ஏற்கனவே நிறுவப்பட்டுள்ளது.

எனவே கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டின்படி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் பேறு உண்மையானது ஆகும். 5

2. $y=|x-2|+2$, $y=7-|x+3|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்திற் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து, சமன்பாடு $|x-2|+|x+3|=5$ ஐத் தீர்க்க.

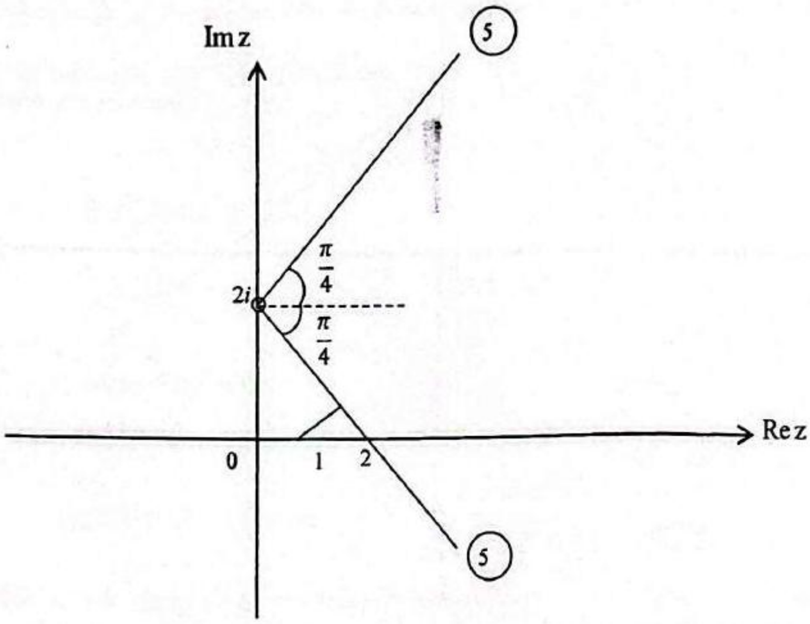


$|x-2|+|x+3|=5$

$\Leftrightarrow |x-2|+2=7-|x+3|$. 5

வரைபிலிருந்து, $-3 \le x \le 2$. 5

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், சமன்பாடு $\left|\operatorname{Arg}(z-2i)\right|=\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\left|\operatorname{Arg}(\bar{z}+2i)\right|=\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் z இற்கு $|z-1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.



$$\left.\begin{aligned}\left|\operatorname{Arg}(\bar{z}+2i)\right| &= \left|\operatorname{Arg}(\overline{z-2i})\right| \\ &= \left|\operatorname{Arg}(z-2i)\right|\end{aligned}\right\} \quad 5$$

$\therefore$ $\left|\operatorname{Arg}(\bar{z}+2i)\right|=\frac{\pi}{4}$ ஆனது $\left|\operatorname{Arg}(z-2i)\right|=\frac{\pi}{4}$ இற்கு சமமானது.

தேவையான இழிவுப் பெறுமானம் $=1\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ 10

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ ஓர் ஒற்றை நிறைவெண் எனக் கொள்வோம். $\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)^n$ இன் ஈறுப்பு விரியில் ஓர் x^2 உறுப்பு அடங்கியுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $n = 3$ எனக் காட்டி, x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க.

$$\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)^n = x^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n$$

$$= x^{\frac{n}{2}}\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r(-1)^r \frac{x^{\frac{r}{2}}}{n^r} \quad 5$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{n^r} \, {}^nC_r \, x^{\frac{n+r}{2}}$$

x^2 இன் குணகம் தேவையாதலால்

$$\frac{n+r}{2} = 2. \quad 5$$

$\therefore n+r = 4.$

எனவே $n \leq 4.$

$n \in \mathbb{Z}^+$ ஒற்றை எண் ஆதலால், $n=1$ அல்லது $n=3.$ 5

$n=1$ எனின் $r=3$ அத்துடன் $r \leq n.$ ஆதலால் இது பொருந்தாது.

$n=3$ எனின் $r=1$ இது பொருந்துகிறது.

$\therefore n=3.$ 5

x^2 இன் குணகம் $= \frac{(-1)}{3}\,{}^3C_1 = -1.$ 5

<u>வேறுமுறை</u>

$$\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)^{n}=\sum_{r=0}^{n}{}^{n}C_{r}\,x^{\frac{r}{2}}.\frac{(-1)^{n-r}}{n^{n-r}}.x^{n-r} \quad 5$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^{n-r}}{n^{n-r}}\,{}^{n}C_{r}\,x^{n-\frac{r}{2}}$$

x^2 இன் குணகம் தேவையாதலால்

$n-\frac{r}{2}=2.$ 5

$\therefore r=2n-4.$

$r\leq n$ ஆதலால், $n\leq 4.$

$n\in\mathbb{Z}^{+}$ ஒற்றை எண் ஆகையால், $n=1$ அல்லது $n=3.$ 5

$n=1$ எனின் $r=-2$ அத்துடன் இது பொருத்தமற்றது.

$n=3$ எனின் $r=2$ அத்துடன் இது பொருத்தமானது.

$\therefore n=3.$ 5

x^2 இன் குணகம் $=\frac{(-1)}{3}\,{}^{3}C_{2}=-1.$ 5

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{2x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\cos x}$$

5

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{4\cos x} \quad 5 + 5$$

$$=1\times 1^2\times\frac{2}{4} \quad 5$$

$$=\frac{1}{2}.$$

6. $k > 0$ எனக் கொள்வோம். $y=\left(e^{kx}-e^{-kx}\right)^2\sqrt{e^{kx}+e^{-kx}}$, $y=0$, $x=-\frac{1}{k}$, $x=\frac{1}{k}$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x-அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{2\pi}{5k}\left(e-\frac{1}{e}\right)^5$ எனக் காட்டுக.

தேவையான கனவளவு $= \pi \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \left(e^{kx}-e^{-kx}\right)^4\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)dx$ 5

$$= 2\pi \int_{0}^{\frac{1}{k}} \left(e^{kx}-e^{-kx}\right)^4\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)dx$$

$u = e^{kx}-e^{-kx}$. எனின் 5

$\frac{du}{dx} = k\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)$.

மற்றும் $x=\frac{1}{k} \Rightarrow u = e-\frac{1}{e}$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$$= 2\pi \int_{0}^{e-\frac{1}{e}} \frac{u^4}{k}du$$ 5

$$= 2\pi \frac{u^5}{5k}\Bigg|_{0}^{e-\frac{1}{e}}$$ 5

$$= \frac{2\pi}{5k}\left(e-\frac{1}{e}\right)^5.$$ 5

7. $t \in \mathbb{R}$ இற்கு $x = e^t - 2e^{-t}$, $y = 2e^t + e^{-t}$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் வளையி C எனக் கொள்வோம். $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}-1}{e^{2t}+2}$ எனக் காட்டுக.
வளையி C இற்கு அதன் மீது $x = 1$ ஐ நேரொத்த புள்ளியிலான தொடலியின் படித்திறனைக் காண்க.

$$x = e^t - 2e^{-t} \quad , \quad y = 2e^t + e^{-t}.$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t + 2e^{-t} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2e^t - e^{-t}. \quad 5$$

எனவே $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^t - e^{-t}}{e^t + 2e^{-t}} \quad 5$$

$$= \frac{2e^{2t} - 1}{e^{2t} + 2}.$$

$x = 1,$ ஆகும்போது $1 = e^t - 2e^{-t}.$ 5

எனவே, $e^{2t} - e^t - 2 = 0.$

$$\therefore \left(e^t + 1\right)\left(e^t - 2\right) = 0$$

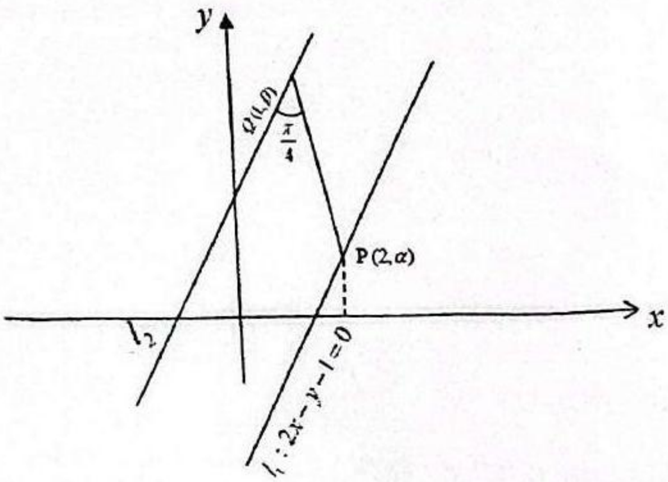
$$\therefore e^t = 2 \quad \left(\because e^t + 1 > 0\right) \quad 5$$

$$\therefore t = \ln 2.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\ln 2} = \frac{2 \times 2^2 - 1}{2^2 + 2} = \frac{7}{6}. \quad 5$$

$\therefore$ தேவையான படித்திறன் $= \frac{7}{6}.$

8. $P \equiv (2, \alpha)$ எனவும் $Q \equiv (1, \beta)$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. புள்ளி P ஆனது கோடு l_1: $2x - y - 1 = 0$ மீதுள்ளது. அத்துடன் புள்ளி Q ஆனது கோடு l_1 இற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோடு l_2 மீதும், PQ இற்கும் l_2 இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்குமாறும், உள்ளது. α , β ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$P = (2, \alpha)$ ஆனது நேர்கோடு l_1 மீது இருப்பதால் ,$4 - \alpha - 1 = 0$.

$\therefore \alpha = 3.$ 5

PQ இன் சாய்வு $= \alpha - \beta$ ← 5 இரண்டிற்கும்

l_1 ஆனது l_2 இற்கு சமாந்தரம் ஆகையால், l_2 இன் சாய்வு= 2

PQ இற்கும் l_2 இற்கும் இடையிலான கூர்ங்கோணம் $\frac{\pi}{4}$, ஆதலால்,

$$\left|\frac{\alpha - \beta - 2}{1 + 2(\alpha - \beta)}\right| = \tan\frac{\pi}{4} = 1. \quad 5$$

$$\therefore |1 - \beta| = |7 - 2\beta|$$

$1 - \beta = 7 - 2\beta$ அல்லது $1 - \beta = -7 + 2\beta$

$\therefore \beta = 6$ அல்லது $\beta = \frac{8}{3}.$

5 5

9. 4 அலகுகள் ஆரையை உடையனவும் மையங்கள் கோடு $4x-3y=0$ மீது இருப்பனவும் வட்டம் $x^2+y^2=1$ ஐ வெளியே தொடுவனவுமான வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தேவையான வட்டத்தின் மையம் (a,b).என்க.

அதன் ஆரை $=4$.

இந்த மையம் (a,b). ஆனது $4x-3y=0$ எனும் நேர்கோட்டின் மேல் கிடப்பதால்

$$4a-3b=0. \quad (5)$$

$$\therefore b=\frac{4a}{3}.$$

இவ்வட்டமானது $x^2+y^2=1$ எனும் வட்டத்தினை வெளிப்புறமாக தொடுவதால்,

மையங்களுக்கிடையேயான தூரம் = ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை ---------(1)

$x^2+y^2=1$ எனும் வட்டத்தின் மையம் $(0,0)$ மற்றும் ஆரை 1. (5)

(1) இலிருந்து $\sqrt{a^2+b^2}=4+1$. (5)

$$\therefore a^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=5^2$$

$$\therefore a^2=9 \text{ மற்றும் } a=\pm 3 \quad (5)$$

$a=3$ ஆகையில் $b=4$ உம் $a=-3$ ஆகையில் $b=-4$ உம் ஆகும்

விடை : $\left.\begin{matrix}(x-3)^2+(y-4)^2=16\\(x+3)^2+(y+4)^2=16\end{matrix}\right\}$ (5)

r , s என்பவற்றை மூலங்களாக கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $x^2-(r+s)x+rs=0$ --------- (1)
10

$$r+s=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}.$$ 5

$\alpha+\beta=2k$ மற்றும் $\alpha\beta=-(k^2+1)$ ஆதலால்
5 5

$$\therefore r+s=\frac{2k}{-2(k^2+1)}=-\frac{k}{(k^2+1)}.$$ 5

$$rs=\frac{1}{4\alpha\beta}=-\frac{1}{4(k^2+1)}.$$ 5

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $x^2+\frac{k}{(k^2+1)}x-\frac{1}{4(k^2+1)}=0$

i.e. $4(k^2+1)x^2+4kx-1=0.$

$$|r-s|=\left|\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2\beta}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{2|\alpha\beta|}.$$ ---------(2) 5

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=(2k)^2+4(k^2+1)$$ 5

$$=8k^2+4.$$

$$\therefore|\alpha-\beta|=2\sqrt{2k^2+1}.$$ 5

$$(2)\Rightarrow|r-s|=\frac{2\sqrt{2k^2+1}}{2(k^2+1)}=\frac{\sqrt{2k^2+1}}{(k^2+1)}.$$ 5

55

இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் x- ஆள்கூறுகள் $x^3+9x^2+3x+1=x^3+x^2-x+2$ இன் மூலங்களினால் தரப்படும். 5

இதிலிருந்து $8x^2+4x-1=0.$

இச்சமன்பாடு $k=1$ ஆகும்போது சமன்பாடு $4(k^2+1)x^2+4kx-1=0$ இனை ஒத்தது. 5

$\therefore$ தேவையான தூரம் $=|r-s|$, $k=1$. ஆகையில்

5

(b)(i) $(x-a)$ ஆனது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி என்க.

எனவே $p(x)=(x-a)\,q(x)$, இங்கு $q(x)$ ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். 5

$\therefore\ p'(x)=q(x)+(x-a)q'(x)$. 5

இதிலிருந்து, $p(x)-(x-a)p'(x)=\cancel{p(x)}-\cancel{(x-a)q(x)}-(x-a)^2q'(x)$

$=-(x-a)^2q'(x)$ 5

$=(x-a)^2s(x)$, இங்கு $s(x)=-q'(x)$ ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். 5

20

(ii) $g(2)=0\Rightarrow 8-4\lambda-4=0\Rightarrow \lambda=1$. 5 5

$g(1)=-3\Rightarrow 1-\lambda-2+3+\mu-2=-3\Rightarrow \mu=-2$ 5 5

20

$p(x)=x^3-x^2-2x$. என கருதுவதால் $p'(x)=3x^2-2x-2$ 5

$\therefore\ g(x)=p(x)-(x-2)p'(x)$. 5

(i) இலிருந்து, $g(x)=(x-2)^2q(x)$, இங்கு $q(x)$ ஒரு பல்லுறுப்பியாகும்.

$\therefore\ (x-2)^2$ என்பது $g(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். 5

15

வேறுமுறை

(i) இலிருந்து, $g(x)-(x-2)g'(x)=(x-2)^2s(x)$, இங்கு $s(x)$ ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். 5

$\therefore\ g(x)-(x-2)\left[\cancel{3x^2-2x-2}-(x-2)(6x-2)-\cancel{(3x^2-2x-2)}\right]=(x-2)^2s(x)$ 5

$\therefore\ g(x)=(x-2)^2(s(x)+6x-2)$

$\Rightarrow (x-2)^2$ என்பது $g(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும் 5

15

---

12. (a) ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட ஐந்து புத்தகங்களை A, B, C என்ற மூன்று மாணவர்களிடையே விநியோகித்தல் வேண்டும்.

(i) A இற்குச் செப்பமாக 2 புத்தகங்களும் B இற்குச் செப்பமாக 2 புத்தகங்களும் C இற்குச் செப்பமாக 1 புத்தகமும்

(ii) ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் குறைந்தபட்சம் 1 புத்தகமேனும்

கிடைக்கத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{7r+4}{r(r+1)(r+2)}$, $f(r) = \dfrac{A}{r}$, $g(r) = \dfrac{B}{r+1}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு A, B ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = [f(r) - f(r+2)] + [g(r) - g(r+1)]$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{9}{2} - \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{5}{n+2}$ எனக் காட்டுக.

மேலும், முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{2n} U_r + m \sum_{r=1}^{n-1} U_{n-r} \right) = 18$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக மெய்ம் மாறிலி m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(a)(i)

A	B	C
2	2	1

விடை $= {}^5C_2 \times {}^3C_2 \times {}^1C_1$ (5)

(5) (5) (5)

$= \dfrac{5!}{2!3!} \times 3 \times 1 = 10 \times 3 = 30$ (5)

25

(ii.)

A	B	C	வேறுபட்ட வழிகளின் எண்ணிக்கை
2	2	1	${}^5C_2 \times {}^3C_2 \times {}^1C_1 = 30$ 5
2	1	2	${}^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^2C_2 = 30$ 5
1	2	2	${}^5C_1 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 30$ 5
3	1	1	${}^5C_3 \times {}^2C_1 \times {}^1C_1 = 20$ 5
1	3	1	${}^5C_1 \times {}^4C_3 \times {}^1C_1 = 20$ 5
1	1	3	${}^5C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_3 = 20$ 5

மொத்த வேறுபட்ட வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 90 + 60 = 150$ 5

35

(b) $u_r = \dfrac{7r+4}{r(r+1)(r+2)}, \; f(r) = \dfrac{A}{r}, \; g(r) = \dfrac{B}{r+1}.$

$$u_r = [f(r) - f(r+2)] + [g(r) - g(r+1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{7r+4}{r(r+1)(r+2)} = \left(\frac{A}{r} - \frac{A}{r+2}\right) + \left(\frac{B}{r+1} - \frac{B}{r+2}\right) \quad 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 7r+4 = A(r+1)(r+2) - (A+B)r(r+1) + Br(r+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 7r+4 = (2A+B)r + 2A \; , \; r \in \mathbb{Z}^+ \quad 5$$

$\Leftrightarrow 2A + B = 7$ மற்றும் $2A = 4$

$\Leftrightarrow$ $A = 2$ மற்றும் $B = 3$

5 5

25

$$\therefore f(r)=\frac{2}{r} \quad \text{மற்றும்} \quad g(r)=\frac{3}{r+1}.$$

$$U_1 = f(1)-\cancel{f(3)}+g(1)-\cancel{g(2)}$$
$$U_2 = f(2)-\cancel{f(4)}+\cancel{g(2)}-\cancel{g(3)} \quad 10$$
$$U_3 = \cancel{f(3)}-\cancel{f(5)}+\cancel{g(3)}-\cancel{g(4)}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U_{n-2} = \cancel{f(n-2)}-\cancel{f(n)}+\cancel{g(n-2)}-\cancel{g(n-1)}$$
$$U_{n-1} = \cancel{f(n-1)}-f(n+1)+\cancel{g(n-1)}-\cancel{g(n)} \quad 10$$
$$U_n = \cancel{f(n)}-f(n+2)+\cancel{g(n)}-g(n+1)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} u_r = f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)+g(1)-g(n+1) \quad 10$$

$$=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{n+2} \quad 5$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}. \quad 5$$

40

5

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}\right)$$

$$=\frac{9}{2}. \quad 5$$

$\therefore$ முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ஒருங்குகின்றது அத்துடன் கூட்டுத்தொகை $\frac{9}{2}$ ஆகும். 5

15

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{2n} u_r + m\sum_{r=1}^{n-1} u_{n-r}\right)=18$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n} u_n + m\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1} u_r = 18 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{2}+m\times\frac{9}{2}=18$$

$$\Leftrightarrow \quad m=3. \quad 5$$

10

---

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4+a & 7 \\ 6 & 7 \\ 3a & 4 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

A^{-1} இருக்கத்தக்கதாக a இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

AB ஐ a இற் காண்க.

$B^T A^T = C$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

a இன் இப்பெறுமானத்திற்கு, $A - A^{-1} = 3I$ எனக் காட்டுக; இங்கு I ஆனது வரிசை 2 இன் சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(b) $w = -\dfrac{\sqrt{2}(3+i)}{(1+2i)}$ எனக் கொள்வோம். $|w| = 2$ எனவும் $\text{Arg}\, w = \dfrac{3\pi}{4}$ எனவும் காட்டுக.

$|z| = 2$ ஆகவும் $\text{Arg}\, z = \dfrac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $z \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

மேலும், ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தின் மீது A, B ஆகியன முறையே z , w என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கும் புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். $AB^2 = 8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ எனக் காட்டுக.

AB இன் நடுப்புள்ளி C எனக் கொள்வோம். முக்கோணி AOC ஐப் பயன்படுத்தி, $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{24}\right) = \dfrac{1}{8}\left(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$ என உய்த்தறிக; இங்கு O ஆனது உற்பத்தியாகும்.

(c) $m \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். $(1 + \sqrt{3}\,i)^{3m}(1 + i)^8 = 2^{3m+4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

m இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

$(a)\ A^{-1}$ உண்டு $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2 - 3a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq \dfrac{2}{3}.$ 5

$\boxed{10}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+a & 2+4a & 3a \\ 7 & 7 & 3a+1 \end{pmatrix}$$ 10

$\boxed{10}$

---

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x^2+x+p}{(x-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p \in \mathbb{R}$ ஆகும். $y = f(x)$ இன் வரைபானது, x-ஆள்கூறு $-\dfrac{1}{3}$ ஆன ஒரு புள்ளியில், அதன் கிடை அணுகுகோட்டினை இடைவெட்டுகின்றது எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $p = 2$ எனக் காட்டுக.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ இற்கு $f'(x) = -\dfrac{3x+5}{(x-1)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அத்துடன், $y = f(x)$ இன் வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதி $f''(x)$ ஆனது $\mathbb{R} - \{1\}$ இற்கு $f''(x) = \dfrac{6(x+3)}{(x-1)^4}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

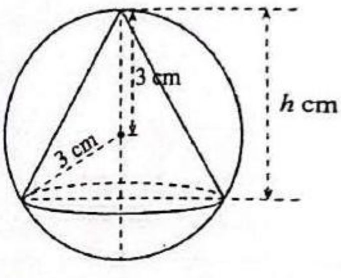
$y = f(x)$ இன் வரைபுக்கு $(-3, \frac{1}{2})$ இல் ஒரு விபத்திப் புள்ளி உண்டு எனக் காட்டுக.

திரும்பற் புள்ளி, அணுகுகோடுகள், விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு, 3 cm ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தில் ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு உள்வரையப்படவேண்டியுள்ளது.

கூம்பின் உயரம் h cm எனக் கொள்வோம். கூம்பின் கனவளவு V cm^3 ஆனது $V = \dfrac{\pi}{3}\left(6h^2 - h^3\right)$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

மேலும், கோளத்தில் உள்வரையப்படத்தக்க மிகப் பெரிய அத்தகைய கூம்பானது $h = 4$ ஆக இருக்கும்போது பெறப்படுகின்றது எனவும் காட்டுக.



(*a*) $f(x) = \dfrac{x^2+x+p}{(x-1)^2}$; $x \neq 1$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$ 5

$\therefore$ கிடை அணுகுகோட்டின் சமன்பாடு $y = 1.$ 5

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1.$ என தரப்பட்டுள்ளதால் 5

$$\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + p}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 1 \quad 5$$

$$\therefore p - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

$\therefore p = 2.$ 5

25

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(x-1)^2(2x+1)-(x^2+x+2)2(x-1)}{(x-1)^4}$$ 10

$$=\frac{(x-1)(2x+1)-2(x^2+x+2)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2x^2-x-1-2x^2-2x-4}{(x-1)^3}$$

$$=-\frac{(3x+5)}{(x-1)^3}$$, இங்கு $x\neq 1$. 5

15

$f'(x)=0 \iff x=\frac{-5}{3}$. 5

	$-\infty<x<\frac{-5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	$1<x<\infty$	
$f'(x)$ இன் குறி	$(-)$	$(+)$	$(-)$	10 3 வகைகளுக்கும் 5 ஏதாவது 2 க்கு
$f(x)$ ஆனது	குறைவடைகின்றது	அதிகரிக்கின்றது	குறைவடைகின்றது	10 3 வகைகளுக்கும் 5 ஏதாவது 2 க்கு

$f(x)$ குறைவடையும் ஆயிடைகள் $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]$ மற்றும் $(1,\infty)$.

$f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடை $\left[-\frac{5}{3},1\right)$.

25

$$f\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^2-\frac{5}{3}+2}{\left(\frac{-5}{3}-1\right)^2}=\frac{\frac{25}{9}-\frac{5}{3}+2}{\frac{64}{9}}=\frac{28}{64}=\frac{7}{16}.$$ 5

5

திரும்பற்புள்ளியின் ஆள்கூறு $=\left(-\frac{5}{3},\frac{7}{16}\right)$. 5

15

$x \neq 1$ இற்கு $f''(x) = \dfrac{6(x+3)}{(x-1)^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3.$ 5

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 1$
$f''(x)$ இன் குறி	(−)	(+)
குழிவு	கீழ்முக குழிவானது	மேல்முக குழிவானது

5 + 5 (for the sign row)

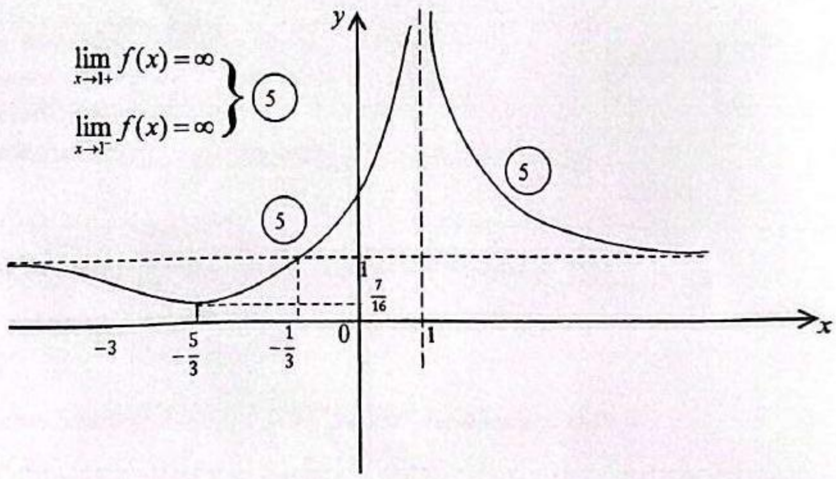
5 இரண்டிற்கும் (for the குழிவு row)

$f(-3) = \dfrac{9-3+2}{16} = \dfrac{1}{2}.$ 5

$\therefore$ $y = f(x)$ இன் வரைபானது $\left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ இல் விபத்திப் புள்ளியைக் கொண்டிருக்கின்றது

25

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty\end{array}\right\}$ 5

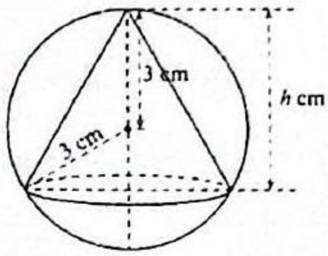


15

(b) கூம்பின் அடியின் ஆரை

$$=\sqrt{3^2-(h-3)^2} \quad 5$$

$$=\sqrt{6h-h^2}$$



$$V=\frac{1}{3}\pi\left(6h-h^2\right)\times h$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(6h^2-h^3\right)\ ;\ h>0. \quad 5$$

10

$$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}(12h-3h^2)=\pi(4-h)h$$

5

$$\frac{dV}{dh}=0 \Leftrightarrow h=4\ \ (\because h>0)$$

5 5

$0<h<4$ ஆகும்போது $\frac{dV}{dh}>0$ ஆகும்.

$h>4$. ஆகும்போது $\frac{dV}{dh}<0$ ஆகும்.

$\therefore V$ இன் உயர்வுப்பெறுமானம் $h=4$. ஆகும்போது பெறப்படுகின்றது 5

20

---

15. (a) $k \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். $\int \frac{\sqrt{x}}{(1-k^2x)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ இற்கு $\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)\right\} = \frac{2}{\cos 2x}$ எனக் காட்டுக.

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int (\cos 2x)\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)dx$ ஐக் காண்க.

(c) சூத்திரம் $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி, இங்கு a ஒரு மாறிலி.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx$$ எனக் காட்டுக.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx = \frac{\pi}{12}$$ என உய்த்தறிக.

(a) வகை (i): $k \neq 0$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1-k^2x)}\,dx$$

$u = \sqrt{x}$ என பிரதியீடு செய்வதால் 5

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ மற்றும் $dx = 2\sqrt{x}\,du$ 5

$$= \int \frac{u}{(1-k^2u^2)}.2u\,du \quad 5$$

$$= 2\int \frac{u^2}{(1-k^2u^2)}\,du$$

$$= \frac{2}{-k^2}\int \frac{1-k^2u^2-1}{(1-k^2u^2)}\,du \quad 5$$

$$= \frac{-2}{k^2}\int \left\{1 - \frac{1}{(1-ku)(1+ku)}\right\}du \quad 5$$

$$= \frac{-2}{k^2}\int \left\{1 - \frac{\frac{1}{2}}{1-ku} - \frac{\frac{1}{2}}{1+ku}\right\}du \quad 5 + 5$$

$$= \frac{-2}{k^2}\left\{u + \frac{1}{2k}\ln|1-ku| - \frac{1}{2k}\ln|1+ku|\right\} + C,$$ இங்கு C ஒரு எதேச்சை மாறிலி. 5

5 5

$$=\frac{-2}{k^2}\left\{\sqrt{x}+\frac{1}{2k}\ln\left|1-k\sqrt{x}\right|-\frac{1}{2k}\ln\left|1+k\sqrt{x}\right|\right\}+C. \quad 5$$

வகை (ii): $k = 0$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1-k^2x}dx=\int\sqrt{x}\,dx \quad 5$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1,$$ இங்கு C_1 ஒரு எதேச்சை மாறிலி. 5

65

(b) $$\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)\right\}=\frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)}\cdot\frac{\cos 2x(2\cos 2x)+(1+\sin 2x)2\sin 2x}{\cos^2 2x} \quad 10$$

$$=\frac{2(\cos^2 2x+\sin 2x+\sin^2 2x)}{(1+\sin 2x)\cos 2x}$$

$$=\frac{2(1+\sin 2x)}{(1+\sin 2x)\cos 2x} \quad 5$$

$$=\frac{2}{\cos 2x}. \quad 5$$

20

$$\int(\cos 2x)\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)dx$$

$$=\frac{\sin 2x}{2}\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)-\int\frac{\sin 2x}{2}\cdot\frac{2}{\cos 2x}dx \quad 10$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x.\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C,$$ இங்கு C ஒரு எதேச்சை மாறிலி. 10

20

$$(c)\quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)}dx \quad (10)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin x}dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx \quad (5)$$

25

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x}{\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{12} \quad (5)$$

20

---

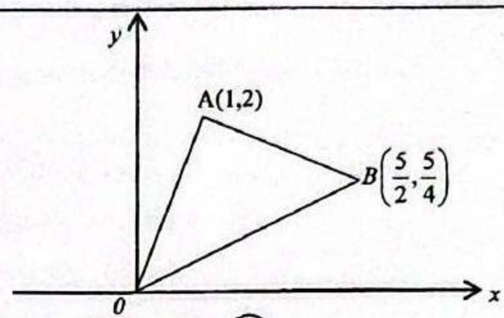
16. O உற்பத்தி எனவும் $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ எனவும் கொள்வோம். $A\hat{O}B$, $O\hat{A}B$ ஆகிய கோணங்களின் கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு, இக்கோண இருகூறாக்கிகள் புள்ளி $D \equiv \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ இல் இடைவெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

D இலிருந்து கோடு OA இற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

முக்கோணி OAB இன் எல்லா மூன்று பக்கங்களையும் தொடும் வட்டம் C_1 இன் சமன்பாட்டினை எழுதுக.

வட்டம் C_1 ஆனது OA, AB ஆகியவற்றை முறையே E, F ஆகிய புள்ளிகளில் தொடுகின்றது எனக் கொள்வோம். A, E, F ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டம் C_2 இன் சமன்பாடு $4x^2 + 4y^2 - 9x - 13y + 15 = 0$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

C_1, C_2 ஆகிய வட்டங்களின் இடைவெட்டு நிமிர்கோணமானதா எனத் துணிக.



OA இன் சமன்பாடு : $y = 2x$ 5

OB இன் சமன்பாடு : $2y = x$ 5

$A\hat{O}B$ இன் கோண இருகூறாக்கிக்கு,

$$\frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} = \frac{|2y-x|}{\sqrt{5}}. \quad 10$$

$\therefore y-2x = \pm(2y-x)$

$\therefore y-2x = 2y-x$ அல்லது $y-2x = -(2y-x)$

$\therefore y+x = 0$ அல்லது $y-x = 0.$ 5

$(1, 2)$ இனை பிரதியிட : $y+x = 3 > 0$

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ இனை பிரதியிட $y + x = \frac{15}{4} > 0$

$\therefore$ $A\hat{O}B$ இன் கோண இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $y-x = 0.$ 5

நேர்கோடு AB இன் சமன்பாடு $y - 2 = \frac{\left(\frac{5}{4}-2\right)}{\left(\frac{5}{2}-1\right)}(x-1)$ 5

$$y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y+x-5 = 0 \quad 5$$

$O\hat{A}B$ இன் கோண இருசமகூறாக்கிக்கு

$$\frac{|2y+x-5|}{\sqrt{5}}=\frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} \quad 10$$

$$\therefore 2y+x-5=\pm(y-2x)$$

$$\therefore y+3x-5=0 \text{ அல்லது } 3y-x-5=0. \quad 5$$

$(0,0)$ இனை பிரதியிட : $y+3x-5=-5<0.$

$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$ இனை பிரதியிட : $y+3x-5=\frac{5}{4}+\frac{15}{2}-5>0.$

$\therefore O\hat{A}B$ இன் கோண இருசமகூறாக்கியின் சமன்பாடு $y+3x-5=0.$ 5

D இற்கு, $y-x=0$ மற்றும் $y+3x-5=0$:

$$\Rightarrow x=\frac{5}{4} \text{ மற்றும் } y=\frac{5}{4}. \quad 5$$

5

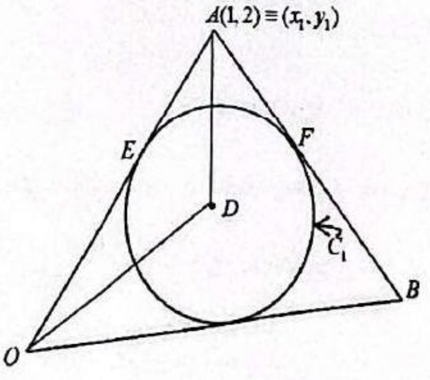
$$\therefore D\equiv\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right).$$

70

D இலிருந்து OA இற்கான செங்குத்துத் தூரம்

$$\frac{\left|\frac{5}{4}-2.\frac{5}{4}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}. \quad 10$$

10



வட்டம் C_1 இன் சமன்பாடு $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{16}.$ 10

i.e. $x^2+y^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{45}{16}=0$

10

EF ஆனது A இலிருந்து C_1 இற்கான தொடுநாண் ஆகும்.

$\therefore$ EF இன் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0.$

$$\text{i.e. } x + 2y - \frac{5}{4}(x+1) - \frac{5}{4}(y+2) + \frac{45}{16} = 0. \quad 10$$

$$16x + 32y - 20x - 20 - 20y - 40 + 45 = 0$$

$$-4x + 12y - 15 = 0.$$

$$4x - 12y + 15 = 0. \quad 5$$

$\therefore$ வட்டம் C_2 இன் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{45}{16} + \lambda(4x - 12y + 15) = 0, \quad 10$$

இங்கு λ துணியப்படவேண்டியது.

$A \equiv (1,2)$ ஆனது C_2 இன் மேல் கிடக்கின்றது

$$\therefore 1 + 4 - \frac{5}{2} - 5 + \frac{45}{16} + \lambda(4 - 24 + 15) = 0.$$

$$\frac{5}{16} - \lambda \times 5 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{16}. \quad 5$$

வட்டம் C_2 இன் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{45}{16} + \frac{4}{16}x - \frac{12}{16}y + \frac{15}{16} = 0.$$

$$16x^2 + 16y^2 - 40x - 40y + 45 + 4x - 12y + 15 = 0$$

$$16x^2 + 16y^2 - 36x - 52y + 60 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 9x - 13y + 15 = 0. \quad 10$$

40

C_1 இற்கு : $g=-\frac{5}{4}, f=-\frac{5}{4}, c=\frac{45}{16}$

C_2 இற்கு: $g'=-\frac{9}{8}, f'=-\frac{13}{8}, c'=\frac{15}{4}$

$$2gg'+2ff'=2\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)+2\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{13}{8}\right)=\frac{45}{16}+\frac{65}{16}=\frac{55}{8} \quad (10)$$

$$c+c'=\frac{45}{16}+\frac{15}{4}=\frac{105}{16}\neq 2gg'+2ff'. \quad (5)$$

(5)

∴ இடைவெட்டு நிமிர்கோணமானதல்ல.

20

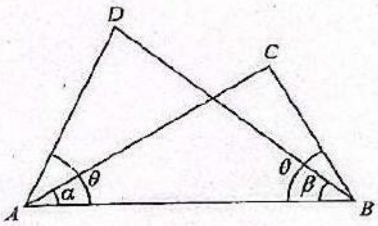
17. (a) $\sin(A+B)$ ஐ $\sin A, \sin B, \cos A, \cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ என உய்த்தறிக.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $\cot\theta - 2\tan\theta = \sin 2\theta$ ஐ வடிவம் $a\cos^4\theta + b\cos^2\theta + c = 0$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, c ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள்.

இதிலிருந்து, $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}$ எனக் காட்டுக.

(b) ஒரு தளத்தின் மீது A, B, C, D என்னும் நான்கு வேறுவேறான புள்ளிகள், $B\hat{A}D = A\hat{B}C = \theta$ ஆகவும் $3AD = 4BC$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன.



$B\hat{A}C = \alpha$ எனவும் $A\hat{B}D = \beta$ எனவும் கொள்வோம். (உருவைப் பார்க்க.)

சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி, $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)}$ எனக் காட்டுக.

$\cot\theta = 3\cot\alpha - 4\cot\beta$ என உய்த்தறிக.

(c) பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை x, y ஆகியவற்றுக்குத் தீர்க்க:

$\sin^{-1}\sqrt{x} = \cos^{-1}\sqrt{y}$

$\tan(\tan^{-1}3x - \tan^{-1}2y) + \tan(\tan^{-1}3y - \tan^{-1}2x) = 1.$

(a) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$ 5 **05**

$A = B = \theta.$ என்க.

$\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$ 5 **05**

$\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2}}$

$\cot\theta - 2\tan\theta = \sin 2\theta$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ 5

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ 5

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta - 2(1-\cos^2\theta) = 2(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta$ 10

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^4\theta + \cos^2\theta - 2 = 0.$ 5

$a = 2,\ b = 1$ and $c = -2.$ **25**

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$$, ஆனால் $\cos^2\theta > 0$.

10

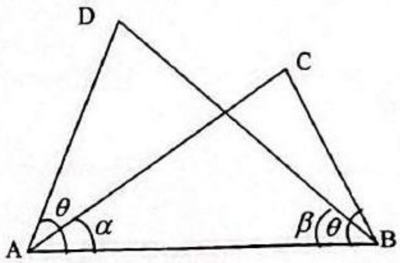
$$\therefore \cos^2\theta = \frac{\sqrt{17}-1}{4} \quad 5$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}} \quad (\because \cos\theta > 0)$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}. \quad 5$$

20

(b) ΔABC க்கு சைன் நெறியை பிரயோகிக்க:



$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(\pi-(\theta+\alpha))} \quad 10$$

$$= \frac{AB}{\sin(\theta+\alpha)} \quad \text{-------}(1)$$

5

ΔABD க்கு சைன் நெறியை பிரயோகிக்க:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\pi-(\theta+\beta))} \quad 10$$

$$= \frac{AB}{\sin(\theta+\beta)} \quad \text{------}(2)$$

5

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{BC}{AD}\times\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)} \quad 10$$

40

$$3AD = 4BC \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \quad \frac{3}{4} = \frac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)} \quad 5$$

$$4\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta) = 3\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha) \quad 10$$

$$\sin\theta\sin\alpha\sin\beta : 4\cot\beta + 4\cot\theta = 3\cot\alpha + 3\cot\theta$$

$$\therefore \cot\theta = 3\cot\alpha - 4\cot\beta. \quad 5$$

20

(c) $\sin^{-1}\sqrt{x} = \cos^{-1}\sqrt{y} = \alpha$ என கருதுவதால்

$\sin\alpha = \sqrt{x}$ மற்றும் $\cos\alpha = \sqrt{y}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. 5

$\Rightarrow x + y = 1$. -------(1) 5

$\therefore y = 1 - x$

$\tan(\tan^{-1}3x - \tan^{-1}2y) + \tan(\tan^{-1}3y - \tan^{-1}2x) = 1$

$$\frac{3x-2y}{1+3x\times 2y} + \frac{3y-2x}{1+3y\times 2x} = 1 \quad 10$$

(1) $\Rightarrow$

$3x - 2(1-x) + 3(1-x) - 2x = 1 + 6x(1-x)$ 5

$3x - \cancel{2} + 2x + \cancel{3} - 3x - 2x = \cancel{1} + 6x - 6x^2$

$6x(1-x) = 0$

$x = 0$ அல்லது $x = 1$ 5

$x = 0$ ஆகும்போது $y = 1$ மற்றும் $x = 1$ ஆகும்போது $y = 0$ $(\because(1))$

எனவே, $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ அல்லது $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$. 5

இரண்டு சோடிகளும் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் திருப்திசெய்கின்றன.

$\boxed{35}$

முழுப் பதிப்புரிமையுடையது

அந்தரங்கமானது

இலங்கை பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த. (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2025

10 - இணைந்த கணிதம் II

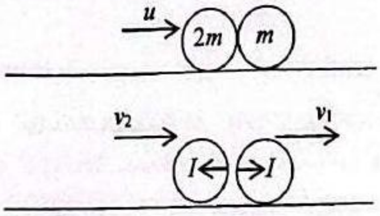
புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக் கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன.

பகுதி A

1. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை A ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஓய்வில் உள்ளது. மேசை மீது ஒரு கதி u உடன் இயங்கும் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை B ஆனது A உடன் நேரே மோதுகின்றது. A இற்கும் B இற்குமிடையே மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். மோதுகைக்குப் பின்னர் துணிக்கை A இன் கதி $\frac{2}{3}(1+e)u$ எனக் காட்டுக.
மோதுகையில் B இனால் A மீது உஞற்றப்படும் கணத்தாக்கின் பருமன் mu எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $e=\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.



தொகுதிக்கு $\underline{I} = \Delta(m\underline{V}) \rightarrow$

$$0 = mv_1 + 2mv_2 - 2mu \quad 5$$

$$\therefore v_1 + 2v_2 = 2u \quad \text{——— (1)}$$

நியூட்டனின் மீளமைவுவிதிப்படி :

$$v_1 - v_2 = eu \quad \text{——— (2)} \quad 5$$

(1) மற்றும் (2) $\Rightarrow 3v_1 = 2u + 2eu$

$$\therefore v_1 = \frac{2}{3}(1+e)u. \quad 5$$

A இற்கு, $\underline{I} = \Delta(m\underline{V}) \rightarrow$

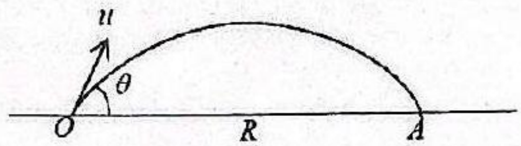
$$I = mv_1 \quad 5$$

$$\therefore mu = m.\frac{2}{3}(1+e)u$$

$$3 = 2 + 2e$$

$$\therefore e = \frac{1}{2}. \quad 5$$

2. ஒரு கிடைத் தரை மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையுடன் கோணம் θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ இல் தொடக்கக் கதி u உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்குகின்றது. எறிபடையின் கிடை வீச்சைக் கண்டு, அது $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$ எனின், $\theta=\frac{\pi}{6}$ அல்லது $\theta=\frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.



கிடைவீச்சு R என்க.

O இலிருந்து A வரை, $s=ut+\frac{1}{2}at^2 \rightarrow$

$$R=u\cos\theta\cdot T. \text{ ---------- } (1) \quad 5$$

$$\uparrow\ 0=u\sin\theta\cdot T-\frac{1}{2}gT^2 \quad 5$$

$$\Rightarrow T=\frac{2u\sin\theta}{g}.$$

$$(1)\Rightarrow R=u\cos\theta\cdot\frac{2u\sin\theta}{g} \quad 5$$

$$=\frac{2u^2}{g}\sin\theta\cos\theta.$$

$R=\frac{\sqrt{3u^2}}{2g}$ ஆதலால் $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}=\frac{2u^2}{g}\sin\theta\cos\theta$

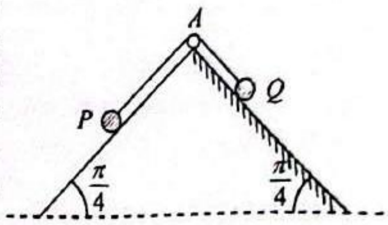
$$\therefore \sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 5$$

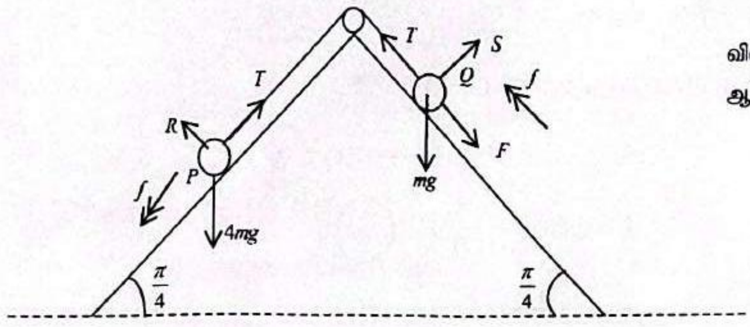
$$\therefore \sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{3}$$

$2\theta=\frac{\pi}{3}$ அல்லது $\frac{2\pi}{3}$ $\quad \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ அல்லது $\theta=\frac{\pi}{3}$. $\quad 5$

3. திணிவுகள் முறையே $4m$, m ஆன P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியா இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இழை, ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ இற் சாய்ந்த இரு நிலைத்த தளங்களின் உச்சியில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பி A இற்கு மேலாக செல்கின்றது. துணிக்கை P வைக்கப்பட்டுள்ள தளம் ஒப்பமானதும் துணிக்கை Q வைக்கப்பட்டுள்ள தளம் கரடானதுமாகும். Q இற்கும் கரட்டுத் தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். இழை இறுக்கமாகவும் இழையின் AP, AQ ஆகிய பகுதிகள் உரிய தளங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகள் வழியேயும் இருக்குமாறு துணிக்கைகள் பிடித்து வைக்கப்பட்டு, ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றன. P ஆனது தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. இழையின் இழுவையைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.





விசைகள் மற்றும் ஆர்முடுகல்களுக்கு 5

$$F = \frac{1}{2}S \quad 5$$

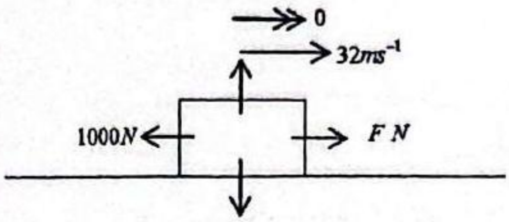
$F = ma$ இனை பிரயோகிக்க

P $\swarrow$ $4mg\sin\frac{\pi}{4} - T = 4mf$ 5

Q $\nwarrow$ $T - F - mg\sin\frac{\pi}{4} = mf$ 5

Q $\nearrow$ $S - mg\cos\frac{\pi}{4} = 0$ 5

4. திணிவு 1250 kg ஐ உடைய ஒரு மோட்டர்க் கார் ஒரு மாறாத் தடை 1000 N இற்கு எதிராக ஒரு நேர்க் கிடை வீதி மீது ஒரு மாறாக் கதி 32 m s^{-1} இற் செல்கின்றது. மோட்டர்க் காரின் எஞ்சினாற் பிறப்பிக்கப்படும் வலு 32 kW எனக் காட்டுக.
இப்போது மோட்டர்க் கார் கிடையுடன் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ இற் சாய்ந்த ஒரு நேர் வீதி வழியே கீழ்நோக்கி அம்மாறாத் தடைக்கு எதிராக இயங்குகின்றது. அதன் ஆர்முடுகல் 4 m s^{-2} ஆகவும் அதன் எஞ்சின் 20 kW வலுவில் தொழிற்படுவதாகவும் இருக்கும் கணத்தில் மோட்டர்க் காரின் கதியைத் துணிவதற்குப் போதுமானளவு சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$

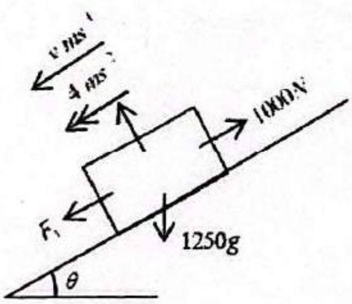
$F - 1000 = 0$ 5

$\therefore F = 1000$

வலு: $P = F \times 32$

$= 32 \times 1000\text{W}$ 5

$= 32\text{kW}.$



$\sin\theta = \frac{1}{5}$

புதிய $P = 20\text{kW}$

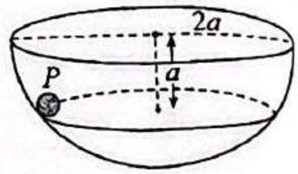
$= 20 \times 1000\text{W}$

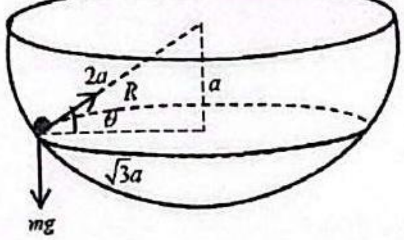
$20 \times 1000 = F_1 \times v$ 5

$\underline{F} = m\underline{a}$ இனை பிரயோகிக்க

✓ $F_1 - 1000 + 1250g\sin\theta = 1250 \times 4.$ 10

5. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஆரை $2a$ ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய அரைக்கோள ஓடு அதன் வட்ட விளிம்பு கிடையாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P இற்கு ஒரு கதி u ஆனது, ஓட்டின் உள் ஒப்பமான மேற்பரப்பு மீது ஓட்டின் வட்ட விளிம்பின் மையத்திற்குக் கீழே a தூரத்தில் மையம் இருக்கும் ஒரு கிடை வட்டத்தில் இயங்குமாறு, தரப்படுகின்றது. $u = \sqrt{3ga}$ எனக் காட்டுக.





$$\theta = \frac{\pi}{6}$$ 5

$\underline{F} = m\underline{a} \uparrow,\ R\sin\frac{\pi}{6} - mg = 0$ 5

$\therefore R = 2mg.$ 5

$\rightarrow R\cos\frac{\pi}{6} = m.\frac{u^2}{\sqrt{3}a}$ 5

$\cancel{2}\cancel{m}g \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{m}u^2}{\sqrt{3}a}$

$u^2 = 3ga$

$\therefore u = \sqrt{3ga}.$ 5

6. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ எனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{i} + \beta\,\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \gamma\,\mathbf{i} - \beta\,\mathbf{j}$ ஆகியன $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 1$ ஐத் திருப்தியாக்கும் இரு காவிகள் எனக் கொள்வோம். $\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 = 1$ எனக் காட்டுக. **a, b** ஆகிய காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\beta^2 = \alpha\gamma$ எனக் காட்டுக. $\alpha = \frac{1}{3}$ எனின், γ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\left.\begin{aligned} |\underline{a}|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ |\underline{b}|^2 &= \gamma^2 + (-\beta^2) = \gamma^2 + \beta^2 \end{aligned}\right\} \quad 5$$

$$|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta^2 = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 = 1. \text{---------}(1) \quad 5$$

$$\underline{a} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\gamma - \beta^2 = 0 \quad 5$$

$$\therefore \beta^2 = \alpha\gamma$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ எனின் $\beta^2 = \frac{\gamma}{3}. \Rightarrow \gamma > 0$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{9} + 2.\frac{\gamma}{3} + \gamma^2 = 1 \quad 5$$

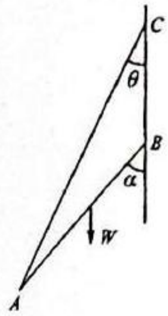
$$9\gamma^2 + 6\gamma - 8 = 0$$

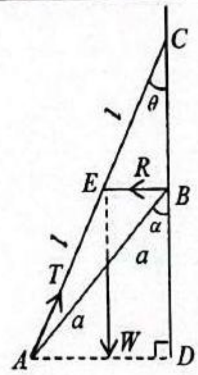
$$(3\gamma - 2)(3\gamma + 4) = 0$$

$\gamma = \frac{2}{3}$ அல்லது $\cancel{\gamma = -\frac{4}{3}}.$

$$\therefore \gamma = \frac{2}{3}. \quad 5$$

7. நிறை W ஐ உடைய ஒரு சீரான கோல் AB கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ஐ ஆக்கிக் கொண்டு நாப்பத்தில், முனை B ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே இருக்கும் ஒரு புள்ளி C இல் சுவருடன் இணைந்த ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் மற்றைய முனை A இல் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றது. இழை இறுக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை அது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குகின்றது. கோலும் இழையும் சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. $\tan\alpha = 2\tan\theta$ எனக் காட்டுக.





விசைகள் E இல் சந்திக்கின்றன. 5

B என்பது DC இன் நடுப்புள்ளி. 5

$EB = l\sin\theta = a\sin\alpha$ ------- (1) 5

$BC = l\cos\theta$

$BD = 2a\cos\alpha$

$BC = BD$

$\therefore l\cos\theta = 2a\cos\alpha$ ------- (2) 5

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}\tan\alpha$

$\therefore \tan\alpha = 2\tan\theta.$ 5

<u>வேறுமுறை</u>

$\rightarrow R = T\sin\theta$ 5

$\uparrow \quad T\cos\theta = w$ 5

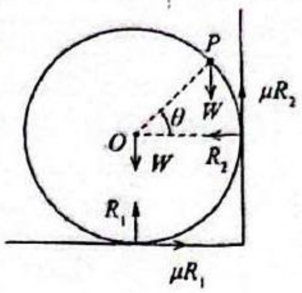
$\therefore R = w\tan\theta$ 5

A) $R\cdot 2a\cos\alpha = w.a\sin\alpha$ 5

$\Rightarrow w\tan\theta\times 2 = w\tan\alpha$

$\therefore \tan\alpha = 2\tan\theta.$ 5

8. நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது மையம் O, ஆரை a, நிறை W ஆகியவற்றை உடைய ஒரு சீரான, மெல்லிய, வட்டத் தட்டின் விளிம்புடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தட்டு ஒரு கரடான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரே ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீது ஓய்வில் உள்ளது. தட்டுக்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆவதோடு தட்டுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகமும் μ ஆகும். OP ஆனது கிடையுடன் கோணம் $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ஐ ஆக்கும்போது தட்டு எல்லை நாப்பத்தில் இருக்கின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. தட்டு மீது தாக்கும் விசைகள் உருவிற் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. $\cos\theta=\frac{2\mu(\mu+1)}{\mu^2+1}$ எனக் காட்டுக.



$\rightarrow R_2=\mu R_1$ ---------(1) 5

$\uparrow R_1+\mu R_2=2W$ 5

$\therefore R_1+\mu\cdot\mu R_1=2W$

$\therefore R_1=\frac{2W}{(1+\mu^2)}$ ---------(2) 5

$\overset{\curvearrowleft}{O})\ \mu R_1\cdot a+\mu R_2\cdot a-W\cdot a\cos\theta=0$ 5

$$\cos\theta=\frac{\mu(R_1+R_2)}{W}$$

$$=\frac{\mu(1+\mu)R_1}{W}$$ ((1)இலிருந்து)

$$=\frac{2\mu(1+\mu)}{(1+\mu^2)}.$$ ((2) இலிருந்து) 5

9. A, B, C ஆகியன, A உம் B உம் சாராதனவாகவும் B உம் C உம் தம்முட் புறநீக்குவனவாகவும் $P(B) = \frac{1}{5}$ ஆகவும் $P(A \cup B) = P(B \cup C)$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக, ஒரு மாதிரி வெளி Ω இல் உள்ள மூன்று நிகழ்வுகள் எனக் கொள்வோம். $P(C) = \frac{4}{5}P(A)$ எனக் காட்டுக.
$P(C|A) = 2P(A \cap C) \neq 0$ எனின், $P(C)$ ஐக் காண்க.

$$P(A \cup B) = P(B \cup C)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) + P(C) \quad 5$$

$$\Rightarrow P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(C)$$

5

$$\Rightarrow P(C) = \frac{4}{5}P(A) \quad 5 \quad \left(\because P(B) = \frac{1}{5}\right)$$

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = 2P(A \cap C)$$

5

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \qquad (\because P(A \cap C) \neq 0)$$

$$\therefore P(C) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \qquad \left(\because P(C) = \frac{4}{5}P(A)\right)$$

5

10. ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட 1, p, 4, 10, q என்னும் ஐந்து நோக்கல்களின் இடை 6 ஆகும்; இங்கு p, q ஆகியன மெய்யெண்கள். இந்நோக்கல்கள் உருமாற்றம் $y = 3x + c$ இனால் உருமாற்றப்படுகின்றன; இங்கு x ஆனது தொடக்க நோக்கல்களையும் c ஆனது ஒரு மெய்யெண்ணையும் குறிப்பிடுகின்றன. உருமாற்றப்பட்ட நோக்கல்களின் இடையும் வீச்சும் முறையே 20, 33 ஆகும். p, q, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\frac{1+4+p+10+q}{5}=6 \quad 5$$

$$\Rightarrow p+q=15$$

$$3\times 6+c=20 \quad 5$$

$$\therefore c=2.$$

உருமாற்றப்பட்ட நோக்கல்களின் வீச்சு $=(3q+c)-(3+c)$

$$\therefore 3q-3=33 \quad 5$$

$$\therefore q=12$$

$$\therefore p=3.$$

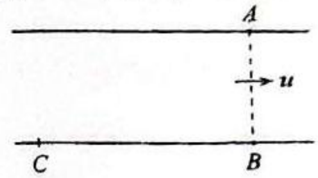
p, q மற்றும் c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களுக்கு 10

ஏதாவது இரண்டிற்கு 5

பகுதி B

11. (*a*) ஒரு நேர்கோடு வழியே மாறா அமர்முடுகல் $f\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ உடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை P ஆனது நேரம் $t = 0\ \mathrm{s}$ இல் வேகம் $60\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ உடன் ஒரு புள்ளி O ஐக் கடந்து செல்கின்றது; இங்கு $f > 0$ ஆகும். துணிக்கை P ஓய்வுக்கு வந்தவுடன் அது O ஐ நோக்கி ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் $f\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ உடன் இயங்குகின்றது. O இல் ஓய்வில் இருக்கும் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது நேரம் $t = \frac{30}{f}\ \mathrm{s}$ இல் மாறா ஆர்முடுகல் $f\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ உடன் அதே நேர்கோட்டின் வழியே P ஐ நோக்கி இயங்கத் தொடங்கி, ஒரு வேகம் $30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ஐப் பெற்ற பின்னர் அதே மாறா வேகத்தில் தொடர்ந்து இயங்குகின்றது. துணிக்கை Q மாறா வேகத்தை அடைந்து 10 செக்கனுக்குப் பின்னர் துணிக்கை Q துணிக்கை P ஐச் சந்திக்கின்றது. $t = 0\ \mathrm{s}$ இலிருந்து P, Q ஆகியன சந்திக்கும் வரைக்கும் அவற்றின் இயக்கங்களுக்குரிய வேக - நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. $f = 3$ எனவும் O இலிருந்து துணிக்கைகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் தூரம் 450 m எனவும் காட்டுக.

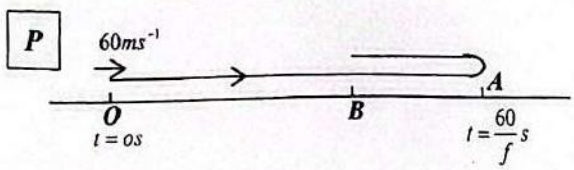
(*b*) சமாந்தர நேர்க் கரைகளும் அகலம் a உம் உள்ள ஓர் ஆறு ஒரு சீரான வேகம் u உடன் பாய்கிறது. உருவில் காட்டியுள்ளவாறு கரைகளின் மீது A, B, C ஆகிய புள்ளிகள், AB ஆனது கரைகளுக்குச் செங்குத்தாகவும் $BC = 2a$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன. P, Q ஆகிய இரு படகுகள் முறையே A, B ஆகியவற்றில் அவற்றின் பயணங்களை ஒரே கணத்தில் ஆரம்பிக்கின்றன.

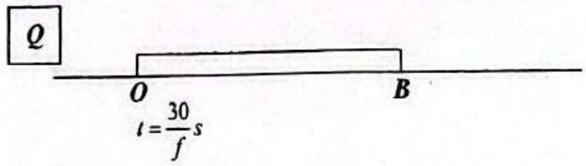


படகு P ஆனது நீர் தொடர்பாக ஒரு வேகம் $2\sqrt{5}\,u$ உடன் திசை $\overrightarrow{AC}$ இற் செல்கிறது. படகு Q ஆனது நீர் தொடர்பாகக் கதி $\sqrt{2}\,u$ உடன் புவி தொடர்பாகத் திசை $\overrightarrow{BA}$ இற் செல்கின்றது. P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. புவி தொடர்பாக P இன் வேகத்தையும் புவி தொடர்பாக Q இன் கதியையும் காண்க.

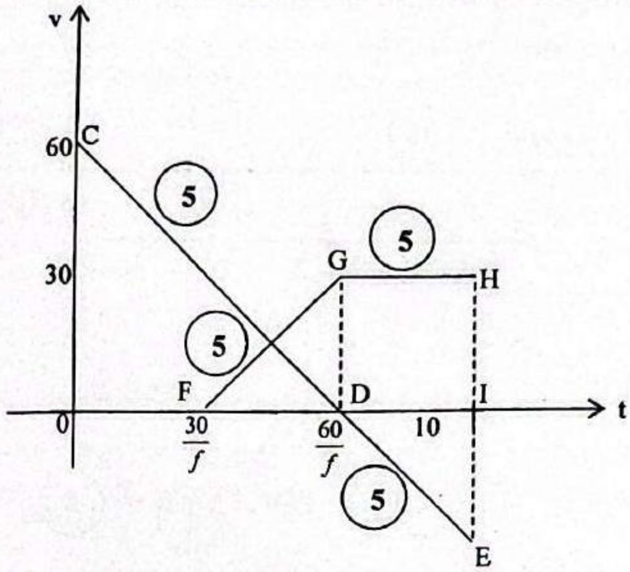
அத்துடன், Q தொடர்பாக P இன் வேகத்தின் திசையையும், இதிலிருந்து, P இற்கும் Q இற்குமிடையே உள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தையும் காண்க.

(*a*)





P மற்றும் Q சந்திக்கும் புள்ளி B என்க.



20

P இன் இயக்கத்தை கருதுகையில்,

$$OB = \text{பரப்பு } \triangle OCD - \text{பரப்பு } \triangle DIE$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{60}{f} \times 60 - \frac{1}{2} 10 \times 10 f \quad 5$$

5

$$= \frac{1800}{f} - 50f \text{ --------- (1)}$$

Q இன் இயக்கத்தை கருதுகையில்,

$$OB = \text{பரப்பு } \triangle DFG + \text{பரப்பு } DGHI$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{30}{f} \times 30 + 30 \times 10 \quad 5$$

5

$$= \frac{450}{f} + 300 \text{ --------- (2)}$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \frac{1800}{f} - 50f = \frac{450}{f} + 300 \quad 10$$

$$\frac{1350}{f} = 50f + 300$$

$$50f^2 + 300f - 1350 = 0 \quad 5$$

$$f^2 + 6f - 27 = 0$$

$$(f-3)(f+9) = 0 \quad 5$$

$$f = 3. \quad 5 \quad (\because f > 0)$$

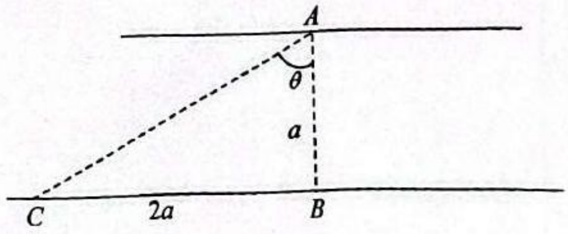
45

$$\therefore OB = \frac{450}{3} + 300$$

$$= 450m \quad 10$$

10

(b)



$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ஏதாவது ஒன்றுக்கு 5

$\tan\theta = 2$

$\underline{V}(P,W) = \swarrow \theta$ 5 $\quad \underline{V}(W,E) = u \rightarrow$ 5

$2\sqrt{5}u$

$\underline{V}(Q,W) = \sqrt{2}u$ 5 $\quad \underline{V}(Q,E) = \uparrow$ 5

$$\underline{V}(P,E) = \underline{V}(P,W) + \underline{V}(W,E)$$

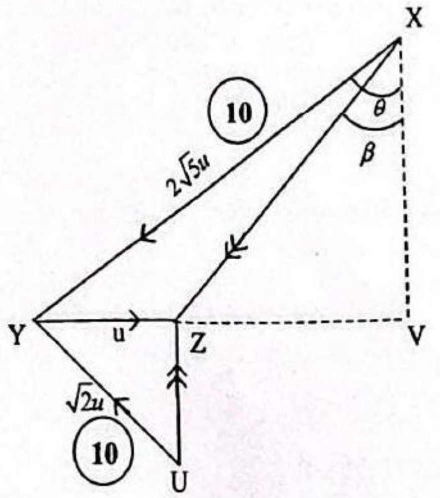
$$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$$

$$= \overrightarrow{XZ}$$

$$\underline{V}(Q,E) = \underline{V}(Q,W) + \underline{V}(W,E)$$

$$= \overrightarrow{UY} + \overrightarrow{YZ}$$

$$= \overrightarrow{UZ}$$

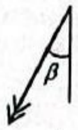


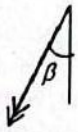
45

$XV = 2\sqrt{5}u\cos\theta = 2u$

$YV = 2\sqrt{5}u\sin\theta = 4u$

$\underline{V}(P,E) = \overrightarrow{XZ}$

$= \sqrt{2^2+3^2}u$  10

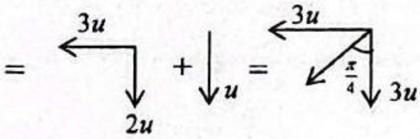
$= \sqrt{13}u$ 

$\tan\beta = \frac{3}{2}$ 5

பூமி சார்பாக Q இன் வேகம் $= UZ = u$ 5

$\boxed{20}$

$\underline{V}(P,G) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,Q)$

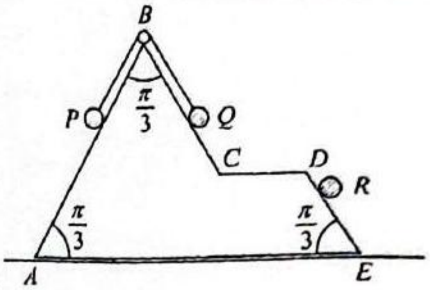


$\therefore$ P மற்றும் Q க்கிடையிலான மிகக்குறைந்த தூரம் $= a\sin\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$ 10

$\boxed{10}$

---

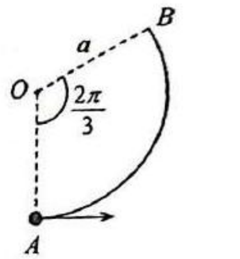
12. (*a*) திணிவு $10m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான குற்றியின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டு $ABCDE$ உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளது. AE ஐக் கொண்ட முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் AB, BC, DE ஆகியன அவற்றைக் கொண்ட முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாக இருக்கும் அதே வேளை CD ஆனது AE இற்குச் சமாந்தரமும் $E\hat{A}B = A\hat{B}C = D\hat{E}A = \frac{\pi}{3}$ உம் ஆகும்.



முறையே $5m, m, m$ திணிவுகளை உடைய P, Q, R என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் முறையே AB, BC, DE ஆகியவற்றின் மீது பிடித்துவைக்கப்பட்டுள்ளன. B இல் உள்ள குற்றியில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் ஒப்பமான இலேசான சிறிய கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியா இழையின் நுனிகளுடன் P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள அமைவிலிருந்து இழை இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.

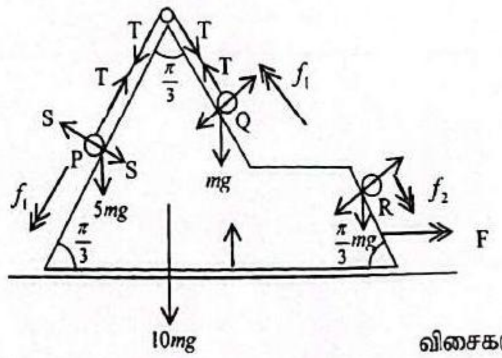
குற்றியின் ஆர்முடுகலையும் P மீது குற்றியினால் பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் துணிவதற்குப் போதுமானளவு சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஆரை a ஐயும் மையம் O ஐயும் உடைய $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{3}$ ஆகவுள்ள ஒரு வட்ட வில் வடிவத்தில் இருக்கும் ஓர் ஒப்பமான மெல்லிய விறைத்த கம்பி AB ஆனது OA நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சிறிய பவளம் A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டு, கம்பி வழியே கதி $\sqrt{\frac{7ga}{2}}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. பவளம் O பற்றிக் கோணம் $\theta \left(0 < \theta \leq \frac{2\pi}{3}\right)$ இனூடாகத் திரும்பியிருக்கும்போது அதன் கதி v ஆனது $v^2 = \frac{ga}{2}(3 + 4\cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



மேலும், கம்பியிலிருந்து விலகிச் சென்ற பின்னர் பவளம் மறுபடியும் A இற்கு வருகின்றதெனக் காட்டி, பவளம் A ஐ அடையும்போது அதன் கதியைக் காண்க.

(*a*)



விசைகளுக்கு :

$\underset{\sim}{a}(\text{Block}, E) = \rightarrow F$ $\qquad$ $\underset{\sim}{a}(R, Block) = \searrow f_2$

$\underset{\sim}{a}(P, Block) = \swarrow f_1$

$\underset{\sim}{a}(Q, Block) = \nwarrow f_1$ $\qquad$ 5

P மீதான 5

Q மீதான 5

R மீதான 5

குற்றி மீதான 5

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$ இனை பிரயோகிக்க

தொகுதிக்கு $\rightarrow\ 0 = 10mF + 5m\left(F - \frac{f_1}{2}\right) + m\left(F - \frac{f_1}{2}\right) + m\left(F + \frac{f_2}{2}\right)$ 5 5 5 5 5

P இற்கு ↙ $5mg \times \frac{\sqrt{3}}{2} - T = 5m\left(f_1 - \frac{F}{2}\right)$ 10

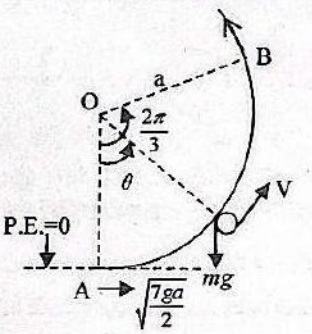
Q இற்கு ↖ $T - mg \times \frac{\sqrt{3}}{2} = m\left(f_1 - \frac{F}{2}\right)$ 10

R இற்கு ↘ $mg\frac{\sqrt{3}}{2} = m\left(f_2 + \frac{F}{2}\right)$ 5

P இற்கு $\underset{\nwarrow}{S} - 5mg \times \frac{1}{2} = 5m\left(-F \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 10

85

(b)



சக்திக் காப்பு :

$\frac{1}{2}mV^2 + mg(a - a\cos\theta) = \frac{1}{2}m \times \frac{7ga}{2}$ 15

$V^2 = -2ga(1 - \cos\theta) + \frac{7ga}{2}$

$= \frac{ga}{2}(3 + 4\cos\theta).$ 5

அ.சக்தி 5

இ.சக்தி. 5

சமன்பாடு 5

20

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்போது, $V^2 = \frac{ga}{2}\left(3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{ga}{2}.$ 5

புவியீர்ப்பின் கீழ் B இலிருந்து நேர்கோடு OA இனை கடக்கும் புள்ளிவரை, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ

பிரயோகிக்க :

$$\leftarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{ga}{2}} \times \frac{1}{2}T. \quad 5$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{6a}{g}} \quad 5$$

$$\downarrow \quad h = -\sqrt{\frac{ga}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}T + \frac{1}{2}gT^2 \quad 10$$

$$= -\sqrt{\frac{ga}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{6a}{g}} + \frac{1}{2}g \times \frac{6a}{g} \quad 5$$

$$= -\frac{3a}{2} + 3a = \frac{3a}{2}. \quad 5$$

$\therefore$ பவளம் மறுபடியும் A இற்கு வருகின்றது.

35

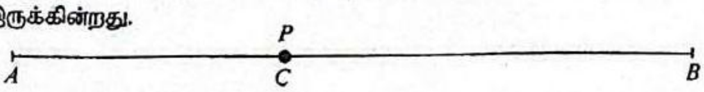
சக்திக்காப்பு தத்துவத்திலிருந்து, பவளம் மறுபடியும் A இற்கு வரும்போது அதன் கதி

$$= \sqrt{\frac{7ga}{2}}. \quad 10$$

10

---

13. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது A, B என்னும் இரு நிலைத்த புள்ளிகள், $AB = 16a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன. இயற்கை நீளம் $2a$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $3mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழை S_1 இன் ஒரு நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் S_1 இன் மற்றைய நுனி A உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும், இயற்கை நீளம் $4a$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ ஐயும் உடைய இரண்டாம் இலேசான மீள்தன்மை இழை S_2 இன் ஒரு நுனி P உடனும் S_2 இன் மற்றைய நுனி B உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு புள்ளி C இல் துணிக்கை P நாப்பத்தில் இருக்கின்றது.



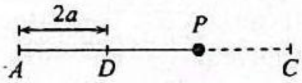
AC இன் நீளத்தையும் BC இன் நீளத்தையும் காண்க.

இப்போது துணிக்கை P ஆனது B ஐ நோக்கித் தூரம் $2a$ இற்கு இழுக்கப்பட்டு, ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. P இன் இயக்கத்தின் சமன்பாடு $\ddot{x} + \omega^2(x - 6a) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $AP = x$ உம் $\omega\ (> 0)$ ஆனது துணியப்பட வேண்டிய ஒரு மாறிலியும் ஆகும்.

$X = x - 6a$ என எடுத்து, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ எனக் காட்டி, இந்த எளிய இசை இயக்கத்தின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் குறிப்பிடுக.

சூத்திரம் $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி, இவ்வியக்கத்தின்போது வீச்சம் c ஐயும் P இன் உயர்ந்தபட்சக் கதியையும் காண்க.

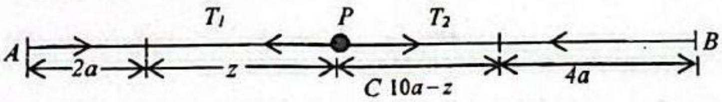
இவ்வியக்கத்தின்போது P ஆனது C ஐ அடையும் முதற் கணத்தில் இழை S_2 வெட்டப்படுகின்றது.



உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு AC மீது D ஆனது, $AD = 2a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி எனக் கொள்வோம். C இலிருந்து D இற்கு Pஇன் இயக்கத்திற்கான சமன்பாடு $\ddot{y} + \omega_1^2 y = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $DP = y$ உம் $\omega_1\ (> 0)$ ஆனது துணியப்படவேண்டிய ஒரு மாறிலியும் ஆகும்.

இந்த எளிய இசை இயக்கத்தின் வீச்சம் $\sqrt{\dfrac{68}{3}}\,a$ எனக் காட்டுக.

P இயக்கத்தில் ஈடுபடும் கணத்திலிருந்து அது புள்ளி A ஐ அடையும் வரைக்கும் எடுத்த மொத்த நேரத்தைக் காண்க.



$$T_1 = T_2$$

$$\frac{z}{2a} \times 3mg = \frac{(10a - z)}{4a} \times 4mg \quad 10$$

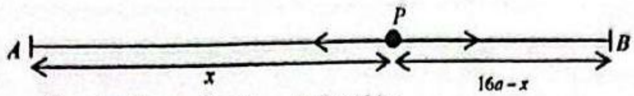
$$3z = 20a - 2z$$

$$\therefore z = 4a \quad 5$$

எனவே, $AC = 6a$ மற்றும் $BC = 10a$.

5 5

25



$\underline{F} = m\underline{a}$ இனை P இற்கு பிரயோகிக்க

$$\rightarrow \quad m\ddot{x} = \frac{(16a - x - 4a)}{4a} \times 4mg - \frac{(x - 2a)}{2a} \times 3mg \quad 5$$

5 5

$$\ddot{x} = (12a - x)\frac{g}{a} - (x - 2a)\frac{3g}{2a}$$

$$= \frac{g}{2a}\{24a - 2x - 3x + 6a\}$$

$$= \frac{g}{2a}\{30a - 5x\}$$

$$= -\frac{5g}{2a}(x - 6a) \quad 10$$

$\therefore \ddot{x} + \omega^2(x - 6a) = 0$, இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{5g}{2a}}$. 5

30

$X = x - 6a \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$ மற்றும் $\ddot{X} = \ddot{x}$ 5

$\therefore \ddot{X} + \omega^2 X = 0.$ 5

ஆவர்த்தன காலம் $= \frac{2\pi}{\omega}$. 5

15

$$\dot{X}^2 = \omega^2\left(c^2 - X^2\right) \text{ --------- } (1)$$

$x = 8a$ ஆகும்போது $\dot{x} = 0$.

i.e. $X = 2a$ ஆகும்போது $\dot{X} = 0$ 5

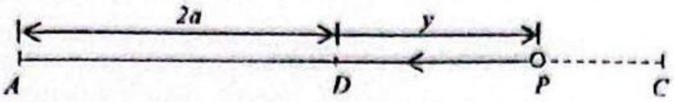
எனவே $(1) \Rightarrow c = 2a$. 5

$\dot{X}^2$ உயர்வு $= \omega^2 c^2$

$\therefore \dot{X}$ உயர்வு $= \omega c = \sqrt{\frac{5g}{2a}} \times 2a = \sqrt{10ga}$.

10

20



$$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow: m\ddot{y} = -\frac{y}{2a}\cdot 3mg \quad 5$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{3g}{2a}y.$$

$$\therefore \ddot{y} + \omega_1^2 y = 0, \text{ இங்கு } \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}. \quad 5$$

10

$$y^2 = \omega_1^2\left(c_1^2 - y^2\right)$$

$y = 4a$ ஆகும்போது $\dot{y} = \sqrt{10ag}$ 5

$$\therefore 10ag = \frac{3g}{2a}\left(c_1^2 - 16a^2\right) \quad 5$$

$$20a^2 = 3c_1^2 - 48a^2$$

$$\therefore c_1^2 = \frac{68}{3}a^2$$

$$\therefore c_1 = \sqrt{\frac{68}{3}}a. \quad 5$$

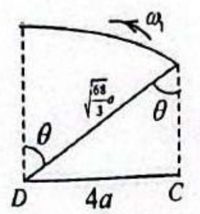
$\therefore$ எளிய இசை இயக்கத்தின் வீச்சம் $= \sqrt{\frac{68}{3}}a.$

15

C ஐ அடைவதற்கு எடுத்த நேரம் $= t_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{2a}{5g}}.$

5

C இலிருந்து D ஐ அடைவதற்கு எடுத்த நேரம் $= t_2$



5

$\omega_1 t_2 = \theta = sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{68}}\right).$

5

$\therefore t_2 = \sqrt{\frac{2a}{3g}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{12}{17}}\right)$ 5

D இல் கதி $= \omega_1 c_1$ 5

D இலிருந்து A வரை செல்வதற்கு எடுத்த நேரம் $= t_3 = \frac{2a}{\omega_1 c_1} = 2\cancel{a}\sqrt{\frac{2a}{3g}}.\sqrt{\frac{3}{68}}.\frac{1}{\cancel{a}}$

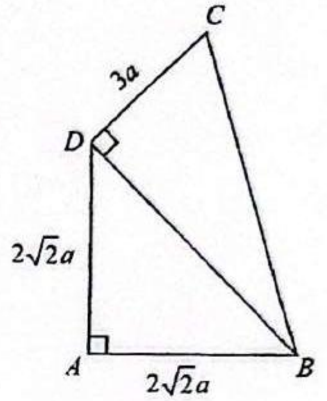
5

$\therefore$ தேவையான நேரம் $= \frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{2a}{5g}} + \sqrt{\frac{2a}{3g}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{12}{17}}\right) + \sqrt{\frac{2a}{17g}}.$ 5

35

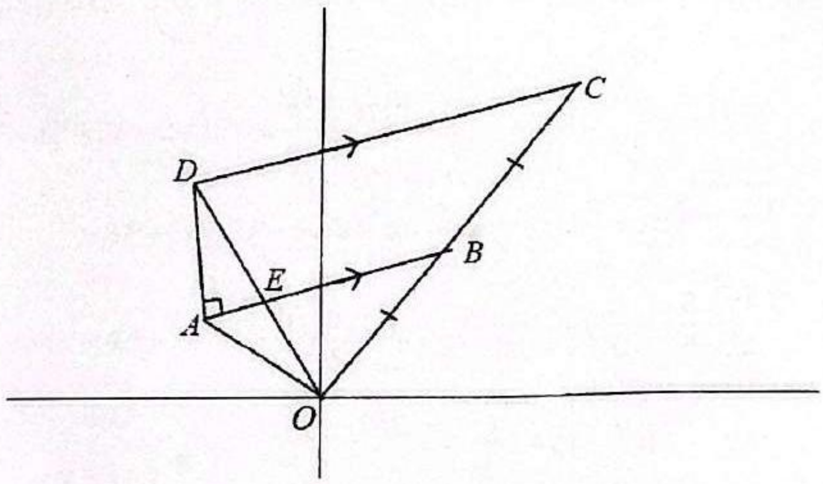
14.(*a*) உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் வழக்கமான குறிப்பீட்டில் முறையே $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ எனக் கொள்வோம். C ஆனது $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனக் கொள்வோம். மேலும் D ஆனது, AB இற்கு DC சமாந்தரமாகவும் AB இற்கு AD செங்குத்தாகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ள, புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $\overrightarrow{OD} = -\frac{8}{5}\mathbf{i} + \frac{11}{5}\mathbf{j}$ எனக் காட்டுக. E ஆனது AB இனதும் OD இனதும் வெட்டுப் புள்ளி எனக் கொள்வோம். $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) உருவில் $B\hat{A}D = B\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$, $AB = AD = 2\sqrt{2}a$, $CD = 3a$ ஆகவுள்ள ஒரு தள நாற்பக்கல் $ABCD$ காட்டப்பட்டுள்ளது. $3P, 3P, 2\sqrt{2}P, 5\sqrt{2}\ P, 3\sqrt{2}P$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, AD, BD, BC, DC ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினாற் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி முறையே AB, AD ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்து ஒழுங்குமுறையினாற் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்கும் $\alpha P,\ \beta P$ பருமன் உள்ள இரு விசைகளுக்கும் இடஞ்சுழிப் போக்கில் தாக்கும் திருப்பம் M ஐ உடைய ஓர் இணைக்கும் சமவலுவுள்ளது. α, β, M ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



இப்போது மேற்குறித்த விசைத் தொகுதிக்கு நாற்பக்கலின் தளத்தில் தாக்கும் ஓர் இணை, புதிய விசைத் தொகுதியின் விளையுள் D இனூடாகச் செல்லத்தக்கதாக, சேர்க்கப்படுகின்றது. சேர்க்கப்பட்ட இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

(*a*)



$\underline{c} = \vec{OC}$ மற்றும் $\underline{d} = \vec{OD}$ என்க.

DC ஆனது AB க்கு சமாந்தரம் ஆகையால்

$\vec{DC} = \lambda\,\vec{AB},$ இங்கு λ ஒரு எண்ணியாகும். 5

$\underline{c} - \underline{d} = \lambda(\underline{b} - \underline{a})$ 5

$\therefore \underline{d} = 2\underline{b} - \lambda(\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{i} - \underline{j})$

$= 2\underline{i} + 4\underline{j} - \lambda(2\underline{i} + \underline{j})$ ----------- (1) 5

$AD \perp AB,$ ஆதலால்

$\vec{AD}.\vec{AB}=0.$ 5

$\left[2\underline{i}+4\underline{j}-\lambda\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)+\underline{i}-\underline{j}\right].\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)=0$ 5

$\left[\left(3-2\lambda\right)\underline{i}+\left(3-\lambda\right)\underline{j}\right].\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)=0$

$6-4\lambda+3-\lambda=0$

$\therefore \lambda=\frac{9}{5}.$ 5

எனவே, 1 $\Rightarrow \vec{OD}=2\underline{i}+4\underline{j}-\frac{9}{5}\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$ 5

$=\left(2-\frac{18}{5}\right)\underline{i}+\left(4-\frac{9}{5}\right)\underline{j}$

$=-\frac{8}{5}\underline{i}+\frac{11}{5}\underline{j}.$ 5

40

$\vec{AE}=\mu\left(\vec{AB}\right)$, இங்கு μ ஒரு எண்ணியாகும். 5

$\vec{OE}-\vec{OA}=\mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

$\frac{1}{2}\vec{OD}-\vec{OA}=\mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

5

$\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\underline{i}+\frac{11}{5}\underline{j}\right)-\left(-\underline{i}+\underline{j}\right)=\mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

$-\frac{8}{10}\underline{i}+\frac{11}{10}\underline{j}+\underline{i}-\underline{j}=\mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$

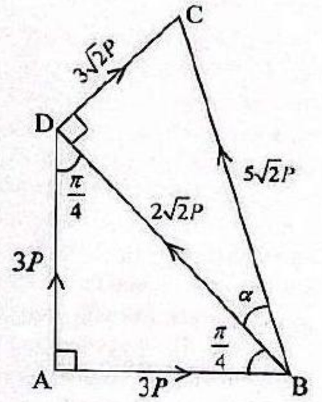
$\frac{2}{10}\underline{i}+\frac{1}{10}\underline{j}=\mu\left(2\underline{i}+\underline{j}\right)$ 5

$\therefore \mu=\frac{1}{10}$ 5

$\therefore \vec{AE}=\frac{1}{10}\vec{AB}.$

20

(b)



$BD=\sqrt{8a^2+8a^2}=4a$

$BC=5a$

$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\dfrac{4}{5}\\[2mm] \sin\alpha=\dfrac{3}{5}.\end{array}\right\}$ 5

$\uparrow \beta P=3P+2\sqrt{2}P\sin\frac{\pi}{4}+3\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4}+5\sqrt{2}P\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 10

$=3P+2P+3P+5\sqrt{2}P\left\{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right\}$ 5

$=8P+5\sqrt{2}P\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{5}\right\}$ 5

$=15P$.

$\therefore \beta=15$. 5

$\rightarrow \alpha P=3P-2\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4}+3\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4}-5\sqrt{2}P\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 10

$=3P-2P+3P-5\sqrt{2}P\left\{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right\}$ 5

$=4P-5\sqrt{2}P\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{5}\right\}$ 5

$=3P$.

$\therefore \alpha=3$. 5

$A\curvearrowleft$

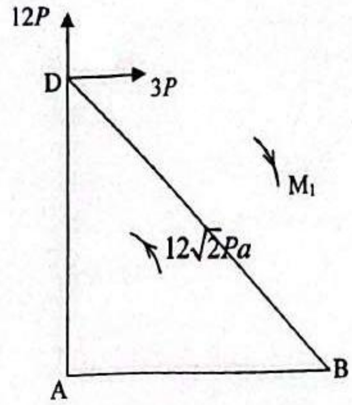
$M=-3\sqrt{2}P\cos\frac{\pi}{4}\times 2\sqrt{2}a+2\sqrt{2}P\sin\frac{\pi}{4}\times 2\sqrt{2}a+5\sqrt{2}P\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\times 2\sqrt{2}a$ 15

$=2\sqrt{2}a\{-3P+2P+7P\}$

$=12\sqrt{2}Pa$. 5

$\boxed{75}$

சேர்க்கப்பட்ட இணையின் திருப்பம் M_1 என்க.

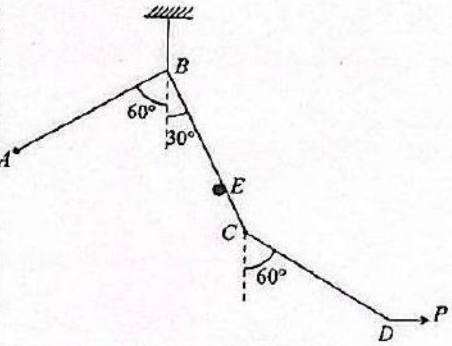


A $\quad 3P\times 2\sqrt{2}a+12\sqrt{2}Pa-M_1=0$ (10)

$\therefore M_1=18\sqrt{2}Pa.$ (5)

15

15.(a) சம நீளம் $4a$ ஐயும் முறையே நிறைகள் W, $2W$, W ஐயும் உடைய AB, BC, CD என்னும் மூன்று சீரான கோல்கள் B, C ஆகிய முனைப் புள்ளிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் இலேசான நீட்டமுடியா இழையின் ஒரு நுனி மூட்டு B உடனும் இழையின் மற்றைய நுனி B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே ஒரு கிடைச் சீலிங்கின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு AB, CD ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் $60°$ கோணத்தையும் கோல் BC நிலைக்குத்துடன் $30°$ கோணத்தையும் ஆக்கிக்கொண்டும் இழை இறுக்கமாகவும் இருக்கத்தக்கதாக மூன்று கோல்களும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், $BE = 3a$ ஆக இருக்குமாறு E இல் ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான முளையின் மீது கோல் BC ஐ வைப்பதன் மூலமும் D இல் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையைப் பிரயோகிப்பதன் மூலமும், நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன.

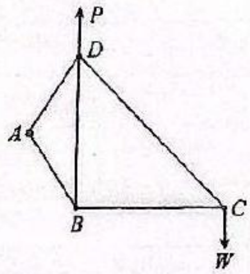


(i) P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) முளையிலிருந்து கோல் BC மீது உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமன் $\frac{W}{3}$ எனக் காட்டுக.

(iii) இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

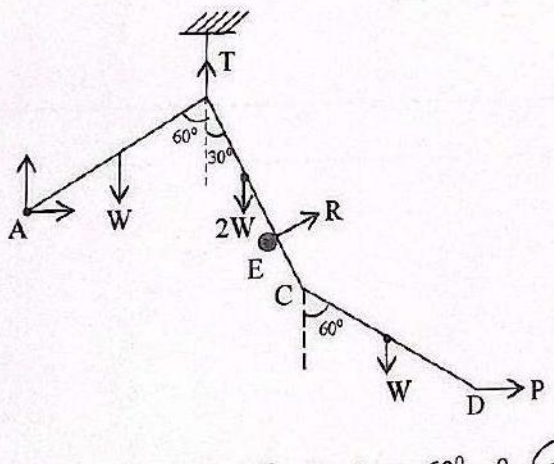
(b) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, CD, DA, DB என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. $AB = AD = 2a$, $BC = BD = 2\sqrt{3}a$, $C\hat{B}D = \frac{\pi}{2}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.



மூட்டு C இல் ஒரு சுமை W தொங்கவிடப்பட்டு சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, BC கிடையாக இருக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நாப்பத்தில், மூட்டு D இல் அதற்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்பட்ட பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசையினால், வைக்கப்பட்டுள்ளது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி C, B, D ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.

இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு, அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் குறிப்பிடுக.

(a)



(i) $C \circlearrowleft$ CD க்கு : $W \times 2a\sin 60^0 - P \times 4a\cos 60^0 = 0.$ (10)

$$\sqrt{3}W - 2P = 0$$

$$\therefore P = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$ (5)

15

(ii) $B \circlearrowright$ BC மற்றும் CD க்கு :

$$2W\times 2a\sin 30^0 + W\left(4a\sin 30^0 + 2a\sin 60^0\right) - R\times 3a - P\times\left(4a\cos 30^0 + 4a\cos 60^0\right) = 0.$$

15

$$2W + W\left(2+\sqrt{3}\right) - 3R - \frac{\sqrt{3}}{2}W\left(2\sqrt{3}+2\right) = 0. \quad 5$$

$$\therefore 3R = 2W + 2W + \sqrt{\cancel{3}}W - 3W - \sqrt{\cancel{3}}W$$

$$\therefore R = \frac{W}{3}. \quad 5$$

25

(iii) A $\circlearrowright$ தொகுதிக்கு :

$$W\times 2a\sin 60^0 + 2W\left(4a\sin 60^0 + 2a\sin 30^0\right) +$$

$$W\left(4a\sin 60^0 + 4a\sin 30^0 + 2a\sin 60^0\right) - P\left(4a\cos 30^0 + 4a\cancel{\cos}60^0 - 4a\cancel{\cos}60^0\right) -$$

20

$$R\times 3a - T\times 4a\sin 60^0 = 0.$$

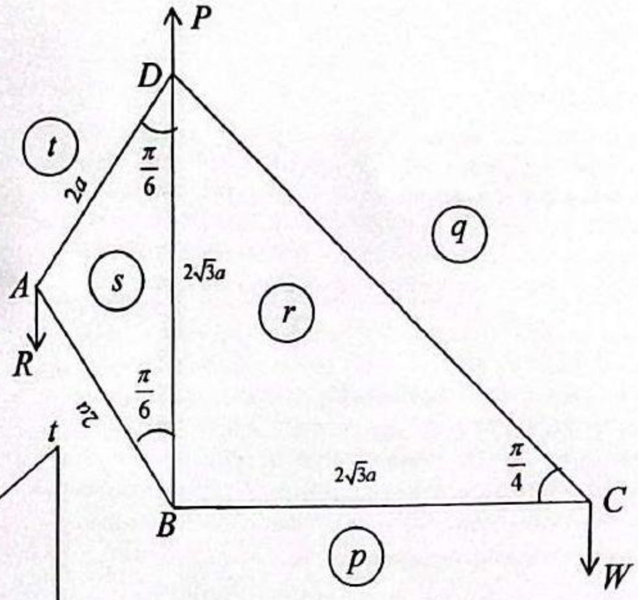
$$\therefore T\times 2\sqrt{3} = W\times\sqrt{3} + 2W\left(2\sqrt{3}+1\right) + W\left(3\sqrt{3}+2\right) - \frac{\sqrt{3}W}{2}\left(2\sqrt{3}\right) - \frac{W}{3}\times 3 \quad 5$$

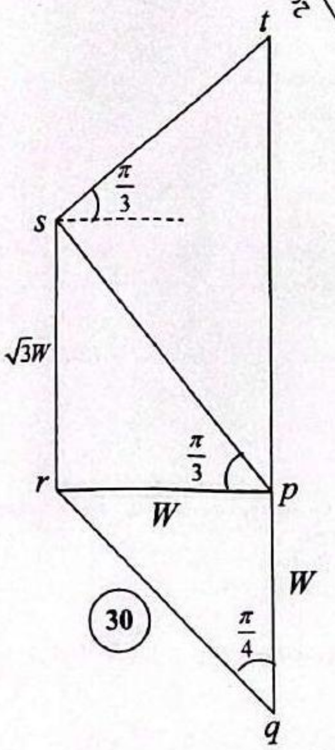
$$= 8\sqrt{3}W$$

$$\therefore T = 4W. \quad 5$$

30

(b)





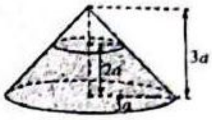
கோல்	பருமன்	இழுவை/உதைப்பு
BC	W	உதைப்பு
CD	$\sqrt{2}W$	இழுவை
BD	$\sqrt{3}W$	இழுவை
AB	$2W$	உதைப்பு
AD	$2W$	இழுவை

50

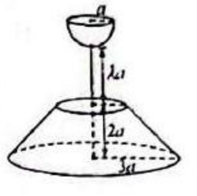
80

16. ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான அரைக்கோள ஓட்டின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{a}{2}$ இலும் உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பின் திணிவு மையம் அதன் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{h}{4}$ இலும் இருக்கின்றன எனக் காட்டுக.

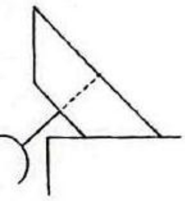
உயரம் $2a$ ஐ உடைய ஓர் அடித்துண்டு, அடியின் ஆரை $3a$ ஆகவும் உயரம் $3a$ ஆகவும் உள்ள ஒரு திண்மச் சீரான செவ்வட்டக் கூம்பிலிருந்து, அதன் அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்தினூடாக வெட்டிச் சிறிய செவ்வட்டக் கூம்பை அகற்றுவதன் மூலம், செய்யப்படுகின்றது. (அடுத்துள்ள உருவைப் பார்க்க.) அடித்துண்டை உருவாக்குவதற்கு அகற்றப்படும் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு m ஆகும். அடித்துண்டின் திணிவு $26m$ எனக் காட்டுக.

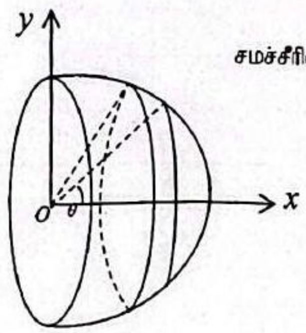


ஆரை a ஐயும் திணிவு m ஐயும் உடைய ஒரு சீரான அரைக்கோள ஓடும் மேற்குறித்த அடித்துண்டும் நீளம் λa ஐயும் திணிவு m ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோலின் முனைகளுடன் விறைப்பாக நிலைப்படுத்தப்பட்டு, அடுத்துள்ள உருவத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு, ஒரு சேர்த்திப் பொருளானது கோல், அரைக்கோள ஓட்டின் மையம், அடித்துண்டின் அச்சு ஆகிய எல்லாம் ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்குமாறு, உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம் அடித்துண்டின் பெரிய வட்ட அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{3}{56}(15+\lambda)a$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.



சேர்த்திப் பொருள் ஒரு கிடை மேசை மீது, அடித்துண்டின் வளைபரப்பு மேசையைத் தொடுமாறு, வைக்கப்பட்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீரச்சினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டு அடுத்துள்ள உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருள் நாப்பத்தில் இருப்பின், $\lambda \leq \frac{11}{3}$ எனக் காட்டுக.





சமச்சீரின்படி திணிவுமையம் G ஆனது x-அச்சில் கிடக்கின்றது.

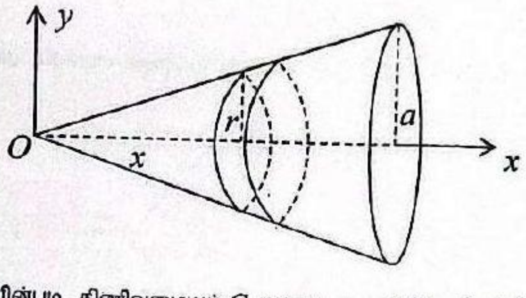
$OG = \bar{x}$ எனின் 5

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta . a\cos\theta . \sigma d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta \sigma d\theta} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta}$$

$$= \frac{a\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left.-\cos\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}} \quad 5 \quad 5 \qquad = \frac{a}{2}. \quad 5$$

30



சமச்சீரின்படி திணிவுமையம் G ஆனது x -அச்சில் கிடக்கின்றது. 5

$OG = \overline{x}$ என்க

$$\frac{r}{a} = \frac{x}{h}.$$

$$\overline{x} = \frac{\int_o^h \pi\left(\frac{ax}{h}\right)^2 x\rho dx}{\int_o^h \pi\left(\frac{ax}{h}\right)^2 \rho dx} \quad 5 \quad 5$$

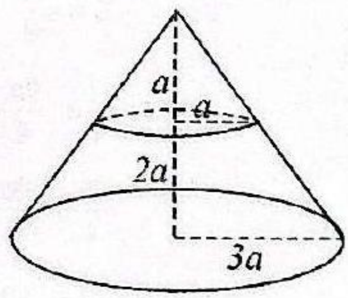
$$= \frac{\int_o^h x^3 dx}{\int_o^h x^2 dx}$$

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_o^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_o^h} \quad = \frac{3h}{4}. \quad 5$$

5

$\therefore$ அடியின் மையத்திலிருந்து G இற்கான தூரம் $= h - \frac{3h}{4} \quad = \frac{h}{4}.$ 5

30



5 $m = \frac{1}{3}\pi a^2 . a\rho,$ இங்கு ρ என்பது அடர்த்தியாகும்.

அடித்துண்டின் திணிவு $= \frac{1}{3}\pi(3a)^2 . 3a\rho - m$ 5

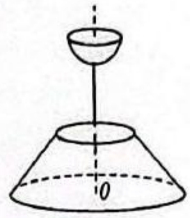
$$= 27m - m$$

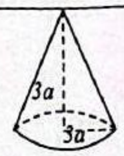
$$= 26m. \quad 5$$

15

சமச்சீரின்படி சேர்த்திப்பொருள் S இன் திணிவுமையமானது சமச்சீர் அச்சின்மேல் கிடக்கும்.

$OG = \bar{x}$ என்க. 5



பொருள்	திணிவு	O இலிருந்து திணிவுமையத்திற்கான தூரம்
	$27m$ 5	$\frac{3a}{4}$ 5
	m	$2a+\frac{a}{4}$ 5
	m	$2a+\frac{\lambda a}{2}$ 5
	m	$2a+\lambda a+\frac{a}{2}$ 10
S	$28m$ 5	$\bar{x}$

$$28m\,\bar{x} = 27m\times\frac{3a}{4} - m\left(2a+\frac{a}{4}\right) + m\left(2a+\frac{\lambda}{2}\right) + m\left(2a+\lambda a+\frac{a}{2}\right) \quad 10$$

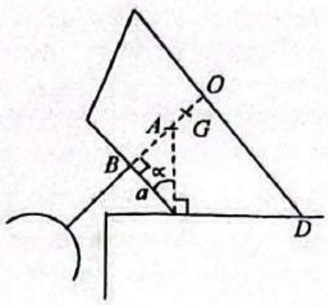
$$28\bar{x} = \frac{81}{4}a - \frac{9a}{4} + \left(2+\frac{\lambda}{2}\right)a + \left(\frac{5}{2}+\lambda\right)a$$

$$= \frac{72}{4}a + \frac{9a}{2} + \frac{3\lambda}{2}a$$

$$= \frac{90a}{4} + \frac{3\lambda}{2}a$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3}{56}(15+\lambda)a. \quad 10$$

60



சமனிலைக்கு, $OG \leq OA$. 5

$B\hat{C}D = \frac{3\pi}{4}$.

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore AB = a$.

$\therefore OA = 2a - a = a$. 5

$\therefore \frac{3}{56}(15+\lambda)a \leq a$

$\therefore 45 + 3\lambda \leq 56$

$\therefore \lambda \leq \frac{11}{3}$. 5

15

17. (*a*) ஒரு பெட்டி C இல் 2 கறுப்புப் பந்துகளும் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் ஒரு பெட்டி D இல் 2 கறுப்புப் பந்துகளும் 1 வெள்ளைப் பந்தும் உள்ளன. இப்பந்துகள் அவற்றின் நிறங்கள் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமமானவை. முதலில் ஒரு பந்து பெட்டி C இலிருந்து பெட்டி D இற்கு எழுமாற்றாக மாற்றப்படுகின்றது. பின்னர் ஒரு பந்து பெட்டி D இலிருந்து பெட்டி C இற்கு எழுமாற்றாக மாற்றப்படுகின்றது. இப்போது பெட்டி D இலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்படுகின்றது.

(i) பெட்டி D இலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாக,

(ii) பெட்டி D இலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளை எனத் தரப்படும்போது பெட்டி C இலிருந்து பெட்டி D இற்கு முதலில் இடமாற்றப்படும் பந்து கறுப்பாக,

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

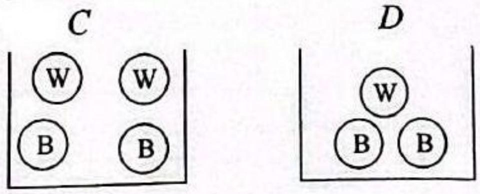
(*b*) பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு வங்கியின் 100 வாடிக்கையாளர்களின் ஆண்டுச் சேமிப்புகளின் தரவுப் பரம்பல் தரப்பட்டுள்ளது.

சேமிப்பு ஆயிரம் ரூபாய்களில்	மீடிறன்
10 – 30	35
30 – 50	40
50 – 70	15
70 – 90	10

மேற்குறித்த தரவுப் பரம்பலின் இடை, இடையம், ஆகாரம், மாறற்றிறன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

இப்போது கூடுதலாக x எண்ணிக்கையிலான வாடிக்கையாளர்கள் தரவுப் பரம்பலுடன் சேர்க்கப்படுகின்றனர். அவர்கள் அனைவரும் ஒரு தனி வகுப்பு ஆயிடைக்கு உரியவர்களெனக் காணப்பட்டுள்ளது. $(100 + x)$ வாடிக்கையாளர்களின் ஆண்டுச் சேமிப்புகளின் இடை ரு. 40 000 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. புதிய x வாடிக்கையாளர்களின் வகுப்பு ஆயிடை 30 – 50 எனக் காட்டுக.

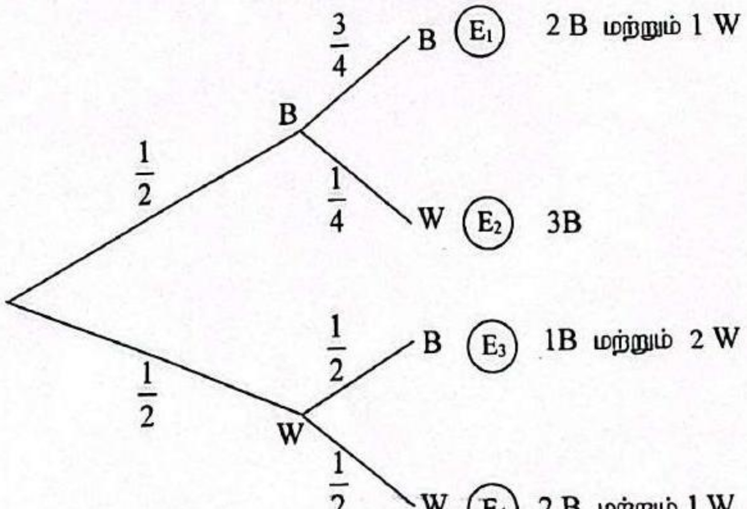
(*a*) (i)



B-கறுப்பு பந்து

W-வெள்ளைப் பந்து

2 பரிமாற்றங்களின் பின்னர் D இல் உள்ள பந்துகளின் பரம்பல்



X : D இலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாக இருத்தல்.

$$P(X) = P(X \cap E_1) + P(X \cap E_2) + P(X \cap E_3) + P(X \cap E_4)$$

$$= P(X|E_1).P(E_1) + P(X|E_2).P(E_2) + P(X|E_3).P(E_3) + P(X|E_4).P(E_4)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

10 10 10

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{3}{8}$$ 5

$\boxed{35}$

(ii)

Y : C இலிருந்து D இற்கு முதலில் இடமாற்றப்படும் பந்து கறுப்பாக இருத்தல்

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

$$= \frac{P(X|Y).P(Y)}{P(X)}$$

$$P(X|Y) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$P(Y) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}$$ 10 5

$$= \frac{1}{3}.$$ 5

$\boxed{20}$

(b)

5 5 10

வகுப்பாயிடை	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
10 - 30	35	20	700	14000
30 - 50	40	40	1600	64000
50 - 70	15	60	900	54000
70 - 90	10	80	800	64000
	100		4000	196000

5 5 5 5

அட்டவணைக்கான அதிகபட்ச புள்ளி 20 ஆகும்

இடை $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} f_2 \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{4} f_i} = \dfrac{4000}{100} = 40$ (ஆயிரங்களில்) 10

இடைய வகுப்பு $= 30 - 50.$

இடையம் $= 30 + \dfrac{\left(\frac{100}{2} - 35\right)}{40} \cdot 20 = 37.5$ (ஆயிரங்களில்) 10 5

ஆகார வகுப்பு $= 30 - 50.$

ஆகாரம் $= L + \frac{\Delta_1}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \cdot c = 30 + \frac{5}{(5+25)} \cdot 20$ 10

$= 30 + \dfrac{10}{3} \approx 33.333$ (ஆயிரங்களில்) 5

மாறற்றிறன் $= \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{x}^2$

$= \frac{196000}{100} - (40)^2$ 10

$= 1960 - 1600$

$= 360$(ஆயிரங்களின் வர்க்கங்களில்) 5

75

---

x எண்ணிக்கையான வாடிக்கையாளர்கள் தரவுப் பரம்பலுடன் இணைக்கப்படுகையில் வகுப்பாயிடையின் நடுப்பெறுமானம் d என்க.

புதிய இடையம் 40 (ஆயிரங்களில்) ஆகையால்,

$$(100+x)40 = d\cdot x + 40\times 100 \quad 10$$

$$\therefore d = 40. \quad 5$$

$\therefore$ புதிதாய் இணைக்கப்பட்ட வாடிக்கையாளர்களின் வகுப்பாயிடை $30-50$. 5 $\boxed{20}$