පිළිතුරු

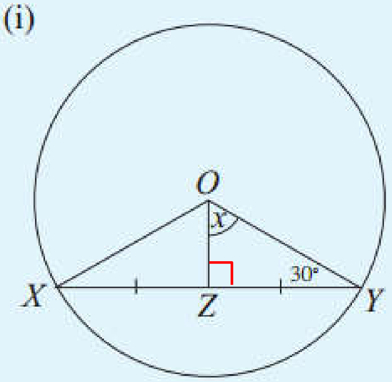
10 ශ්‍රේණිය

වෘත්තයක ජ්‍යා

27.1 අභ්‍යාසය

1. පහත එක් එක් රූපයේ දී ඇති දත්ත අනුව x හි අගය සොයන්න. O මගින් එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය දැක්වේ.

(i)



$O\hat{Z}Y = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

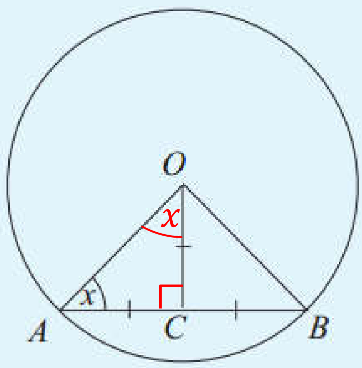
$x + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ (OZY ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$x = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ$

$x = 90^\circ - 30^\circ$

$\underline{\underline{x = 60^\circ}}$

(ii)



$A\hat{C}O = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$A\hat{O}C = O\hat{A}C = x$ (OAC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් නිසා)

$x + x + 90^\circ = 180^\circ$ (AOC ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

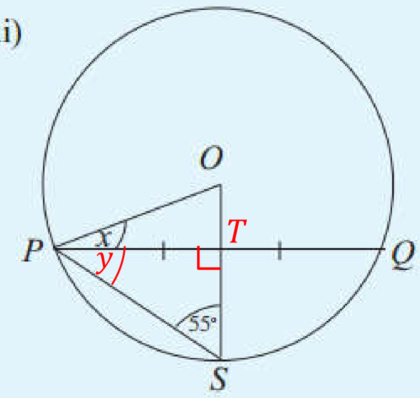
$2x = 180^\circ - 90^\circ$

$2x = 90^\circ$

$x = \frac{90^\circ}{2}$

$\underline{\underline{x = 45^\circ}}$

(iii)



$P\hat{T}S = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$y + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ (PTS ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$y = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ$

$y = 35^\circ$

$OP = OS$ (වෘත්තයේ අරයන්)

$\therefore OPS$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි.

$\therefore O\hat{P}S = 55^\circ$

$x + y = 55^\circ$

$x + 35^\circ = 55^\circ$

$x = 55^\circ - 35^\circ$

$\underline{\underline{x = 20^\circ}}$

$\hat{O} + \hat{P} + \hat{S} = 180^\circ$

$\hat{O} + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

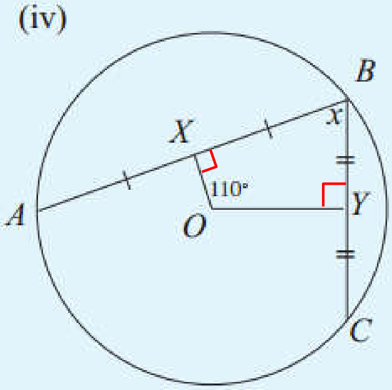
$\hat{O} = 70^\circ$

$x + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 160^\circ$

$x = 20^\circ$

(iv)



$O\hat{X}B = 90^\circ$
$O\hat{Y}B = 90^\circ$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

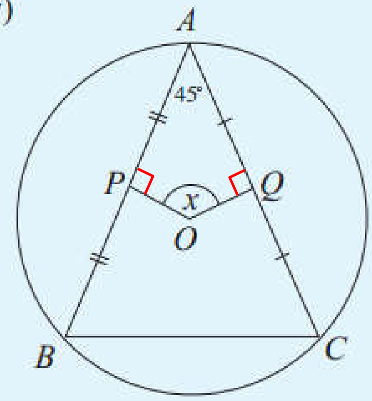
$x + 90^\circ + 90^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ ($OYBX$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$x = 360^\circ - 180^\circ - 110^\circ$

$x = 180^\circ - 110^\circ$

$\underline{\underline{x = 70^\circ}}$

(v)



$O\hat{P}A = 90^\circ$
$O\hat{Q}A = 90^\circ$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

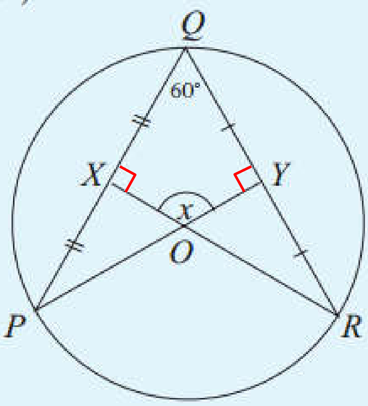
$x + 90^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 360^\circ$ ($OQAP$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$x = 360^\circ - 180^\circ - 45^\circ$

$x = 180^\circ - 45^\circ$

$\underline{\underline{x = 135^\circ}}$

(vi)



$O\hat{X}Q = 90^\circ$
$O\hat{Y}Q = 90^\circ$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

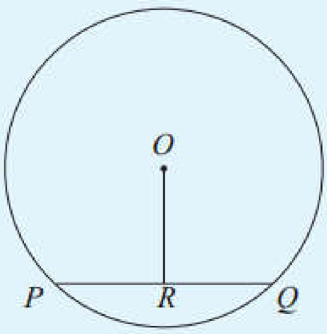
$x + 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$ ($OYQX$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

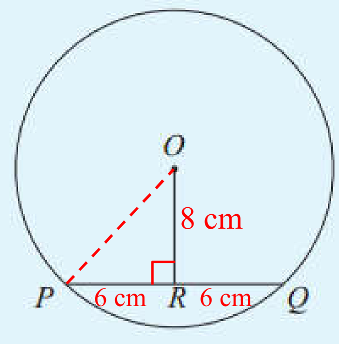
$x = 360^\circ - 180^\circ - 60^\circ$

$x = 180^\circ - 60^\circ$

$\underline{\underline{x = 120^\circ}}$

2. PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යායකි. එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය R වේ. $PQ = 12$ cm හා $OR = 8$ cm නම්, වෘත්තයේ අරය සොයන්න.





$P\hat{R}O = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$PQ = 12$ cm

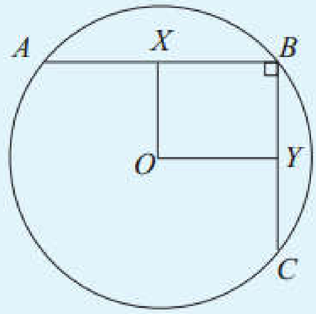
$PR = 6$ cm (PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය R නිසා)

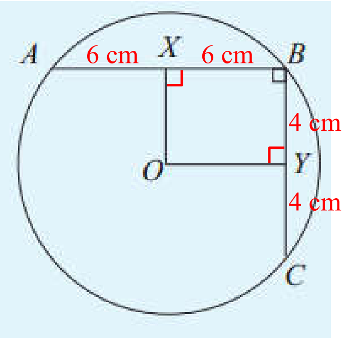
PRO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$PO^2 = PR^2 + RO^2$$
$$= 6^2 + 8^2$$
$$= 36 + 64$$
$$= 100$$
$$PO = \sqrt{100}$$
$$PO = 10$$

වෘත්තයේ අරය $=$ 10 cm

3. AB සහ BC යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක එකිනෙකට ලම්බ ජ්‍යා දෙකකි. $AB = 12$ cm ද $BC = 8$ cm ද වේ. AB සහ BC ජ්‍යායන්ගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ. $OXBY$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.





$O\hat{X}B = 90^\circ$, $O\hat{Y}B = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$X\hat{O}Y + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ ($OYBX$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$X\hat{O}Y = 90^\circ$

$\therefore$ $OYBX$ සෘජුකෝණාස්‍රයකි. (අභ්‍යන්තර කෝණ හතරම 90° නිසා)

$AB = 12$ cm

$XB = 6$ cm (AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X නිසා)

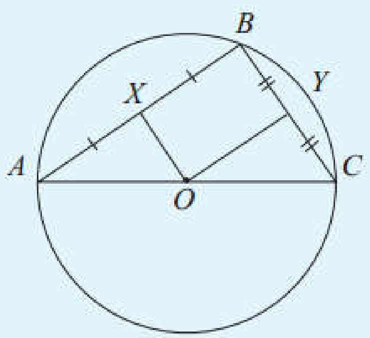
$BC = 8$ cm

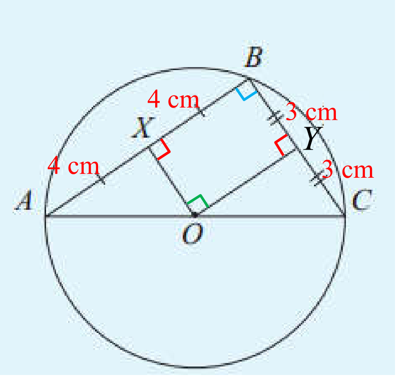
$BY = 4$ cm (BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y නිසා)

$OXBY$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= 2(4 + 6)$

$= 20$ cm

4. AB සහ BC යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යා වේ. එම ජ්‍යායන්ගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ. $AB = 8$ cm ද $BC = 6$ cm ද නම් $BXOY$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.





$O\hat{X}B = 90°$
$O\hat{Y}B = 90°$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$X\hat{B}Y = 90°$ (අර්ධ වෘත්තයක කෝණ)

$X\hat{O}Y + 90° + 90° + 90° = 360°$ ($OYBX$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$X\hat{O}Y = 90°$

$\therefore$ $OYBX$ සෘජුකෝණාස්‍රයකි. (අභ්‍යන්තර කෝණ හතරම $90°$ නිසා)

$AB = 8$ cm

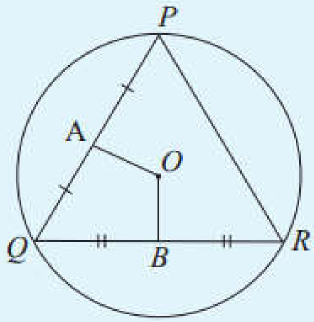
$XB = 4$ cm (AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X නිසා)

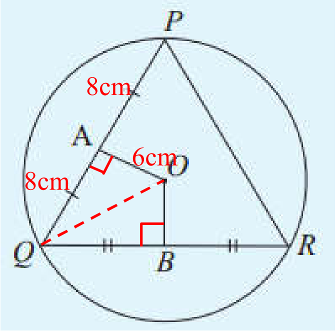
$BC = 6$ cm

$BY = 3$ cm (BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y නිසා)

$BXOY$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= 2(4 + 3)$
$= \underline{\underline{14 \text{ cm}}}$

5. PQR ත්‍රිකෝණයේ P, Q සහ R ලක්ෂ්‍ය O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක පිහිටා ඇත. PQ සහ QR පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් A සහ B වේ. $PQ = 16$ cm, $OA = 6$ cm සහ $OB = \sqrt{19}$ cm නම් QR පාදයේ දිග සොයන්න.





$O\hat{A}Q = 90°$
$O\hat{B}Q = 90°$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$PQ = 16$ cm

$AQ = 8$ cm (PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය A නිසා)

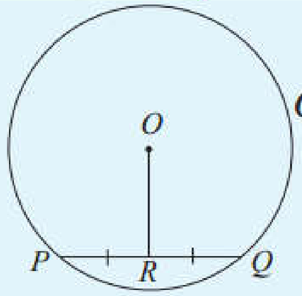
AOQ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$QO^2 = QA^2 + AO^2$$
$$= 8^2 + 6^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$

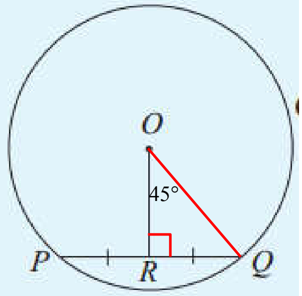
QOB ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$QO^2 = QB^2 + BO^2$$
$$100 = QB^2 + (\sqrt{19})^2$$
$$100 = QB^2 + 19$$
$$QB^2 = 100 - 19$$
$$= 81$$
$$QB = \sqrt{81}$$
$$QB = 9$$
$$QR = 2 \times 9$$
$$\underline{\underline{QR = 18 \text{ cm}}}$$

27.2 අභ්‍යාසය

1. 

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ PQ ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය R වේ නම් ද $R\hat{O}Q = 45^\circ$ ද නම් $RQ = OR$ බව පෙන්වන්න.



$O\hat{R}Q = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$O\hat{Q}R + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ (ORQ ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

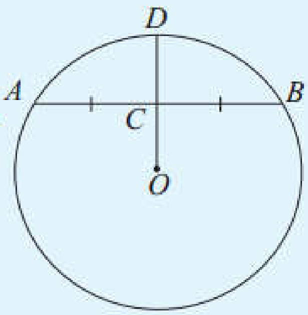
$O\hat{Q}R = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ$

$O\hat{Q}R = 90^\circ - 45^\circ$

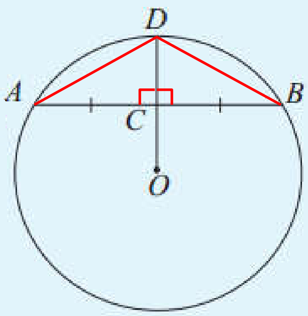
$O\hat{Q}R = 45^\circ$

$\therefore O\hat{Q}R = Q\hat{O}R$

$\therefore \underline{\underline{RQ = OR}}$ (ත්‍රිකෝණයක සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද සමාන වේ.)

2. 

AB යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ ජ්‍යායකි. එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C වේ. දික් කරන ලද OC, Dහි දී වෘත්තයට හමු වේ. $AD = DB$ බව පෙන්වන්න.



$A\hat{C}D = B\hat{C}D = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

ACD සහ BCD ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

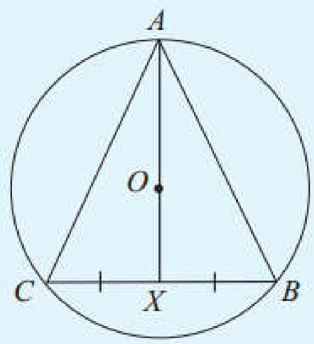
$AC = CB$ (දත්තය)

$A\hat{C}D = B\hat{C}D$ (සෘජුකෝණ)

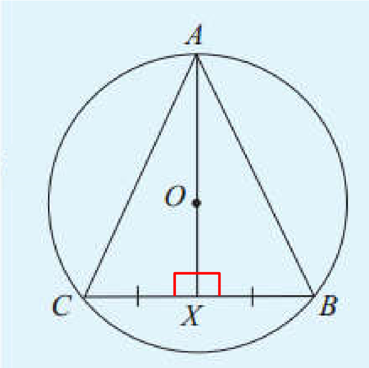
$CD = CD$ (පොදු පාදය)

$\therefore ACD\,\Delta \equiv BCD\,\Delta$ (පා.කෝ.පා. අවස්ථාව)

$\therefore \underline{\underline{AD = DB}}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

3. 

ABC ත්‍රිකෝණයේ A, B හා C ලක්ෂ්‍ය, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත පිහිටයි. BCහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ. AX රේඛාව මත O පිහිටයි නම්, $AB = AC$ බව පෙන්වන්න.



$A\hat{X}C = A\hat{X}B = 90°$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

AXC සහ AXB ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

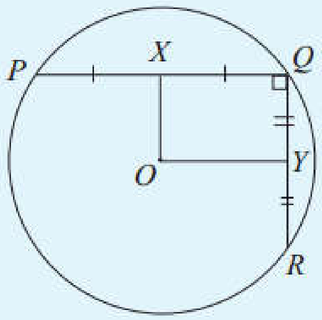
$CX = XB$ (දත්තය)

$A\hat{X}C = A\hat{X}B$ (සෘජුකෝණ)

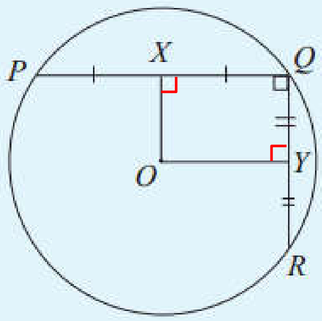
$AX = AX$ (පොදු පාදය)

$\therefore AXC\,\Delta \equiv AXB\,\Delta$ (පා.කෝ.පා. අවස්ථාව)

$\therefore \underline{AB = AC}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)



4. PQ සහ QR, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක එකිනෙකට ලම්බ ජ්‍යා දෙකකි. එම ජ්‍යා දෙකේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X සහ Y වේ. $OXQY$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



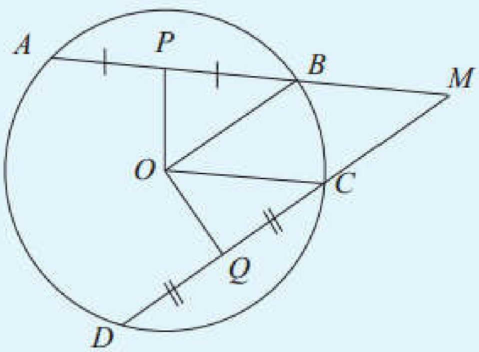
$O\hat{X}Q = 90°$, $O\hat{Y}Q = 90°$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$X\hat{O}Y + 90° + 90° + 90° = 360°$ ($OYQX$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

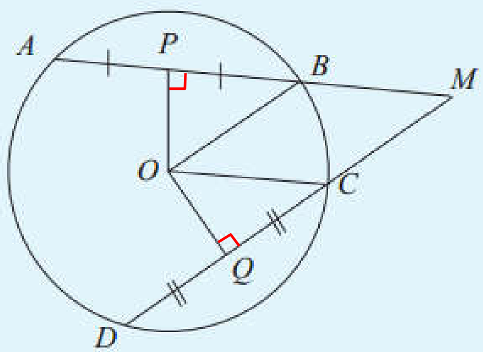
$X\hat{O}Y = 360° - 270°$

$X\hat{O}Y = 90°$

$\therefore OXQY$ සෘජුකෝණාස්‍රයකි. (අභ්‍යන්තර කෝණ හතරම $90°$, $XQ \neq QY$ නිසා)



5. AB සහ CD, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ ජ්‍යා වේ. එම ජ්‍යායන්ගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ. AB හා DC ජ්‍යා දික් කළ විට M හි දී හමු වේ. $P\hat{O}Q$ හා $P\hat{M}Q$ පරිපූරක කෝණ යුගලයක් බව පෙන්වන්න.



$O\hat{P}M = 90°$, $O\hat{Q}M = 90°$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$OPMQ$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව සලකමු.

$P\hat{O}Q + P\hat{M}Q + O\hat{P}M + O\hat{Q}M = 360°$

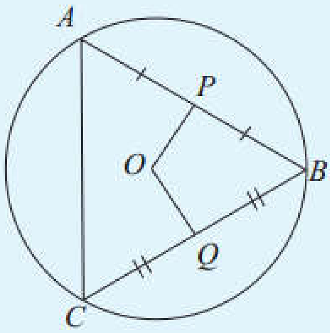
$P\hat{O}Q + P\hat{M}Q + 90° + 90° = 360°$

$P\hat{O}Q + P\hat{M}Q = 360° - 180°$

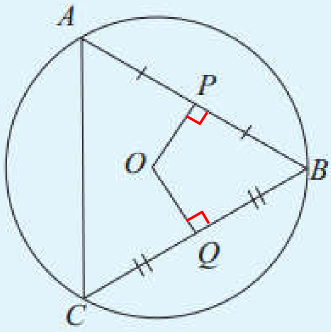
$P\hat{O}Q + P\hat{M}Q = 180°$

$\therefore P\hat{O}Q$ සහ $P\hat{M}Q$ පරිපූරක කෝණ වේ.

6.



O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ AB සහ BC ජ්‍යායන්ගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ. $P\hat{O}Q = B\hat{A}C + A\hat{C}B$ බව පෙන්වන්න.



$$\left.\begin{aligned} O\hat{P}B &= 90^\circ \\ O\hat{Q}B &= 90^\circ \end{aligned}\right\}$$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$P\hat{O}Q + P\hat{B}Q + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ ($OPBQ$ චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$P\hat{O}Q + P\hat{B}Q = 360^\circ - 180^\circ$

$P\hat{O}Q + P\hat{B}Q = 180^\circ \longrightarrow ①$

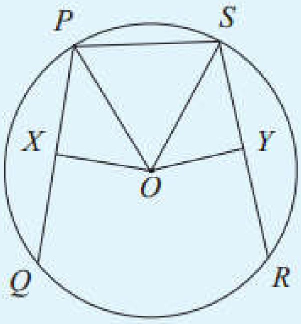
ABC ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව සලකමු.

$B\hat{A}C + A\hat{C}B + P\hat{B}Q = 180^\circ \longrightarrow ②$

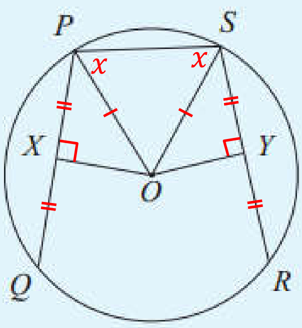
①=②; $P\hat{O}Q + \cancel{P\hat{B}Q} = B\hat{A}C + A\hat{C}B + \cancel{P\hat{B}Q}$

$\underline{\underline{P\hat{O}Q = B\hat{A}C + A\hat{C}B}}$

7.



PQ සහ RS, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක සමාන ජ්‍යා දෙකකි. ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X සහ Y වේ. $X\hat{P}S = Y\hat{S}P$ බව පෙන්වන්න.



$$\left.\begin{aligned} P\hat{X}O &= 90^\circ \\ S\hat{Y}O &= 90^\circ \end{aligned}\right\}$$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$PQ = SR$ (දත්තය)

$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}SR$

$PX = SY$ (දත්තය)

PXO සහ SYO ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$PX = SY$ (සාධිතයි)

$P\hat{X}O = S\hat{Y}O$ (සෘජුකෝණ)

$PO = SO$ (වෘත්තයේ අරයන්)

$\therefore PXO\,\Delta \equiv SYO\,\Delta$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

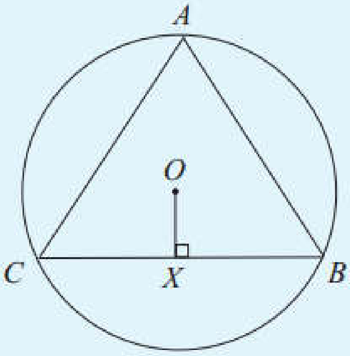
$\therefore X\hat{P}O = O\hat{S}Y \longrightarrow ①$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

$O\hat{P}S = P\hat{S}O \longrightarrow ②$ (POS සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් නිසා)

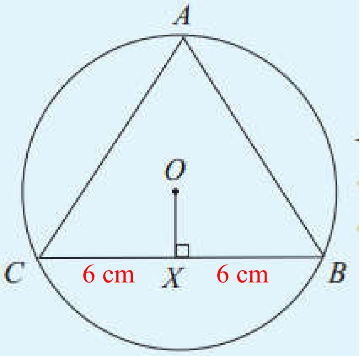
①+②; $X\hat{P}O + O\hat{P}S = O\hat{S}Y + P\hat{S}O$

$\underline{\underline{X\hat{P}S = Y\hat{S}P}}$

27.3 අභ්‍යාසය

1. 

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ A, B හා C ලක්ෂ්‍ය O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. O සිට BCට අඳින ලද ලම්බය OX වේ. $XB = 6$ cm නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.



$\boldsymbol{CB \perp OX}$ නිසා $\boldsymbol{CB}$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\boldsymbol{X}$ වේ.

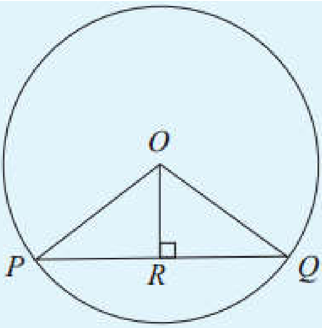
$\boldsymbol{XB = 6\text{ cm}}$

$\boldsymbol{CB = 2 \times 6\text{ cm} = 12\text{ cm}}$

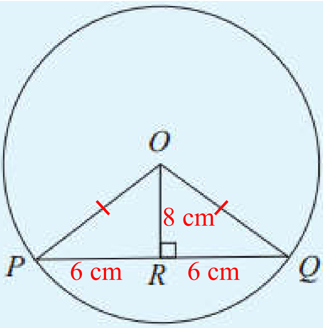
$\boldsymbol{ABC}$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිසා $AB = BC = CA$

$\boldsymbol{ABC}$ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය $= 12 + 12 + 12$

$= \underline{\underline{36\text{ cm}}}$

2. 

PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යායකි. O සිට PQට අඳින ලද ලම්බය OR වේ. $PQ = 12$ cm, $OR = 8$ cm නම් OPQ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.



$\boldsymbol{PQ \perp OR}$ නිසා $\boldsymbol{PQ}$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\boldsymbol{R}$ වේ.

$\boldsymbol{PQ = 12\text{ cm}}$

$\boldsymbol{PR = \frac{1}{2} \times 12\text{ cm} = 6\text{ cm}}$

$\boldsymbol{PRO}$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

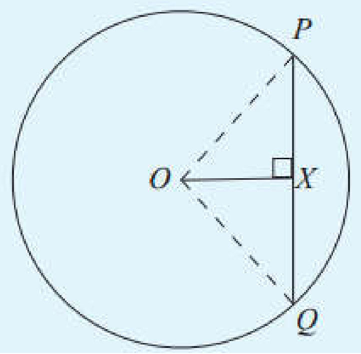
$$\begin{aligned} \boldsymbol{PO^2} &= \boldsymbol{PR^2 + RO^2} \\ &= \boldsymbol{6^2 + 8^2} \\ &= \boldsymbol{36 + 64} \\ &= \boldsymbol{100} \\ \boldsymbol{PO} &= \boldsymbol{\sqrt{100}} \\ \boldsymbol{PO} &= \boldsymbol{10} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{OPQ}$ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය $= PO + OQ + PQ$

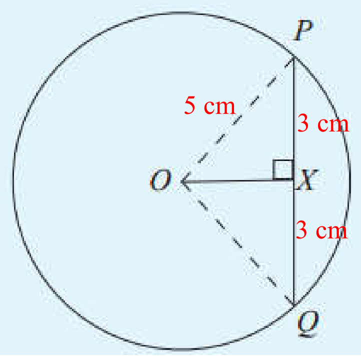
$= 10 + 10 + 12$

$= \underline{\underline{32\text{ cm}}}$

3.



PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක පිහිටි ජ්‍යායකි. O සිට PQට අඳින ලද ලම්බය OX වේ. $PQ = 6$ cm හා වෘත්තයේ අරය 5 cm නම් OX හි දිග සොයන්න.



$PQ \perp OX$ නිසා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

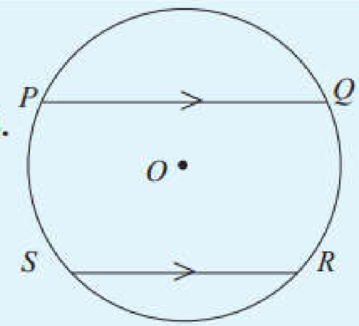
$PQ = 6$ cm

$PX = \frac{1}{2} \times 6$ cm $= 3$ cm

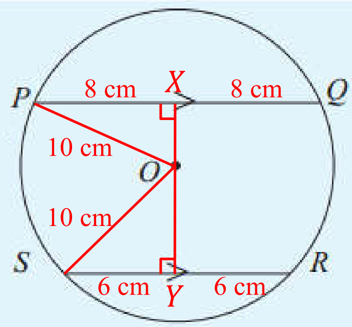
OPX ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OP^2 = OX^2 + XP^2$$
$$5^2 = OX^2 + 3^2$$
$$OX^2 = 5^2 - 3^2$$
$$= 25 - 9$$
$$= 16$$
$$OX = \sqrt{16}$$
$$\underline{\underline{OX = 4 \text{ cm}}}$$

4.



PQ සහ RS යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක කේන්ද්‍රය දෙපසින් පිහිටි සමාන්තර ජ්‍යා දෙකකි. වෘත්තයේ අරය 10 cm වේ. $PQ = 16$ cm සහ $SR = 12$ cm නම්, ජ්‍යා දෙක අතර දුර සොයන්න.



O සිට PQ ට OX ලම්බය ද SR ට OY ලම්බය ද අඳිමු.

$PQ \perp OX$ නිසා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

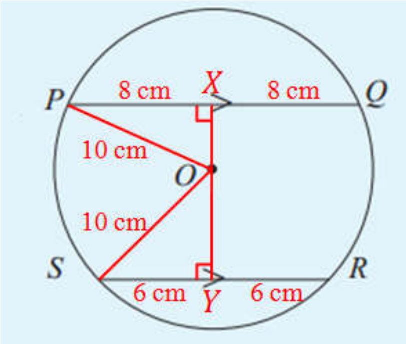
$SR \perp OY$ නිසා SR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$PQ = 16$ cm $\qquad$ $SR = 12$ cm

$PX = \frac{1}{2} \times 16$ cm $= 8$ cm $\qquad$ $SY = \frac{1}{2} \times 12$ cm $= 6$ cm

OPX ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OP^2 = OX^2 + XP^2$$
$$10^2 = OX^2 + 8^2$$
$$OX^2 = 10^2 - 8^2$$
$$= 100 - 64$$
$$= 36$$
$$OX = \sqrt{36}$$
$$OX = 6 \text{ cm}$$



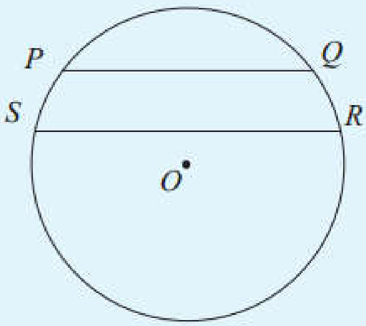
OYS ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OS^2 = OY^2 + SY^2$$
$$10^2 = OY^2 + 6^2$$
$$OY^2 = 10^2 - 6^2$$
$$= 100 - 36$$
$$= 64$$
$$OY = \sqrt{64}$$
$$OY = 8 \text{ cm}$$

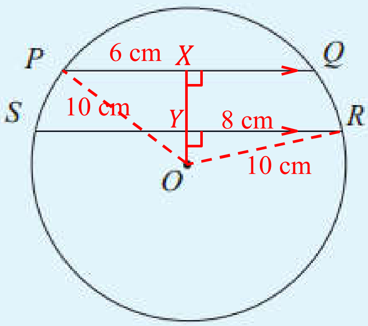
$P\hat{X}O = 90°$ ද $S\hat{Y}O = 90°$ ද $PQ \mathbin{//} SR$ ද නිසා XOY සරල රේඛාවකි.

$$XY = XO + OY$$
$$= 6\ cm + 8\ cm$$
$$= 14\ cm$$

∴ ජ්‍යා දෙක අතර දුර $= \underline{\underline{14\ cm}}$

5. 

PQ සහ RS යනු O කේන්ද්‍රය වූ දී ඇති වෘත්තය මත පිහිටි එකිනෙකට සමාන්තර ජ්‍යා දෙකකි. වෘත්තයේ අරය 10 cm වේ. $PQ = 12$ cm ද $SR = 16$ cm නම්, ජ්‍යා දෙක අතර දුර සොයන්න.



O සිට PQ ට OX ලම්බය අඳිමු.

එවිට $OY \perp SR$ ද වේ. (PQ//SR, $Q\hat{X}Y = R\hat{Y}O$ අනුරූප කෝණ)

$PQ \perp OX$ නිසා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$OY \perp SR$ නිසා SR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$PQ = 12$ cm $\qquad SR = 16$ cm

$PX = \frac{1}{2} \times 12$ cm $= 6$ cm $\qquad YR = \frac{1}{2} \times 16$ cm $= 8$ cm

OPX ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OP^2 = OX^2 + XP^2$$
$$10^2 = OX^2 + 6^2$$
$$OX^2 = 10^2 - 6^2$$
$$= 100 - 36$$
$$= 64$$
$$OX = \sqrt{64}$$
$$OX = 8 \text{ cm}$$

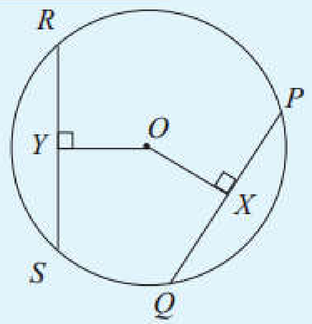
OYR ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OR^2 = OY^2 + YR^2$$
$$10^2 = OY^2 + 8^2$$
$$OY^2 = 10^2 - 8^2$$
$$= 100 - 64$$
$$= 36$$
$$OY = \sqrt{36}$$
$$OY = 6 \text{ cm}$$

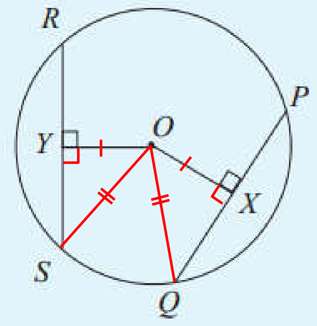
$$XY = OX - OY$$
$$= 8\ cm - 6\ cm$$
$$= 2\ cm$$

∴ ජ්‍යා දෙක අතර දුර $= \underline{\underline{2\ cm}}$

27.4 අභ්‍යාසය

1. 

PQ සහ RS, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යායන් දෙකකි. OX සහ OY, O සිට PQ සහ RSට අඳින ලද ලම්බ වේ. $OX = OY$ නම් $PQ = RS$ බව සාධනය කරන්න. (ඉඟිය: OS හා OQ යා කරන්න)



$SR \perp OY$ නිසා RS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$PQ \perp OX$ නිසා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

OYS සහ OXQ ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$OY = OX$ (දත්තය)

$O\hat{Y}S = O\hat{X}Q$ (සෘජුකෝණ)

$OS = OQ$ (වෘත්තයේ අරයන්)

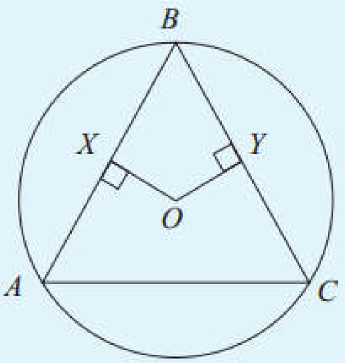
$\therefore OYS\,\Delta \equiv OXQ\,\Delta$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

$\therefore YS = XQ$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

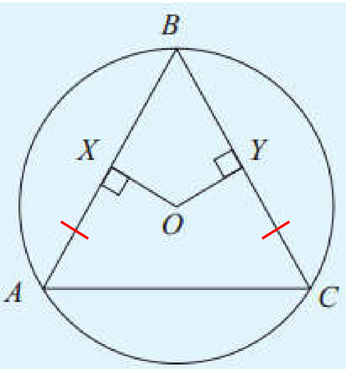
$2YS = 2XQ$

$RS = PQ$

$PQ = RS$

2. 

ABC ත්‍රිකෝණයේ A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත. ABට සහ BCට O සිට අඳින ලද ලම්බ OX සහ OY වේ. $AX = CY$ නම් $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ බව සාධනය කරන්න.



$AB \perp OX$ නිසා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$\therefore AX = \frac{1}{2}AB \longrightarrow (1)$

$BC \perp OY$ නිසා BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$\therefore CY = \frac{1}{2}BC \longrightarrow (2)$

තවද $AX = CY$ (දත්තය)

$\therefore \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$

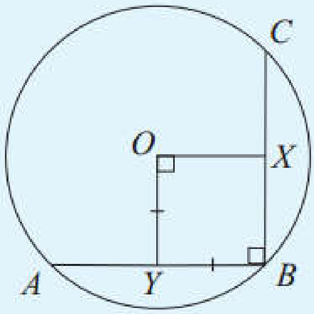
$AB = BC$

$\therefore ABC$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි.

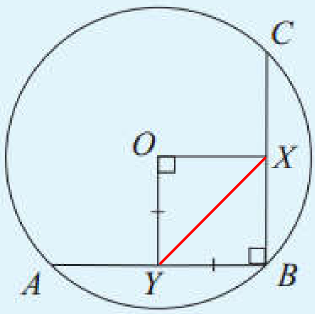
සමද්විපාද ත්‍රිකෝණය සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා

$B\hat{A}C = B\hat{C}A$

3.



AB සහ BC යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක එකිනෙකට ලම්බ, සමාන ජ්‍යාය දෙකකි. දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් $OXBY$ සමචතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



OYX සහ BYX ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$OY = YB$ (දත්තය)

$X\hat{O}Y = X\hat{B}Y$ (දත්තය)

$XY = XY$ (පොදු පාදය)

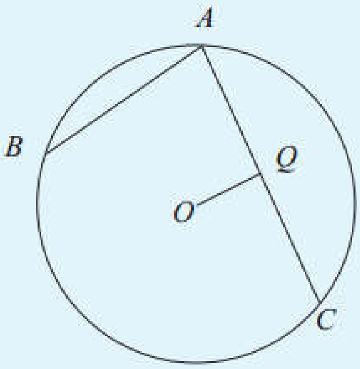
$\therefore OYX\,\Delta \equiv BYX\,\Delta$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

$\therefore OX = BX$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

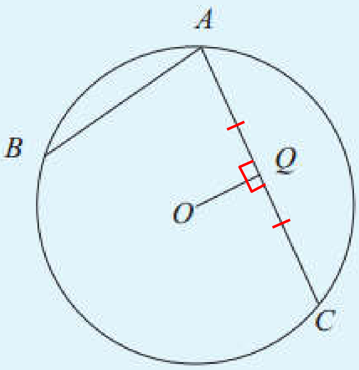
$\therefore OX = BX = OY = YB$

$OYBX$ චතුරස්‍රයේ පාද හතරම සමාන ද එක් කෝණයක් සෘජුකෝණයක් ද වන නිසා $OYBX$ චතුරස්‍රය සමචතුරස්‍රයක් වේ.

4.



AB සහ AC යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යා දෙකකි. O සිට ACට අඳින ලද ලම්බය OQ වේ. $2AB = AC$ නම් $AB = AQ$ බව සාධනය කරන්න.



$2AB = AC$ (දත්තය)

$AB = \frac{1}{2}AC \longrightarrow ①$

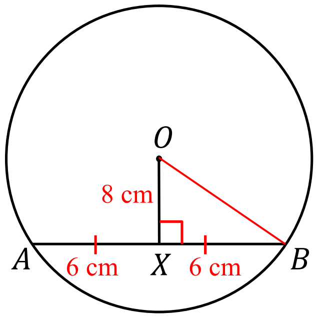
$AC \perp OQ$ නිසා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q වේ.

$\therefore AQ = \frac{1}{2}AC \longrightarrow ②$

①=② ; $\underline{\underline{AB = AQ}}$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. වෘත්තයක ජ්‍යායක් කේන්ද්‍රයට 8 cm දුරින් පිහිටයි. ජ්‍යායේ දිග 12 cmක් නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



O සිට AB ට OX ලම්බය අඳිමු.

$AB \perp OX$ නිසා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$AB = 12$ cm

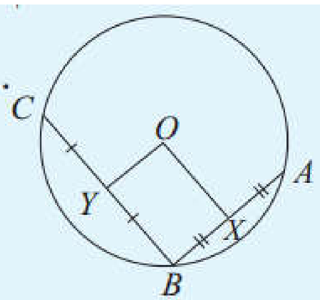
$XB = \frac{1}{2} \times 12$ cm $= 6$ cm

OXB ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

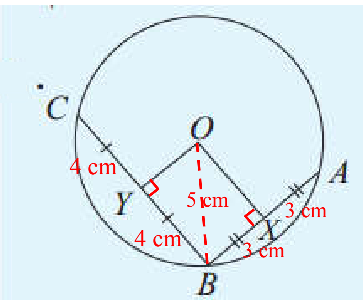
$$OB^2 = OX^2 + XB^2$$
$$= 8^2 + 6^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$OB = \sqrt{100}$$
$$OB = 10 \text{ cm}$$

වෘත්තයේ අරය $=$ 10 cm

2 .



O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක අරය 5 cm වේ. එහි AB සහ BC ජ්‍යායන්ගේ දිග 6 cm සහ 8 cm වේ. ජ්‍යාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X සහ Y වේ. $OXBY$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.



$O\hat{X}B = 90^\circ$ } (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා
$O\hat{Y}B = 90^\circ$ } කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

$AB = 6$ cm

$XB = 3$ cm (AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X නිසා)

$BC = 8$ cm

$BY = 4$ cm (BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y නිසා)

OBY ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OB^2 = OY^2 + YB^2$$
$$5^2 = OY^2 + 4^2$$
$$OY^2 = 5^2 - 4^2$$
$$= 25 - 16$$
$$= 9$$
$$OY = \sqrt{9}$$
$$OY = 3 \text{ cm}$$

OBX ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

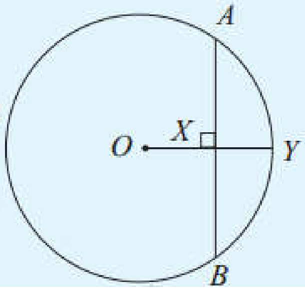
$$OB^2 = OX^2 + XB^2$$
$$5^2 = OX^2 + 3^2$$
$$OX^2 = 5^2 - 3^2$$
$$= 25 - 9$$
$$= 16$$
$$OX = \sqrt{16}$$
$$OX = 4 \text{ cm}$$

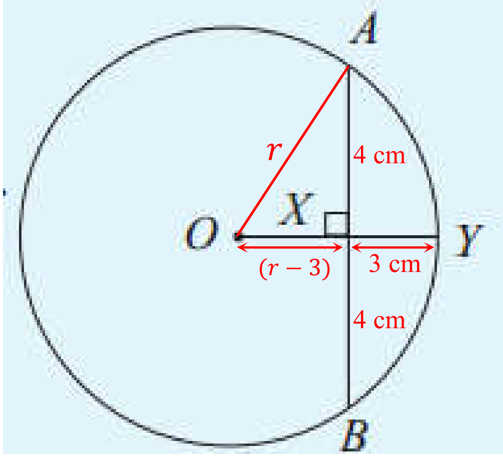
$OXBY$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= OY + YB + BX + XO$

$= 3\,cm + 4\,cm + 3\,cm + 4\,cm$

$= 14\,cm$

3. AB යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක පිහිටි, දිග 8 cm වූ ජ්‍යායකි. O සිට ජ්‍යායට අඳින ලද ලම්බය X හි දී ජ්‍යාය ඡේදනය කරන අතර Y හි දී වෘත්තය හමු වේ. $XY = 3$ cm නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.





$AB \perp OX$ නිසා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$AB = 8$ cm

$AX = 4$ cm (AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X නිසා)

වෘතක්තයේ අරය r ලෙස ගනිමු.

OXA ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OA^2 = OX^2 + XA^2$$

$$r^2 = (r-3)^2 + 4^2$$

$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} - 6r + 9 + 16$$

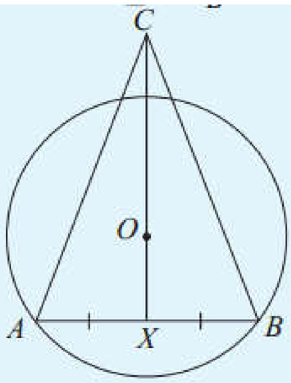
$$6r = 25$$

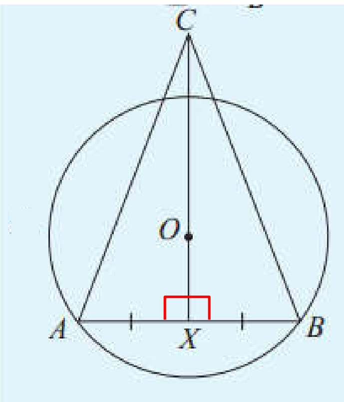
$$r = \frac{25}{6}$$

$$r = 4\frac{1}{6}$$

වෘත්තයේ අරය $= 4\frac{1}{6}$ cm

4. AB යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යායකි. එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ. X සිට O හරහා අඳින ලද රේඛාව මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. $AC = BC$ බව සාධනය කරන්න.





$A\hat{X}C = B\hat{X}C = 90^\circ$ (වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව ජ්‍යායට ලම්බ නිසා)

AXC සහ BXC ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$AX = XB$ (දත්තය)

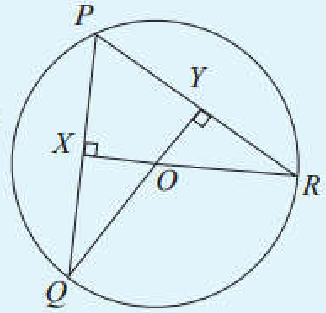
$A\hat{X}C = B\hat{X}C$ (සෘජුකෝණ)

$CX = CX$ (පොදු පාදය)

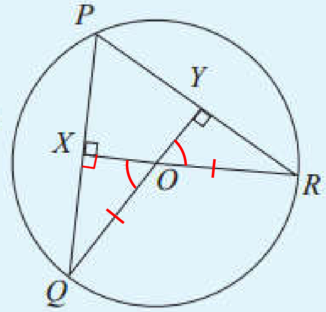
$\therefore AXC\,\Delta \equiv BXC\,\Delta$ (පා.කෝ.පා. අවස්ථාව)

$\therefore \underline{\underline{AC = BC}}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

5\.



PQ සහ PR යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යා වේ. O සිට PQට සහ PRට අඳින ලම්බ OX සහ OY වේ. RX හා QY සරල රේඛා නම් $PQ = PR$ බව සාධනය කරන්න.



OXQ සහ OYR ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$X\hat{O}Q = Y\hat{O}R$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$O\hat{X}Q = O\hat{Y}R$ (ඍජු කෝණ)

$OQ = OR$ (වෘත්තයේ අරයන්)

$\therefore OXQ\,\Delta \equiv OYR\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව)

$\therefore XQ = YR$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

$2XQ = 2YR \longrightarrow$ ①

$PQ \perp OX$ නිසා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$\therefore 2XQ = PQ \longrightarrow$ ②

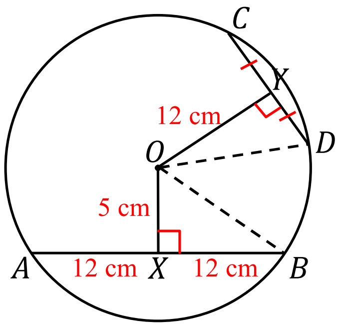
$PR \perp OY$ නිසා PR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$\therefore 2YR = PR \longrightarrow$ ③

② සහ ③ , ① ට ආදේශයෙන්,

$\underline{\underline{PQ = PR}}$

6\. වෘත්තයක කේන්ද්‍රයට 5 cm දුරින් 24 cm දිග ජ්‍යායක් පිහිටයි. තවත් ජ්‍යායක් කේන්ද්‍රයට 12 cm දුරින් පිහිටයි. එම ජ්‍යායේ දිග සොයන්න.



O සිට AB ට OX ලම්බය ද CD ට OY ලම්බය ද අඳිමු.

$AB \perp OX$ නිසා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$CD \perp OY$ නිසා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$AB = 24$ cm

$XB = \frac{1}{2} \times 24\text{ cm} = 12\text{ cm}$

OXB ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$OB^2 = OX^2 + XB^2$

$= 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144$

$= 169$

$OB = \sqrt{169}$

$= 13$ cm

$OD = OB$ (වෘත්තයේ අරයන්)

$\therefore OD = 13\ cm$

OYD ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$OD^2 = OY^2 + YD^2$

$13^2 = 12^2 + YD^2$

$YD^2 = 13^2 - 12^2$

$= 169 - 144$

$= 25$

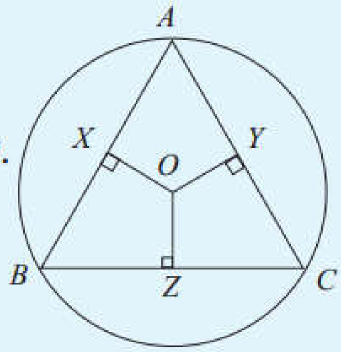
$YD = \sqrt{25}$

$= 5$ cm

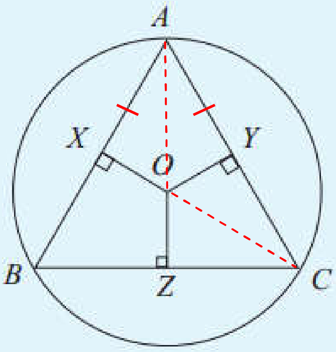
$CD = 2YD$ (CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y නිසා)

$CD = 2 \times 5\ cm$

$\underline{\underline{CD = 10\ cm}}$

7. 

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක පිහිටා ඇත. කේන්ද්‍රයේ සිට ත්‍රිකෝණයේ පාදවලට අඳින ලද ලම්බ OX, OY හා OZ වේ. $OX = OY = OZ$ බව සාධනය කරන්න.



$AB \perp OX$ නිසා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$\therefore AX = \frac{1}{2}AB$

$AC \perp OY$ නිසා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$\therefore AY = \frac{1}{2}AC$

$AB = AC$ (ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිසා)

$\therefore \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$

$\therefore AX = AY$

AOX සහ AOY ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$A\hat{X}O = A\hat{Y}O$ (සෘජු කෝණ)

$AX = AY$ (සාධිතයි)

$AO = AO$ (පොදු පාදය)

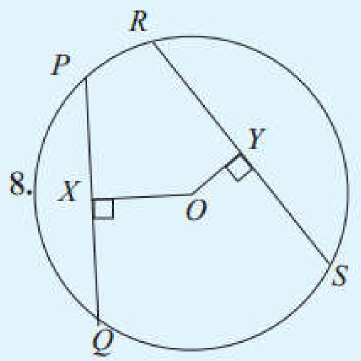
$\therefore AOX\,\Delta \equiv AOY\,\Delta$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

$\therefore OX = OY \longrightarrow$ 1 (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

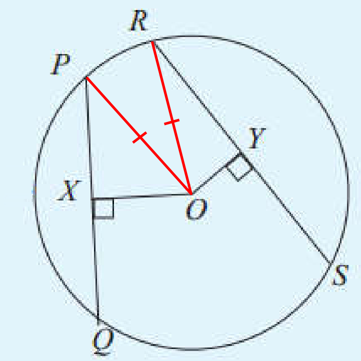
මේ අයුරින්ම $YOC\,\Delta \equiv ZOC\,\Delta$ බව පෙන්විය හැකිය.

$\therefore OY = OZ \longrightarrow$ 2 (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

1 හා 2 අනුව; $OX = OY = OZ$

8. 

PQ සහ RS, O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යා දෙකකි. O සිට PQ සහ RSට අඳින ලද ලම්බ OX සහ OY වේ.
$PQ^2 - RS^2 = 4OY^2 - 4OX^2$ බව පෙන්වන්න.



$PQ \perp OX$ නිසා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

$\therefore PX = \frac{1}{2}PQ$

PXO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$PO^2 = PX^2 + OX^2$$

$$PO^2 = (\tfrac{1}{2}PQ)^2 + OX^2$$

$$PO^2 = \tfrac{1}{4}PQ^2 + OX^2 \longrightarrow (1)$$

$RS \perp OY$ නිසා RS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ.

$\therefore RY = \frac{1}{2}RS$

RYO ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$RO^2 = RY^2 + OY^2$$

$$RO^2 = (\tfrac{1}{2}RS)^2 + OY^2$$

$$RO^2 = \tfrac{1}{4}RS^2 + OY^2 \longrightarrow (2)$$

$PO = RO$ (වෘත්තයේ අරයන්)

$$PO^2 = RO^2$$

$\therefore (1) = (2)$

$$\tfrac{1}{4}PQ^2 + OX^2 = \tfrac{1}{4}RS^2 + OY^2$$

$$PQ^2 + 4OX^2 = RS^2 + 4OY^2$$

$$\underline{\underline{PQ^2 - RS^2 = 4OY^2 - 4OX^2}}$$