01 තාත්ත්වික සංඛ්‍යා

ග්‍රීක දාර්ශනිකයෙක් හා ගණිතඥයෙකු වූ ආකිමිඩීස් ක්‍රි. පූ. 287 - 212 ජීවත් විය. π හි අගය $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ බව ඔහු හඳුන්වා දුන් අතර මෙහි මධ්‍යන්‍යය අගය π ලෙස යොදා ගත්තේ ය.

අන්තර්ජාලයෙනි

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- සංඛ්‍යා වර්ග, ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා, නිඛිල, පරිමේය සංඛ්‍යා හා අපරිමේය සංඛ්‍යා හා තාත්ත්වික සංඛ්‍යා
- කරණි, අඛිලකරණි හඳුනාගැනීම
- අපරිමේය හරයන් ඇති භාග පරිමේය හරයන් ඇති භාග බවට පත් කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

1.1 තාත්ත්වික සංඛ්‍යා

ළමයි : ආයුබෝවන් සර්!

ගුරුතුමා : ආයුබෝවන් ළමයි!

ගුරුතුමා : අද අපි කථා කරන පාඩම ගැන ඔබ දන්නවා. ඊට අවශ්‍ය කරුණු කාරණා සොයාගෙන එන්න කියා මම ඔබව කලින් දැනුවත් කළා. මම හිතනවා ඔබ සූදානම් ඇති කියලා. ඔබ සූදානම් වෙලා තිබෙන විදිහට එක් එක් කණ්ඩායම පන්තියට කරුණු ඉදිරිපත් කරන්න ඕනෑ. මුලින් ම නිලුපුලී ඔබ සොයාගත් සංඛ්‍යා වර්ග පිළිබඳ ව කරුණු ඉදිරිපත් කරන්න.

නිලුපුලී : අපි මුලින් ම ඉගෙනගත් සංඛ්‍යා **ගණින සංඛ්‍යායි.** ගණින සංඛ්‍යා ලෙස හැඳින්වූයේ ඒවා ගණන් කිරීමට උපයෝගී කරගත් නිසයි. මෙම සංඛ්‍යා 1, 2, 3, 4, ... වේ. නමුත් ගණින සංඛ්‍යා කුලකයට ශූන්‍යය අයත් වන්නේ නැහැ. මෙසේ ම ගණින සංඛ්‍යා කුලකය ශූන්‍යය සමඟ ගත් විට **ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා** කුලකය ලෙස හඳුන්වනවා. මෙය $\mathbb{N}$ මගින් සංකේතවත් වේ. එනම් $\mathbb{N} = \{0,1,2, \ldots\}$. ඊට පසු ව හඳුනාගත්තේ **ඔත්තේ සංඛ්‍යා** සහ **ඉරට්ටේ සංඛ්‍යායි.** 2 න් ඉතිරි නැති ව බෙදෙන සංඛ්‍යා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා ලෙසත්, 2 න් බෙදූ විට 1 ක් ඉතිරි වන සංඛ්‍යා ඔත්තේ ලෙසත් හඳුන්වනවා. මේ සියලු ම සංඛ්‍යා කුලක අපරිමිත වෙනවා.

නිසාම් : ඒ විතරක් නොවෙයි ඊට පස්සේ අපි ඉගෙන ගත්තා තවත් සංඛ්‍යා රටා ගැන, ඉන් එකක් නම්, **ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා** රටාවයි.

1, 3, 6, 10, 15, ... ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා රටාවට අයත් වුණා.

1, 4, 9, 16, 25, ... වැනි සංඛ්‍යා රටාවට අපි කිව්වේ **සමචතුරස්‍ර සංඛ්‍යා** කියලායි. ඒවාට **වර්ග සංඛ්‍යා** කියලත් කියනවා.

නිලුපුලී : ඒ විතරක් නෙමෙයි. **ප්‍රථමක සංඛ්‍යා, සංයුක්ත සංඛ්‍යා** ගැනත් අපි ඉගෙන ගත්තා. එකිනෙකට වෙනස් සාධක යුගලයක් පමණක් ඇති සංඛ්‍යා ප්‍රථමක සංඛ්‍යා ලෙස නම් කළා.

ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක සාධක යුගලයෙන් එක් සාධකයක් 1 වන අතර අනෙක් සාධකය එම සංඛ්‍යාව ම වේ. එනම්,

- 2 හි සාධක 1 හා 2 පමණි.
- 5 හි සාධක 1 හා 5 පමණි.

මේ අනුව 2 සහ 5 ප්‍රථමක සංඛ්‍යා වේ. 1 හි සාධක වන්නේ 1 පමණි. ඒ අනුව 1 ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් නො වේ.

ප්‍රථමක නොවන, සාධක දෙකකට වඩා ඇති සංඛ්‍යා අපි **සංයුක්ත සංඛ්‍යා** හෝ සසාධක සංඛ්‍යා නමින් හැඳින්වුවා. උදාහරණයක් ලෙස 1, 2, 3 සහ 6 ලෙස 6 හි සාධක 4ක් තිබෙන බැවින් 6 සංයුක්ත සංඛ්‍යාවකි. ඒවා **සසාධක සංඛ්‍යා** නමින් ද හඳුන්වනවා.

යසංගි : අපි මීට කලින් උගත් සංඛ්‍යා වර්ගයක් ලෙස **භාග** හඳුන්වාදිය හැකිය. ලවය එකක් වූ භාග **ඒකක භාග** ලෙස නම් කළා.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{100}$ වැනි භාග මෙයට උදාහරණ වේ.

ලවය එකකට වැඩි එහෙත් හරයට වඩා අඩු භාග හැඳින්වූයේ **නියම භාග** නමිනි. $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}$ වැනි භාග මෙයට උදාහරණ වේ.

ලවය හරයට සමාන හෝ ලවය හරයට වඩා විශාල භාග **විෂම භාග** ලෙස හැඳින්වේ.

$\frac{11}{6}, \frac{7}{5}, \frac{8}{8}, \frac{17}{9}, \frac{15}{15}$ වැනි භාග උදාහාරණ වේ.

පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් හා භාගයකින් නිරූපිත සංඛ්‍යා **මිශ්‍ර සංඛ්‍යා** නම් වේ. උදාහරණ ලෙස $1\frac{2}{3}, 4\frac{3}{5}, 12\frac{1}{8}$ දැක්විය හැකි ය.

නුවන් : +1, +2, +3, +4... වැනි ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා ධන නිඛිල ලෙසත් −1, −2, −3... වැනි සංඛ්‍යා සෘණ නිඛිල ලෙසත් හැඳින්වේ. මේ ධන හා සෘණ නිඛිල සියල්ල ශුන්‍යය ද සමඟ ගත් විට **නිඛිල කුලකය** ලෙස නම් කරනු ලැබේ. එය $\mathbb{Z}$ මගින් දැක්වේ. ඒ වගේ ම භාග සංඛ්‍යා, දශම ලෙසත් ලිවිය හැකි ය.

$\frac{3}{4}$ දශමයක් ලෙස 0.75 ලෙසත්, $\frac{9}{8}$ දශමයක් ලෙස 1.125 ලෙසත් ලියා දැක්විය හැකියි.

$\frac{2}{7}$ වැනි භාග 0.285714285714... ආදී වශයෙන් එක ම සංඛ්‍යා පෙළක් පුන පුනා ලැබෙන දශමයන් ලෙස ලියා දැක්විය හැකි අතර,
ඒවා **සමාවර්ත දශම** නමින් නම් කරනු ලැබේ.

$\frac{1}{4}$ දශමයක් ලෙස ලියූ විට 0.25 ලෙස ලියා නිම කළ හැකියි.

$\frac{3}{8}$ දශම ලෙස ලියූ විට 0.375 ලෙස ලියා නිම කළ හැකියි. එවැනි ලියා නිම කළ හැකි දශම **අන්ත දශම** ලෙස නම් කළා. එබැවින් **සමාවර්ත දශම** හා **අන්ත දශම** අනුපාතයක් ලෙස හෝ භාගයක් ලෙස හෝ ලියන්න පුළුවනි.

ගුරුතුමා : හොඳයි ඔබ හැම දෙනා ම හොඳයි. දැන් මම ඔබට සංඛ්‍යා ගැන තවත් තොරතුරු කියා දෙනවා.

නිඛිල කුලකය $\mathbb{Z}$ සංකේතයෙන් දක්වමු.

$$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3 ---\}$$
$$\mathbb{Z}^- = \{---, -3, -2, -1\}$$
$$\mathbb{Z} = \{---, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 .....\}$$

p හා q නිඛිල කුලකයේ අවයව දෙකක් නම් ද, $q \neq o$ ද වන විට $\frac{p}{q}$ ආකාරයට නිරූපණය කළ හැකි සංඛ්‍යා **පරිමේය සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වේ. පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{Q}$ සංකේතයෙන් දක්වමු. ඒ අනුව

$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq o \right\}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

එසේ ම නිඛිල කුලකය පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකයේ උප කුලකයක් වේ. එනම් $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ වේ.

පරිමේය සංඛ්‍යාවක් සෑම විට ම සමාවර්ත දශමයක් හෝ අන්ත දශමයක් ද විය හැකියි. $2,\ -8,\ \frac{3}{5},\ 0.4,\ -\frac{7}{8},\ \sqrt{25},\ 3\sqrt{9},\ 6\sqrt{64}$ වැනි සංඛ්‍යා පරිමේය සංඛ්‍යා ය.

එහෙත් $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{33}$ වැනි සංඛ්‍යා නිඛිල දෙකක අනුපාතයක් ලෙස නිරූපණය කළ නොහැකි ය.

$\sqrt{3}$ දශමයක් ලෙස ලියූ විට 1.732050808... මෙම දශම සංඛ්‍යාවේ නිමාවක් හෝ රටාවක් නැත. එම නිසා සමාවර්ත දශමයක් නො වේ.

$\sqrt{33}$ = 5.744562647... ද එවැන්නකි. මේ ආකාරයේ නිඛිල දෙකක අනුපාතයක් ලෙස දැක්විය නොහැකි අන්ත දශම හෝ සමාවර්ත දශම ද නොවන සංඛ්‍යා **අපරිමේය සංඛ්‍යා** ලෙස නම් කෙරේ.
අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{Q}'$වලින් දැක්වේ.

එසේම පරිමේය සංඛ්‍යා හා අපරිමේය සංඛ්‍යා දෙක ම අඩංගු කුලකය **තාත්ත්වික සංඛ්‍යා** කුලකය ලෙස හැඳින්වේ. තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය දක්වන සංකේතය $\mathbb{R}$ වේ. තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකයේ හා අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකයේ මේලය ලෙස දැක්විය හැකි වේ.

π හි අගය පරිමේය ද අපරිමේය ද යන්න සොයා බලමු.

π හි අගය වෘත්තයක පරිධියේත්, විෂ්කම්භයේත් අනුපාතයක් ලෙස, ඔබ මීට ඉහත උගෙන ඇත. π වෙනුවට ඔබ (ආසන්න අගයක් වන) $\frac{22}{7}$ යොදා ගත් ආකාරය මතකයට නගාගන්න.

$\frac{22}{7}$ = 3.142857 එය සමාවර්ත දශමයකි. එහෙත් π හි අගය 3.14159265358979323846 ... වැනි නිමාවක් නැති අගයකි. එය සමාවර්ත දශමයක් නො වේ. අන්ත දශමයක් ද නො වේ. එබැවින් π හි අගය අයත් වන්නේ අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකයටයි. [ගණනය කිරීමේ පහසුව පිණිස π හි අගය සඳහා $\frac{22}{7}$ ආදේශ කර ගණනය කිරීම් කරනු ලැබේ.]

දැන් ඔබ උගත් සියලු සංඛ්‍යා කුලක මෙම සටහනින් දැක්විය හැකි ය.

- තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ($\mathbb{R}$)
  - පරිමේය සංඛ්‍යා ($\mathbb{Q}$)
    - නිඛිල ($\mathbb{Z}$)
    - භාග
      - සමාවර්ත දශම
      - අන්ත දශම
  - අපරිමේය සංඛ්‍යා ($\mathbb{Q}'$)
    - අනන්ත දශම

තව ද කුලක අංකනයෙන් $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

1.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් පරිමේය සංඛ්‍යාව දශම සංඛ්‍යා ලෙස ලියන්න. ඒ එක එකක් අන්ත දශම ද සමාවර්ත දශම ද යන්න දක්වන්න.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{5}{5}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{5}{9}$

(v) $\frac{5}{11}$ (vi) $\frac{7}{8}$ (vii) $\frac{5}{6}$ (viii) $\frac{3}{5}$

(2) පහත දැක්වෙන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා අතරින් අපරිමේය සංඛ්‍යා හා පරිමේය සංඛ්‍යා තෝරන්න.

(i) $\sqrt{16}$ (ii) $\sqrt{9}$ (iii) $\sqrt{7}$ (iv) 3.1010010001...

(v) 5.136587321... (vi) $\sqrt{17}$ (vii) $\sqrt{36}$ (viii) 2.12345678

(ix) 0.375 (x) $\sqrt{12}$

1.2 කරණී

ඔබ කලින් ඉගෙනගෙන තිබූ අපරිමේය සංඛ්‍යා වන $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{23}$ ආදී සංඛ්‍යාවල අගය හරියට ම නිශ්චය කළ නොහැකිය. ඒවා කරණී නමින් හැඳින්වේ. එහෙත් $\sqrt{25}$ අගය 5 ලෙස හරියටම නිශ්චය කළ හැකිය. $\sqrt{16}$ අගය 4 ලෙස හරියට ම නිශ්චය කළ හැකි ය. එබැවින් $\sqrt{25}, \sqrt{16}$ ආදිය කරණීය නොවේ. $\sqrt{32}, \sqrt{405}$ වැනි කරණී, අබිල කරණී වේ.

නිදසුන 1.

$\sqrt{32}$ අබිල කරණිය, කරණියක් ලෙස දක්වන්න.

$\sqrt{32}$ සාධකවලට වෙන් කරන්න. (එක් සාධකයක් ප්‍රථමක ද අනෙක හරියට ම වර්ග මූලය ලැබෙන සංඛ්‍යාවක් ද වන සේ සාධකවලට වෙන් කරන්න.)

ක්‍රමය 1

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$$

$$= \sqrt{16} \times \sqrt{2}$$

$\sqrt{16} = 4$ නිසා

$= 4\sqrt{2}$ කරණියකි.

ක්‍රමය 2

$$\begin{array}{r|l} 2 & 32 \\ 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array}$$

$$32 = 2\times2\times2\times2\times2$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times2}$$

$$= \sqrt{2^2\times 2^2\times 2}$$

$$= 2 \times 2 \times \sqrt{2}$$

$$= \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$

නිදසුන 2.

$\sqrt{405}$ අබිල කරණිය, කරණියක් ලෙස දක්වන්න.

$$\sqrt{405} = \sqrt{81 \times 5}$$

$$= \sqrt{81} \times \sqrt{5}$$

$$= \underline{\underline{9\sqrt{5}}}$$

$\sqrt{405}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{40}$ එවැනි අබිල කරණි කීපයකි. එසේ ම කරණියක් අබිල කරණි බවට පත් කළ හැකි අවස්ථා ද තිබේ.

නිදසුන 3.

$3\sqrt{5}$ කරණිය, අබිල කරණියක් ලෙස දක්වන්න.

$$3\sqrt{5} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2}$$

$$\sqrt{(3\sqrt{5})^2} = \sqrt{9\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{9\times5} \quad \left(\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5 \text{ බැවින්}\right)$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{45}}}$$ මෙය අබිල කරණියකි.

නිදසුන 4.

$2\sqrt{7}$ කරණිය, අබිල කරණියක් ලෙස දක්වන්න.

$$\sqrt{(2\sqrt{7})^2} = \sqrt{2^2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \sqrt{4 \times 7} = \underline{\underline{\sqrt{28}}}$$

1.2 කරණි එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

නිදසුන 5.

$\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ සුළු කරන්න.

ඔබ පෙර ශ්‍රේණිවල දී $2x+3y+5x-y$ ආකාරයේ වීජීය පද සුළු කිරීම් කළ ආකාරය මතකයට නගන්න. ඒ අනුව කරණි ඇතුළත් ප්‍රකාශන සුළු කරමු.

$4\sqrt{2}$ නිරූපණය කරනුයේ $\sqrt{2}$ ඒවා හතරකි.

එබැවින් $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ වේ.

$6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ වේ.

ඒ අනුව $\sqrt{2}+6\sqrt{5} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ වේ.

සමහර කරණි එකතු කිරීම් හෝ අඩු කිරීම් කරන විට අබිල කරණි ද ඒවා අතර තිබිය හැකි ය. එවිට ඒවා කරණි බවට පත් කර පසු ව ගණිත කර්ම කළ යුතු ය.

නිදසුන 6.

$4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$ සුළු කරන්න.

$$\begin{aligned} 4\sqrt{63} &= 4 \times \sqrt{9 \times 7} \\ &= 4 \times 3\sqrt{7} \\ &= 12\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8\sqrt{28} &= 8\sqrt{4 \times 7} \\ &= 8 \times 2\sqrt{7} \\ &= 16\sqrt{7} \end{aligned}$$

එබැවින් $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28} = 12\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 16\sqrt{7}$

$= \underline{\underline{-9\sqrt{7}}}$ වේ.

1.3 කරණී ගුණ කිරීම හා බෙදීම

නිදසුන් 7. $4\sqrt{3}\times5\sqrt{2}$ සුළු කරන්න.

පරිමේය සංඛ්‍යා සහ අපරිමේය සංඛ්‍යා වෙන වෙන ම ගුණ කරමු.

$4\times5\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=20\sqrt{6}$ (මෙහි $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times2}=\sqrt{6}$)

නිදසුන 8. $2\sqrt{28}\div3\sqrt{7}$ සුළු කරන්න.

$2\sqrt{28}$ අබිල කරණියකි. එය $2\sqrt{4\times7}=2\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$ ලෙස ලියමු.

$$\therefore\ \frac{2\sqrt{28}}{3\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

නිදසුන 9. $5\sqrt{12}\div4\sqrt{2}$ සුළු කරන්න.

$5\sqrt{12}$ අබිල කරණියකි. එය $5\sqrt{12}=5\sqrt{4\times3}=5\times2\sqrt{3}=\underline{\underline{10\sqrt{3}}}$

$$\frac{5\sqrt{12}}{4\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}}$$

1.2 අභ්‍යාසය

(1) මෙම අබිල කරණී, කරණී ලෙස ලියන්න.

(i) $\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{48}$ (iii) $\sqrt{72}$ (iv) $\sqrt{28}$ (v) $\sqrt{80}$

(vi) $\sqrt{45}$ (vii) $\sqrt{98}$ (viii) $\sqrt{147}$

(2) මෙම කරණී, අබිල කරණී බවට පත් කරන්න.

(i) $2\sqrt{3}$ (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) $4\sqrt{7}$ (iv) $5\sqrt{2}$ (v) $6\sqrt{11}$

(3) සුළු කරන්න.

(i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

(ii) $\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{5}-3\sqrt{7}$

(iii) $4\sqrt{3}+5\sqrt{2}+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

(iv) $6\sqrt{11}+3\sqrt{7}-2\sqrt{11}-5\sqrt{7}+4\sqrt{7}$

(v) $8\sqrt{3}+7\sqrt{7}-2\sqrt{3}+3\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

(4) සුළු කරන්න.

(i) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{11}\times 3\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt{5}\times 3\sqrt{3}$

(iv) $4\sqrt{7}\div 2\sqrt{14}$ (v) $6\sqrt{27}\div 3\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{48}\div 5\sqrt{3}$

(5) සුළු කරන්න.

(i) $2\sqrt{27}-3\sqrt{3}+4\sqrt{7}+3\sqrt{28}$ (ii) $3\sqrt{63}-2\sqrt{7}-3\sqrt{27}+3\sqrt{3}$

(iii) $2\sqrt{128}+3\sqrt{50}-2\sqrt{162}+4\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{99}-2\sqrt{44}+6\sqrt{11}$

නිදසුන 10. $\sqrt{2}=1.414$ නම් (i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ හි අගය සොයන්න.

(i) $\sqrt{2}=1.414$ නම් $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.414}{2}=0.707$ ලෙස පහසුවෙන් සුළු කර දැක්විය හැකි ය.

$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{1.414}$ ඉහත ආකාරයට පහසුවෙන් සුළු කළ නොහැකි වේ.

(ii) $\frac{2}{1.414}=\frac{2000}{1414}=1414\overline{)2000}=1.414$ ලැබේ.

ඉහත (ii) එනම් $\frac{2}{\sqrt{2}}$ සුළු කිරීමට අපහසු වූයේ එහි හරය අපරිමේය වීම නිසා ය. භාගයක හරය අපරිමේය නම් එය සුළු කිරීම අපහසු ය. භාගයක හරය, අපරිමේය වූ විට එය පරිමේය හරයක් කරන්නේ කෙසේ දැයි සොයා බලමු.

අපි දර්ශක පාඩමේ දී $\sqrt{x}\times\sqrt{x}$ වැනි ප්‍රකාශන සලකා බැලුවෙමු.

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ වන නිසා $x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}=x^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=x$ වේ. එම නිසා $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=x$ වේ.

එබැවින් $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=x$ ද, $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ ද, $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ ද ලෙස මූල ලකුණ ඉවත් කර දැක්විය හැකි ය. මෙම සම්බන්ධය $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ හි හරය පරිමේය සංඛ්‍යාවක් කිරීමට යොදා ගනිමු. ඒ සඳහා භාගයේ හරයත්, ලවයත් අපරිමේය හරය වන $\sqrt{2}$ න් ගුණ කරමු.

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$ ලැබේ. $\sqrt{2}=1.414$ වේ.

$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{2}}=1.414$ වේ. මීට පෙර $\dfrac{2000}{1414}$ බෙදූ විට ද 1.414 ලැබුණි. එබැවින් පිළිතුරු දෙක සමාන වේ. පළමු පිළිතුර ලබාගත් ක්‍රමයට වඩා හරය පරිමේය සංඛ්‍යාවක් කර පිළිතුරු ලබාගත් ක්‍රමය පහසු ය.

> අපරිමේය හරයක් ඇති භාගයක හරය, පරිමේය කිරීමට එම අපරිමේය හරයෙන් ලවයත්, හරයත් දෙක ම ගුණ කළ යුතු ය.

නිදසුන 11. $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ හි හරය, පරිමේය කරන්න.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}} = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{b}}{b}}}$$

නිදසුන 12. $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ හි හරය පරිමේය කරන්න.

$$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{15}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{15}}}$$

1.3 අභ්‍යාසය

(1) මෙම අපරිමේය හර සහිත භාග එක එකෙහි හරය පරිමේය කරන්න.

(i) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (iii) $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (iv) $\dfrac{4\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$ (v) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

(vi) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ (vii) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ (viii) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ (ix) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ (x) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{2} = 1.414$ ද, $\sqrt{3} = 1.732$ ද, හා $\sqrt{5} = 2.236$ ද නම් පහත දැක්වෙන එක් එක් භාගයේ අගය සොයන්න.

(i) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (iv) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ (v) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

අන්තර්ජාලයෙනි.

- ඊජිප්තු ජාතිකයන් π සඳහා $\dfrac{256}{81}$ භාවිත කර ඇත.
- ආකිමිඩීස් නම් වූ ගණිතඥයා π සඳහා ආසන්න පරිමේය අගයයක් ලෙස $\dfrac{22}{7}$ ද $\dfrac{223}{71}$ ද ගැළපෙන බව පෙන්වා දී ඇත.
- ක්‍රි.ව. 430 – 501 දී චීන ජාතික ෂුචුන්ග් ෂින් නම් ගණිතඥයා විසින් π හි අගය ආසන්න ලෙස $\dfrac{355}{113}$ ට යොදා ගත හැකි බව පෙන්වා දී ඇත.
- ක්‍රි.පූ. 1000 ට පෙර බැබිලෝනියන්වරු ද π සඳහා $3\dfrac{1}{8}$ භාවිත කර ඇත.
- ක්‍රි.ව. 1914 දී ඉන්දියානු ජාතික රාමානුජන් නම් ගණිතඥයා විසින් π සඳහා $\sqrt{\sqrt{\dfrac{2143}{22}}}$ ද, එය $\left(\dfrac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$ ට සමාන බව ද පෙන්වා දී ඇත.

02 දර්ශක හා ලඝුගණක I

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- පරිමේය දර්ශක සහිත බල සුළු කිරීම.
- ලඝුගණක නීති (බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන)
- බල හා මූල ආශ්‍රිත ප්‍රකාශන
- බල හා මූල ඇතුළත් සමීකරණ විසඳීම
  (ලඝුගණක වගු භාවිත නො කර)

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබාගත හැකි වනු ඇත.

දර්ශක සහිත බල ගුණකිරීම හා බෙදීම පිළිබඳ මීට පෙර උගත් කරුණු මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයට පිළිතුරු සපයන්න.

2.1 අභ්‍යාසය

සුළු කරන්න

(1) $x^3 \times x^2 \times x$

(2) $x^4 \times x^2$

(3) $(x^4)^2$

(4) $a^0 \times a \times a^2$

(5) $(ab)^2 \times a^2 \times b^2$

(6) $\dfrac{(3a^2)^3 \times (a^2)^3}{a^5}$

(7) $(p^3q^3)^2 \times p^2 \times q^3$

(8) $(3a^2)^3 \div a^5$

(9) $\dfrac{p^6}{(p^2)^2}$

(10) $\dfrac{2x^2 \times 3x^3}{3x^2 \times 2x^3}$

(11) $\dfrac{x^3 \times x^2}{x^8}$

(12) $\dfrac{2a^0 \times 3a^5}{(2a^3)^2}$

a^0, $(a^0)^1$, $(a^1)^0$ යන ප්‍රකාශ තුනෙහි ම අගය සමාන බව නිමල් පවසයි. ඊට එකඟ වන්නෙහි ද? නැද් ද? යන්න හේතු සහිත ව පැහැදිලි කරන්න.

2.1 භාගමය දර්ශක

$$a^8 = a^4 \times a^4 = a^5 \times a^3 = a^6 \times a^2$$
$$a^6 = a^3 \times a^3 = a^4 \times a^2 = a^5 \times a^1$$
$$a^4 = a^2 \times a^2 = a^3 \times a^1$$
$$a^2 = a^1 \times a^1$$

ඉහත බල සාධක දෙකකට වෙන් කර ඇති ආකාරය සලකා බලන්න. එහි වම් පස බලයේ ඇති දර්ශකය සමාන සංඛ්‍යා දෙකකට වෙන් වන සේ දකුණු පස බල දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලියා ඇත.

දර්ශක සඳහා මීට පෙර උගත් සියලු ම නීති, භාගමය දර්ශක සඳහා ද සත්‍ය වේ. එනම්,

m හා n පරිමේය සංඛ්‍යා විට $a^m \times a^n = a^{m+n}$ වේ.

m හා n පරිමේය සංඛ්‍යා විට $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ වේ.

ඉහත පලමු රටාව අනුව පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශනයේ හිස් කොටු තුළ ලිවිය යුතු සංඛ්‍යා මොනවා ද ?

$$a^1 = a^{\square} \times a^{\square}$$

එම කොටු තුළ සමාන භාග ලිවිය හැකි ය. ඉහත පලමු නීතිය අනුව එම භාග දෙකෙහි එකතුව 1 විය යුතු ය.

එවිට $a^1 = a^{\boxed{\frac{1}{2}}} \times a^{\boxed{\frac{1}{2}}}$

$a = a^{\boxed{\frac{1}{2}}} \times a^{\boxed{\frac{1}{2}}}$ වෙයි.

එසේ ම මෙය, $a^1 = a^{\boxed{\frac{2}{3}}} \times a^{\boxed{\frac{1}{3}}}$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

$$x = x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{7}} \times x^{\frac{4}{7}} \times x^{\frac{2}{7}}$$

2.1 ක්‍රියාකාරකම

ඉහත ආකාරයටම හිස් කොටු තුළ අදාළ භාග හෝ සංඛ්‍යා ලියන්න.

(a) $\mathbf{5 = 5^{\square} \times 5^{\square} = 5^{\square} \times 5^{\square} \times 5^{\square}}$

(b) $\mathbf{2 = 2^{\square} \times 2^{\square} = 2^{\square} \times 2^{\square} \times 2^{\square}}$

(c) $p = p^{\square} \times p^{\square} = p^{\square} \times p^{\square} \times p^{\square}$

(d) $q = q^{\square} \times q^{\square} = q^{\square} \times q^{\square} \times q^{\square}$

2.2 සෘණ දර්ශක ධන දර්ශක බවට පත් කිරීම

$\dfrac{a^2}{a^5}$ සුළු කරන්න.

මෙය $\dfrac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a}$ ආකාරයට විහිදුවා ලිවිය හැකි ය.

එවිට $\dfrac{\cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3}$ පිළිතුර ලෙස ලැබේ.

මෙය $\dfrac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$ ලෙස දර්ශක නීතිය අනුව සුළු කළ හැකි ය.

එබැවින් $\dfrac{a^2}{a^5} = a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ වේ.

ඒ අනුව a^{-3} යන්න $\dfrac{1}{a^3}$ ලෙස ධන දර්ශකයක් සහිත ව ලිවිය හැකි ය.

යම් බලයක පරස්පරය ගත් විට දර්ශකයේ ලකුණ මාරු වේ.
ඒ අනුව

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \quad \text{හා} \quad \boxed{\frac{1}{a^{-m}} = a^m}$$

නිදසුන 1.

$\sqrt{25^3}$ අගය සොයන්න.

$$\sqrt{25^3} = (25^3)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = (5^{2\times\frac{1}{2}})^3 = 5^3 = \underline{\underline{125}}$$

නිදසුන 2.

$(25)^{0.5}$ අගය සොයන්න.

$$(25)^{0.5} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = \underline{\underline{5}}$$

නිදසුන 3. සුළු කරන්න.

(i) $8^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(16p^4)^{\frac{1}{4}}$ (iii) $(0.027)^{\frac{1}{3}}$

(i) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = \underline{\underline{2}}$

(ii) $(16p^4)^{\frac{1}{4}} = (2^4p^4)^{\frac{1}{4}} = \{(2p)^4\}^{\frac{1}{4}} = (2p)^{4\times\frac{1}{4}} = \underline{\underline{2p}}$

(iii) $(0.027)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{27}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{(27)^{\frac{1}{3}}}{(1000)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(3^3)^{\frac{1}{3}}}{(10^3)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3^{3\times\frac{1}{3}}}{10^{3\times\frac{1}{3}}} = \dfrac{3}{10} = \underline{\underline{0.3}}$

නිදසුන 4. $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a^3}$ සුළු කරන්න.

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a^3} = (a^2)^{\frac{1}{3}} \times (a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = \underline{\underline{a^{\frac{13}{6}}}}$$

නිදසුන 5. $\sqrt[3]{x^{-2}}$ ධන දර්ශක සහිත ව දක්වන්න

$$\sqrt[3]{x^{-2}} = (x^{-2})^{\frac{1}{3}} = x^{-2\times\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\underline{\underline{x^{\frac{2}{3}}}}}$$

නිදසුන 6. $81^{-1\frac{1}{4}}$ හි අගය සොයන්න.

$$\boxed{81 = 3^4}$$

$$81^{-1\frac{1}{4}} = 81^{-\frac{5}{4}}$$

$$= \dfrac{1}{81^{\frac{5}{4}}}$$

$$= \dfrac{1}{(3^4)^{\frac{5}{4}}}$$

$$= \dfrac{1}{3^{4\times\frac{5}{4}}}$$

$$= \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{\underline{\underline{243}}}$$

2.2 අභ්‍යාසය

(1) අගය සොයන්න.

(i) $(36)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(64)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $(196)^{\frac{1}{2}}$ (iv) $(4p^2q^2)^{\frac{1}{2}}$

(v) $(0.125)^{\frac{1}{3}}$ (vi) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ (vii) $(256x^4)^{\frac{1}{2}}$

(viii) $12^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(a^2)^3 \times \sqrt{a^4}$ (x) $(ab^2)^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}}$

(2) සුළු කරන්න.

(i) $(64)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $(729)^{\frac{2}{3}}$ (iii) $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$

(iv) $(0.01)^{\frac{1}{2}}$ (v) $(256)^{0.25}$ (vi) $(1000)^{-\frac{1}{3}}$

(vii) $(16)^{-\frac{3}{4}}$ (viii) $(243)^{\frac{-3}{5}}$ (ix) $(0.0001)^{-1\frac{1}{4}}$

(3) $x = 8$ ද $y = 16$ ද නම් පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(i) $x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}$ (ii) $2x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}$ (iii) $\left(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}\right)^0$

(iv) $\left(x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}\right)^0$ (v) $\left(\frac{y}{x}\right)^2$

(4) සුළු කර පිළිතුර ධන දර්ශක ලෙස ලියා දක්වන්න.

(i) $10x^{-1}y^3 \times xy$ (ii) $(2a)^{-2} \times 8\,a^{4}$

(iii) $(2x)^2 \times \left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}}$ (iv) $\frac{(2a^{-2})^3 \times (3a^{-4})^2}{12a^{-3} \times 2a^{-2}}$ (v) $\{(3x^{-1})^{-2}\}^{-1}$

(5) සුළු කරන්න.

(i) $\frac{9a^{\frac{4}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{1\frac{1}{2}} \times 3a^{\frac{1}{3}}}$ (ii) $x^{\frac{2}{3}}\left\{\left(x^{\frac{2}{3}} \div x^{\frac{1}{3}}\right) \div x\right\}$ (iii) $\frac{\sqrt{x^3} \times \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2} \times \sqrt[4]{x^6}}}$

2.3 දර්ශක සහිත සමීකරණ විසඳීම

නිදසුන 7.

විසඳන්න $3^x = 81$

$$3^x = 81$$

3 හි බලයක් ලෙස 81 ප්‍රකාශ කළ විට

$$3^x = 3^4$$

මෙම සමීකරණයෙහි දෙපස ඇති බලවල පාද සමාන බැවින් දර්ශක ද සමාන විය යුතු ය.

$$\therefore \; x = \underline{\underline{4}}$$

නිදසුන 8.

විසඳන්න. $16^{(x+1)} = 32$

$$16^{(x+1)} = 32$$

16 , සහ 32 , 2 හි බල ලෙස ලිවීමෙන්

$$(2^4)^{(x+1)} = 2^5$$

$$2^{4x+4} = 2^5$$

දෙපස ඇති සංඛ්‍යාවල පාද සමාන බැවින් දර්ශක සමාන කිරීමෙන්

$$4x + 4 = 5$$

$$4x + 4 - 4 = 5 - 4$$

$$4x = 1$$

$$x = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

2.3 අභ්‍යාසය

x හි අගය සොයන්න.

(1) $5^x = 125$

(2) $27 = 3^{(-x)}$

(3) $7^{(x-1)} = 49$

(4) $4^x = \frac{1}{4}$

(5) $8^{(x+1)} \times 2^{(x-1)} = 32$

(6) $(4^2)^x \times 8^x = 128$

(7) $8^{(2x-1)} = \frac{1}{64}$

2.4 ලඝුගණක නීති

$$\text{(i)} \quad log_a mn = log_a m + log_a n$$

$$\text{(ii)} \quad log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n$$

යන ලඝුගණක නිතී පිළිබඳ ඔබ මීට පෙර උගෙන ඇත.

බල සහ මූල සඳහා මෙම නීති යොදා ගන්නේ කෙසේ දැයි බලමු.

$log_a 2^3$ ප්‍රකාශනය ගත් කළ එය

$log_a 2^3 = log_a (2\times2\times2)$ආකාරයට විහිදුවා ලිවිය හැකි ය.

එබැවින් $log_a 2^3 = log_a 2 + log_a 2 + log_a 2$ වේ.

(ලඝුගණක නීති අනුව)

$log_a 2^3 = 3 log_a 2$ වේ.

මේ ආකාරයට ම $log_a x^2$,

$log_a x^2 = log_a (x \times x)$ ලෙස විහිදුවා ලිවිය හැකි ය.

$log_a x^2 = log_a x + log_a x$ වේ.

$log_a x^2 = 2 log_a x$ වේ.

මෙලෙස ම $log_a (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a x$ වේ.

$\boxed{log_a m^r = r\, log_a m \text{ වේ.}}$ r - පරිමේය සංඛ්‍යාවකි.

නිදසුන 9.

$log_7 343$ හි අගය සොයන්න.

$7^3 = 343$ බැවින්

$$\begin{aligned} log_7 343 &= log_7 7^3 \\ &= 3 log_7 7 \quad (log_7 7 = 1) \\ &= \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

නිදසුන 10.

lg 0.001 හි අගය සොයන්න.

$log_{10}a$ යන්න $lg\, a$ ලෙස ලියා දක්වනු ලැබේ.

$$0.001 = \frac{1}{1000}$$

$$= \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

දෙපසෙහි ම ලඝුගණක සැලකීමෙන්

$$lg\ 0.001 = lg\, 10^{-3} = -3\ lg\, 10 = -3 \qquad (log_{10}\ 10 = 1)$$

නිදසුන 11.

$lg(100)^{\frac{1}{2}}$ අගය සොයන්න.

$100^{\frac{1}{2}} = (10^2)^{\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \frac{1}{2}}$ බැවින්

$$lg\ 100^{\frac{1}{2}} = lg 10$$

$$lg 100^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

lg යනුවෙන් සඳහන් වන්නේ 10 පාදයට ගත් ලඝුගණකය බැව් ඔබ මීට පෙර උගත්තෙහි ය.

2.4 අභ්‍යාසය

අගය සොයන්න.

(1) $log_3 27$

(2) $log_2 256$

(3) $log_4 256$

(4) $log_2 8^3$

(5) $lg 100^5$

(6) $lg 1000^{\frac{1}{2}}$

(7) $log_2 64^{\frac{1}{2}}$

(8) $log_3 81^{\frac{1}{4}}$

☞ x සහ y පූර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් දක්වන අතර, $log_3 x = log_2 y$ වේ. $x < 50$. x හි සහ y හි අගය විය හැකි සියලු අගය සොයන්න. ඔබට ලැබුණු අගය ඔබේ මිතුරකුට ලැබුණු අගය හා සසඳන්න.

2.5 ලඝු ආශ්‍රිත ප්‍රකාශනයක අගය සෙවීම

නිදසුන 12.

$log_a 5 + 2log_a 3$ සුළු කරන්න.

$= log_a 5 + log_a 3^2$

$= log_a (5 \times 3^2)$

$= \underline{\underline{log_a 45}}$

නිදසුන 13.

$log_a 6 - log_a 3$ සුළු කරන්න.

$= log_a 6 - log_a 3$

$= log_a \frac{6}{3}$

$= \underline{\underline{log_a 2}}$

නිදසුන 14.

$2lg 5 + lg\, 4$ අගය සොයන්න.

$2lg 5 + lg\, 4$

$= lg\, 5^2 + lg 4$

$= lg\, (5^2 \times 4)$

$= lg\ 100$

$= lg\ 10^2$

$= \underline{\underline{2}}$

නිදසුන 15.

$\frac{1}{2} lg\ 25 + \frac{1}{2} lg\ 400$ අගය සොයන්න

$\frac{1}{2} lg\ 25 + \frac{1}{2} lg\ 400$

$lg (25)^{\frac{1}{2}} + lg \left(400\right)^{\frac{1}{2}}$

$= lg \left(25^{\frac{1}{2}} \times 400^{\frac{1}{2}}\right)$

$= lg\ (5 \times 20)$

$= lg\ 100$

$= lg\ 10^2$

$= \underline{\underline{2}}$

2.5 අභ්‍යාසය

ලඝුගණක භාවිත නොකොට පහත එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(1) $lg\,5 + lg\,2$

(2) $lg\,5 + lg\,20$

(3) $lg\,2000 - lg\,200$

(4) $lg\,16 - lg\,4 + 2\,lg\,5$

(5) $log_2 16 + 2\,log_2 8$

(6) $\frac{1}{2}log_3 81 + log_3 9$

(7) $2log_2 8 - \frac{1}{2}log_2 16$

(8) $lg\,50 + 3\,lg\,2 - 2\,lg\,2$

(9) $\frac{1}{2}lg10000 - 3lg10$

(10) $2lg10 + \frac{1}{3}lg1000 - 3$

(11) $\frac{1}{2}(lg100 + lg64 - lg16 + 2lg5)$

(12) $2\,(lg20 - lg2) + 1$

2.6 ලඝු ආශ්‍රිත සමීකරණ විසඳීම

නිදසුන 16.

$log_a 5 + log_a 2 = log_a x$ විසඳන්න.

$log_a 5 + log_a 2 = log_a x$

$log_a (5 \times 2) = log_a x$

$10 = x$

$x = \underline{\underline{10}}$

නිදසුන 17.

$log_a 4 - log_a 8 = log_a x$ විසඳන්න.

$log_a 4 - log_a 8 = log_a x$

$log_a \frac{4}{8} = log_a x$

$\frac{1}{2} = x$

$x = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

නිදසුන 18.

$lg\,20 + lg\,5 = 2\,lg\,x$ විසඳන්න.

$lg\,20 + lg\,5 = 2\,lg\,x$

$lg\,(20 \times 5) = lg\,x^2$

$lg\,100 = lg\,x^2$

$100 = x^2$

$10 = x$

$x = \underline{\underline{10}}$

නිදසුන 19.

$$\frac{1}{2}log_a x \quad = log_a\ 12 - log_a 3$$ විසඳන්න.

$$\frac{1}{2}log_a x \quad = log_a\ 12 - log_a 3$$

$$log_a(x^{\frac{1}{2}}) \quad = log_a \left(\frac{12}{3}\right)$$

$$x^{\frac{1}{2}} \ = 4$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = \ 4^2$$

$$x \ = \ 4^2$$

$$x = \underline{\underline{16}}$$

නිදසුන 20.

$$2log_b 3 + 3log_b 2 - log_b 72 \ = \ \frac{1}{2}log_b x$$ විසඳන්න.

$$2log_b 3 + 3log_b 2 - log_b 72 \ = \ \frac{1}{2}log_b x$$

$$log_b 3^2 + log_b 2^3 - log_b 72 \ = \ log_b x^{\frac{1}{2}}$$

$$log_b\left(\frac{3^2 \times 2^3}{72}\right) = log_b(x^{\frac{1}{2}})$$

$$\frac{9 \times 8}{72} \ = x^{\frac{1}{2}}$$

$$1^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2$$

$$1 \ = x^1$$

$$x \ = \underline{\underline{1}}$$

2.6 අභ්‍යාසය

විසඳන්න.

(1) $log_5\ 125 = x$

(2) $2\,log_a x \ = log_a\ 49$

(3) $log_a 25 + 2log_a x = 2log_a 50$

(4) $2log_a 4 - log_a 8 + log_a 50 = 2log_a x$

(5) $2lg\,x \ = 4\ lg\ 3$

(6) $log_a x = \frac{1}{2}log_a 144$

(7) $\frac{2}{3}log_a 8 \ = \frac{1}{2}log_a x$

(8) $log_a x = log_a(2x - 3)$

03 දර්ශක හා ලඝුගණක II

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- බින්දුවත් එකත් අතර සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක සෙවීම
- බින්දුවත් එකත් අතර සංඛ්‍යා ඇතුළත් ප්‍රකාශන සුළු කිරීම (බල හා මූල ඇතුළත්)
- ලඝුගණක භාවිතයෙන් ගුණ කිරීම සහ බෙදීම
- ගණක යන්ත්‍රය මගින් සුළු කිරීමක ප්‍රතිඵල සනාථ කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි වනු ඇත.

ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් සංඛ්‍යා ගුණකිරීම හා බෙදීම පිළිබඳ මෙතෙක් ඔබ උගත් කරුණු මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයෙහි යෙදෙන්න.

3.1 අභ්‍යාසය

ලඝුගණක වගු භාවිත කොට සුළු කරන්න. ඔබේ පිළිතුර නිවැරදි දැයි ගණකය භාවිතයෙන් පිරික්සන්න.

(1) 1.987×29.75 (2) 99.78×248.89

(3) $49.5 \div 24.8$ (4) $750.2 \div 14.896$

(5) $2.75 \times 3.124 \times 19.875$

(6) $\dfrac{64.85 \times 9.98}{12.78}$ (7) $\dfrac{899.3}{45.01 \times 19.75}$

(8) $\dfrac{1.75 \times 2.68 \times 3.14}{3.002 \times 1.0275}$ හි අගය නිමානය කරන්න. ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් සුළු කර ලැබෙන පිළිතුර හා ඔබේ නිමානිත පිළිතුර සමග සසඳන්න.

(9) ඍජුකෝණාස්‍රාකාර එළවළු පාත්තියක දිග 17.75 m වේ. එහි පළල 8.92 m වේ. එහි වර්ගඵලය ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ගණනය කරන්න. ඔබේ පිළිතුර ආසන්න පූර්ණ සංඛ්‍යාවට වටයන්න.

(10) $\dfrac{22}{7}$ ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් සුළු කොට පිළිතුර ආසන්න තුන්වැනි දශමස්ථානයට වටයන්න.

3.1 0 ත් 1 ත් අතර සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක

පහත වගුව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

සංඛ්‍යාව	විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් ලියූ විට	ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය
5682	5.682×10^{3}	3
568.2	5.682×10^{2}	2
56.82	5.682×10^{1}	1
5.682	5.682×10^{0}	0
0.5682	5.682×10^{-1}	-1
0.05682	5.682×10^{-2}	...
0.005682	5.682×10^{-3}	...

ඉහත වගුවේ ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය තීරයේ රටාව අනුව හිස්තැන්වලට ලැබිය යුතු සංඛ්‍යා නිගමනය කරන්න.

මෙහි හිස්තැන්වලට ලිවිය යුතු සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් -2 හා -3 වේ. මෙම රටාව තවත් පේළි කිහිපයකින් දීර්ඝ කරමු.

සංඛ්‍යාව	විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් ලියූ විට	ලඝු ගණකයේ පූර්ණාංශය
0.5682	5.682×10^{-1}	-1
0.05682	5.682×10^{-2}	-2
0.005682	5.682×10^{-3}	-3
0.0005682	5.682×10^{-4}	-4
0.00005682	5.682×10^{-5}	-5

ඉහත වගුවේ වම්පස තීරයේ එකිනෙක සංඛ්‍යාවෙහි දශම තිතට දකුණු පසින් ඊට යාබද ඇති බින්දු සංඛ්‍යාව හා අනුරූප ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය අතර සම්බන්ධතාවය පරීක්ෂා කරන්න.

ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශයේ සංඛ්‍යාත්මක අගය එම බින්දු ගණනට වඩා එකකින් වැඩි බව පැහැදිලි ය.

0 හා 1 අතර ඇති සංඛ්‍යාවක ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය ඍණ වේ. එහි සංඛ්‍යාත්මක අගය දශම තිතට දකුණු පසින් ඊට යාබද ව ඇති බින්දු සංඛ්‍යාවට වඩා එකකින් වැඩි වේ.

දැන් අපි 0.004567 හි ලඝුගණකය සොයමු. මෙම සංඛ්‍යාවේ දශම තිතට දකුණු පසින් ඊට යාබද බින්දු දෙකක් පමණක් ඇති නිසා ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය -3 වේ. එහි ලඝුගණකයේ දශමාංශය ලඝුගණක වගුවේ දැක්වෙන්නේ 0.6598 ලෙස ය. එම නිසා 0.004567 හි ලඝුගණකයේ ලඝු පූර්ණාංශය -3 වන අතර, දශමාංශය +0.6598 වේ. එක ම සංඛ්‍යා වේ පූර්ණ කොටස ඍණ ද, දශම කොටස ධන ද වන නිසා මෙම කොටස් දෙක වෙන් කර හඳුනාගැනීමට එය $\bar{3}.6598$ ලෙස ලියමු. මෙය **වියුති තුනයි දශම හයයි පහයි නවයයි** අට ලෙස කියවමු.

$$\therefore lg\ 0.004567 = \bar{3}.6598$$

නිදසුන 1.

0.04021 හි ලඝුගණක සොයන්න.

ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය $\bar{2}$

ලඝුගණකයේ දශම කොටස (වගුවේ 4021 ට අනුරූප අගය) $= 0.6043$

$$\therefore lg\ 0.04021 = \underline{\underline{\bar{2}.6043}}$$

3.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය ලියන්න.

(i) 0.053 (ii) 0.1023 (iii) 0.00030 (iv) 0.0706
(v) 0.209 (vi) 0.5 (vii) 0.001111 (viii) 0.06004

(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකය සොයන්න.

(i) 0.2543 (ii) 0.7856 (iii) 0.9986 (iv) 0.1023
(v) 0.04586 (vi) 0.00856 (vii) 0.0025 (viii) 0.03409
(ix) 0.07 (x) 0.75 (xi) 0.000125 (xii) 0.2

(3) ශිෂ්‍යයෙක් 0.4567 හි ලඝුගණකය 1.6598 ලෙස ලියා දක්වයි. එහි වරද පැහැදිලි කරන්න.

3.2 0 ත් 1 ත් අතර සංඛ්‍යාවක ලඝුගණකය දී ඇති විට එම සංඛ්‍යාව සෙවීම (ප්‍රතිලඝුගණකය සෙවීම)

මෙහි දී දෙන ලද ලඝුගණකය කුමන සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකය දැයි සෙවිය යුතු ය. මෙම ක්‍රියාවලිය **ප්‍රතිලඝු සෙවීම** යනුවෙන් හැඳින්වේ.
මේ සඳහා නිදසුනක් විමසා බලමු.

නිදසුන 2.

$\bar{2}.4053$ ලඝුගණකය වන සංඛ්‍යාව සොයමු.

මෙහි ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය $\bar{2}$ නිසා අදාළ සංඛ්‍යාවේ දශම තිතට දකුණත් පසින් ඊට යාබදව බිංදු එකක් තිබිය යුතු ය. ලඝුගණකයේ දශම කොටස වන .4053 වගුවේ ඇත්තේ 2543 ට අනුරූප අගය ලෙසිනි.

එබැවින් $\bar{2}.4053$ ලඝුගණකය ලෙස ඇති සංඛ්‍යාව 0.02543 වේ.

ප්‍රතිලඝු $\bar{2}.4053 = 0.02543$ ලෙස හෝ

$anti\,log\ \bar{2}.4053 = \underline{\underline{0.02543}}$ ලෙස හෝ ලියනු ලැබේ.

නිදසුන 3.

$\bar{3}.7815$ හි ප්‍රතිලඝු ගණකය සොයන්න.

ලඝුගණකයේ $\bar{3}$ ක් ඇති නිසා අදල සංඛ්‍යාවේ දශම තිතට දකුණු පසින් ඊට යාබද ව බින්දු දෙකක් තිබිය යුතු ය.
ලඝු ගණකයේ දශම කොටස එනම් .7815 ට අදළව වගුවේ අගය 6047 වේ.

$\therefore anti\,log\ \bar{3}.7815 = \underline{\underline{0.006047}}$

3.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් ලඝුගණකයට අනුරූප සංඛ්‍යාවේ දශම තිතට දකුණු පසින් ඊට යාබද ව ඇති බින්දු සංඛ්‍යාව ලියන්න.

(i) $\bar{2}.1435$ (ii) $\bar{3}.6153$ (iii) $\bar{1}.5457$ (iv) $\bar{5}.9763$
(v) $\bar{4}.4871$

(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් ලඝුගණකයේ ප්‍රතිලඝුගණකය සොයන්න.

(i) $\bar{1}.9036$ (ii) $\bar{1}.8772$ (iii) $\bar{2}.7745$ (iv) $\bar{3}.0715$
(v) $\bar{2}.6532$ (vi) $\bar{3}.7086$ (vii) $\bar{3}.9320$ (viii) $\bar{1}.9320$
(ix) $\bar{4}.9320$ (x) $\bar{3}.0043$

3.3 ඍණ පූර්ණාංශය සහිත ලඝුගණක එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

ලඝුගණකයක පූර්ණාංශය ඍණ වන විට එම පූර්ණාංශය දක්වන සංඛ්‍යාව පමණක් ඍණ වේ. දශම කොටස ධන සංඛ්‍යාවකි

ඍණ පූර්ණාංශය සහිත ලඝුගණක එකතු කිරීම
නිදසුන් කිහිපයක් මගින් මෙය හඳුනා ගනිමු.

නිදසුන 4.

$\bar{2}.3263 + \bar{1}.4786$ සුළු කරන්න.

මෙම ලඝුගණක දෙකේ පූර්ණාංශ දෙක ම ඍණ වේ. ධන වූ දශම කොටස් සාමාන්‍ය සංඛ්‍යා එකතු කරන ආකාරයට එකතු කරන්න. ඍණ පූර්ණාංශ වෙන ම එකතු කරන්න.

$$\begin{array}{r} \bar{2}.3263 \\ +\ \bar{1}.4786 \\ \hline \bar{3}.8049 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\boxed{\bar{2} + \bar{1} = (-2) + (-1) = -3 = \bar{3}}$$

නිදසුන 5.

$\bar{1}.7251 + \bar{2}.8162$ සුළු කරන්න.

$$\begin{array}{r} \bar{1}.7251 \\ +\bar{2}.8162 \\ \hline \bar{2}.5413 \\ \hline\hline \end{array}$$

මෙහි දශම කොටස් එකතු කරන විට ලැබෙන +1 වම් පස තීරයට එකතු කළ යුතු ය. පූර්ණාංශ තීරයේ ඇති $\bar{1}$ හා $\bar{2}$ සමග මෙම +1 එකතු වී $\bar{2}$ ලැබේ.

$$\boxed{1 + \bar{1} + \bar{2} = 1 + (-1) + (-2) = -2 = \bar{2}}$$

නිදසුන 6.

$1.9571 + \bar{2}.7466$ සුළු කරන්න.

$$\begin{array}{r} 1.9571 \\ +\ \bar{2}.7466 \\ \hline 0.7037 \\ \hline\hline \end{array}$$

මෙහි දශම කොටස් එකතු කරන විට ලැබෙන +1 වම් පස තීරයට එකතු කළ යුතු ය. පූර්ණාංශ තීරයේ ඇති 1 හා $\bar{2}$ ට මෙම +1 එකතු වී 0 ලැබේ.

$$\boxed{1 + 1 + \bar{2} = 1 + 1 + (-2) = 0}$$

ඍණ පූර්ණාංශ සහිත ලඝුගණක අඩු කිරීම

නිදසුන 7.

සුළු කරන්න. $\bar{2}.9320 - \bar{1}.7752$

$$\begin{array}{r} \bar{2}.9320 \\ -\ \bar{1}.7752 \\ \hline \bar{1}.1568 \end{array}$$

දශම කොටස සාමාන්‍ය සංඛ්‍යා අඩු කරන ආකාරයට අඩු කර ඇත. $\bar{2}$ න් $\bar{1}$ ක් අඩු කිරීම යනු -2 න් -1 ක් අඩු කිරීම නිසා ප්‍රතිඵලය $\bar{1}$ වේ.

$\bar{2} - \bar{1}$
$= -2 - (-1) = -2 + 1 = -1 = \bar{1}$

නිදසුන 8.

සුළු කරන්න $\bar{1}.5441 - \bar{3}.9058$

$$\begin{array}{r} \bar{1}.5441 \\ -\ \bar{3}.9058 \\ \hline 1.6383 \end{array}$$

මෙහි දශම කොටස් සාමාන්‍ය අඩු කිරීමේ දී 5 න් 9 ක් අඩු කළ නොහැකි නිසා වමත් පසින් 1 ක් ගෙන ආ යුතු නමුත් එහි ඇත්තේ ඍණ 1 ක් නිසා එය කළ නොහැකි ය.

පළමුවන දශම ස්ථාන තීරයට 1 ක් ගෙන යා හැකි වන සේ $\bar{1}.5441$ වෙනුවට $\bar{2} + 1.5441$ ලෙස ලියා ගනිමු. $\bar{2}$ න් $\bar{3}$ ක් එනම් (-2 න් -3 ක්) අඩු කළ විට 1 ලැබේ.

නිදසුන 9.

$\bar{1}.3054 - 1.9614$ සුළු කරන්න.

$$\begin{array}{r} \bar{1}.3054 \\ -\ 1.9614 \\ \hline \bar{3}.3440 \end{array}$$

$\bar{1}.3054 - 1.9614$
$1 - 1 + \bar{1}.3054 - 1.9614$
$1 - 1 + (-1) + (0.3054) - 1.9614$
$(-1) + (-1) + 1.3054 - 1.9614$
$-2 + 1.3054 - 0.9614 - 1$
$-2 + 0.3440 - 1$
-3.3440

පළමු වන දශම ස්ථාන තීරයට 1ක් ගෙන යා හැකි වන සේ දකුණු පසට +1 හා පූර්ණාංශය කොටස -1ක් ගනිමු. එවිට පූර්ණාංශයේ අගය -2 වේ. ඒ අනුව අගය $\bar{2} + 1.5441$ ලෙස ලියා ගනිමු.

3.4 අභ්‍යාසය

(1) සුළු කරන්න.

(i) $\bar{1}.6042 + \bar{1}.1818$ (ii) $\bar{2}.6355 + \bar{1}.4166$ (iii) $\bar{1}.7340 + \bar{2}.6684$

(iv) $\bar{3}.9890 + \bar{1}.9509$ (v) $1.5911 + \bar{2}.6937$ (vi) $\bar{2}.7356 + 1.6767$

(vii) $\bar{2}.7443 + 1.8062 + \bar{1}.7404$

(2) සුළු කරන්න.

(i) $\bar{3}.7160 - \bar{1}.5729$ (ii) $\bar{2}.6180 - \bar{1}.5428$

(iii) $1.7202 - \bar{2}.9165$ (iv) $\bar{2}.3424 - 1.8156$

(v) $\bar{3}.3874 - \bar{2}.7396$ (vi) $\bar{1}.5922 - \bar{2}.8791$

3.4 0 ත් 1 ත් අතර සංඛ්‍යා ඇතුළත් ප්‍රකාශන ලඝුගණක භාවිතයෙන් සුළු කිරීම

ගුණ කිරීම

නිදසුන 10.

25.87×0.0518 සුළු කරන්න.

$x = 25.87 \times 0.0518$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $lg\ x = lg\ 25.87 + lg\ 0.0518$

$= 1.4128 + \bar{2}.7143 \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1.4128 \\ +\bar{2}.7143 \\ \hline 0.1271 \\ \hline\hline \end{array}$$

$lg\ x = 0.1271$

$x = antilog\ 0.1271$

$x = 1.340$

$\therefore 25.87 \times 0.0518 = \underline{\underline{1.340}}$

නිදසුන 11.

0.0075×0.125 සුළු කරන්න.

$x = 0.0075 \times 0.125$ ලෙස ගනිමු.

$lg\ x = lg\ 0.0075 + lg\ 0.125$

$= \bar{3}.8751 + \bar{1}.0969$

$$\begin{array}{r} \bar{3}.8751 \\ +\bar{1}.0969 \\ \hline \bar{4}.9720 \\ \hline\hline \end{array}$$

$lg\ x = \bar{4}.9720$

$x = antilog\ \bar{4}.9720$

$x = 0.0009376$

$0.0075 \times 0.125 = \underline{\underline{0.0009376}}$

නිදසුන 12.

ලඝුගණක භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

$$15.87 \times 0.01694 \times 0.00275$$

$x = 15.87 \times 0.01694 \times 0.00275$ ලෙස ගනිමු.

$$\begin{aligned}
lg\ x &= lg\ 15.87 + lg\ 0.01694 + lg\ 0.00275 \\
&= 1.2007 + \bar{2}.2290 + \bar{3}.4393 \\
lg\ x &= \bar{4}.8690 \\
x &= antilog\ \bar{4}.8690 \\
x &= 0.0007396 \\
15.87 \times 0.01694 \times 0.00275 &= \underline{\underline{0.0007396}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 1.2007 \\ +\bar{2}.2290 \\ \bar{3}.4393 \\ \hline \underline{\underline{\bar{4}.8690}} \end{array}}$$

සංඛ්‍යා බෙදීම

නිදසුන 13.

ලඝුගණක භාවිතයෙන් සුළු කරන්න. $15.78 \div 0.125$

$x = 15.78 \div 0.125$ යැයි ගනිමු

$$\begin{aligned}
lg\ x &= lg\ 15.78 - lg\ 0.125 \\
&= 1.1981 - \bar{1}.0969 \\
&= 2.1012 \\
x &= antilog\ \ 2.1012 \\
x &= 126.2 \\
\therefore\ 15.78 \div 0.125 &= \underline{\underline{126.2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 1.1981 \\ -\bar{1}.0969 \\ \hline \underline{\underline{2.1012}} \end{array}}$$

නිදසුන 14.

අගය සොයන්න. $0.5052 \div 12.84$

$$\begin{aligned}
x &= 0.5052 \div 12.84 \\
lg\ x &= lg\ 0.5052 - lg\ 12.84 \\
&= \bar{1}.7035 - 1.1086 \\
lg\ x &= \bar{2}.5949 \\
x &= antilog\ \bar{2}.5949 \\
x &= 0.03935 \\
\therefore\ 0.5052 \div 12.84 &= \underline{\underline{0.03935}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \bar{1}.7035 \\ -1.1086 \\ \hline \underline{\underline{\bar{2}.5949}} \end{array}}$$

නිදසුන 15.

අගය සොයන්න. $0.1942 \div 0.8554$

$$x = 0.1942 \div 0.8554 \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

$$lg\ x = lg\ 0.1942 - lg\ 0.8554$$

$$= \bar{1}.2882 - \bar{1}.9322$$

$$lg\ x = \bar{1}.3560$$

$$x = antilog\ \bar{1}.3560$$

$$x = 0.227$$

$$0.1942 \div 0.8554 = \underline{\underline{0.227}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \bar{1}.2882 \\ -\underline{\bar{1}.9322} \\ \underline{\underline{\bar{1}.3560}} \end{array}}$$

3.5 ලඝු ගණක වගු භාවිතයෙන් ගුණකිරීම හා බෙදීම ඇතුළත් ප්‍රකාශන සුළු කිරීම

නිදසුන 16.

$$\frac{2.578 \times 0.3967}{0.0756}$$

$$x = \frac{2.578 \times 0.3967}{0.0756} \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

$$lg\ x = lg\ 2.578 + lg\ 0.3967 - lg\ 0.0756$$

$$= 0.4113 + \bar{1}.5985 - \bar{2}.8785$$

$$= 0.0098 - \bar{2}.8785$$

$$lg\ x = 1.1313$$

$$x = antilog\ 1.1313$$

$$x = 13.53$$

$$\therefore \frac{2.578 \times 0.3967}{0.0756} = \underline{\underline{13.53}}$$

3.5 අභ්‍යාසය

(1) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

(i) 396.2×0.0017 (ii) 0.0083×6.729 (iii) 0.732×0.0615

(iv) $2.8 \times 3.9 \times 0.056$ (v) $2.99 \times 0.73 \times 0.03921$ (vi) $0.034 \times 27 \times 9.08$

(vii) $0.3965 \div 0.0927$ (viii) $0.9391 \div 9.82$ (ix) $2.83 \div 0.0634$

(x) $0.00957 \div 0.0631$ (xi) $0.03654 \div 0.4563$ (xii) $0.0812 \div 4.93$

(2) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.
පිළිතුරෙහි නිවැරදි බව ගණකය භාවිතයෙන්, පිරික්සන්න.

(i) $\dfrac{24.37\times3.94}{0.8975}$ (ii) $\dfrac{0.5621\times0.328}{0.4224}$

(iii) $\dfrac{91.85\times0.1985}{11.194\times0.1998}$

3.6 ඍණ පූර්ණාංශය සහිත ලඝුගණක පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම හා බෙදීම

ඍණ පූර්ණාංශය සහිත ලඝුගණකය පූර්ණාංශ කොටස ඍණ බවත් දශම කොටස ධන බවත් ඔබ දන්නෙහි ය. මෙවැනි ලඝු ගණකයක් පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීමේ දී හෝ බෙදීමේ දී මෙම කොටස් දෙකට වෙන වෙන ම එම ගණිත කර්මය සිදු කර පසු ව කොටස් දෙක සම්බන්ධ කිරීමෙන් ප්‍රතිඵලය ලබාගත හැකි ය.

ඍණ පූර්ණාංශය සහිත ලඝුගණක පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම

නිදසුන 17.

සුළු කරන්න. $\bar{1}.4624\times2$

පූර්ණාංශය දෙකෙන් ගුණ කළ විට, $\bar{1}\times2=\bar{2}$

දශම කොටස දෙකෙන් ගුණ කළ විට, $0.4624\times2=0.9248$

සම්බන්ධ කළ විට ලඝුගණකය, $\bar{2}.9248$

$$\therefore\ \bar{1}.4624\times2=\underline{\underline{\bar{2}.9248}}$$

නිදසුන 18.

$\bar{1}.9741\times2$ සුළු කරන්න.

පූර්ණාංශය දෙකෙන් ගුණ කළ විට, $\bar{1}\times2=\bar{2}$

දශම කොටස දෙකෙන් ගුණ කළ විට, $0.9741\times2=1.9482$

සම්බන්ධ කළ විට ලඝුගණකය, $\bar{2}+1.9482=\bar{1}.9482$

$$\therefore\ \bar{1}.9741\times2=\bar{1}.9482$$

$$\boxed{\begin{array}{r}\bar{2}.0000\\+1.9482\\\hline\underline{\underline{\bar{1}.9482}}\end{array}}$$

නිදසුන 19.

සුළු කරන්න. $\bar{2}.8954 \times 3$

පූර්ණ කොටස $\times 3$ $= \bar{2} \times 3$ $= \bar{6}$

දශම කොටස $\times 3$ $= .8954 \times 3$ $= 2.6862$

සම්බන්ධ කළ විට $= \bar{6} + 2.6862$ $= \bar{4}.6862$

$\therefore \bar{2}.8954 \times 3 = \underline{\underline{\bar{4}.6862}}$

ඍණ පූර්ණාංශය සහිත ලඝුගණක පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීම

නිදසුන 20.

සුළු කරන්න. $\bar{2}.8762 \div 2$

පූර්ණ කොටස $\div 2$ $= \bar{2} \div 2$ $= \bar{1}.$

දශම කොටස $\div 2$ $= .8762$ $= .4381$

එකතු කළ විට ලඝුගණකය $= \bar{1}.4381$

$\therefore \bar{2}.8762 \div 2 = \underline{\underline{\bar{1}.4381}}$

ඍණ පූර්ණාංශය සංඛ්‍යාවකින් බෙදීමේ දී හරියට ම එම සංඛ්‍යාවෙන් නොබෙදී ඉතිරි වුව හොත් ඉතිරි වන්නේ ඍණ සංඛ්‍යාවක් නිසා එය ධන සංඛ්‍යාවක් වන දශම කොටසට ගෙන යා නොහැකි ය. එබැවින් පූර්ණාංශය ඉතිරි නැති ව බෙදෙන සේ සකස් කරගත යුතු වේ.

නිදසුන 21.

සුළු කරන්න. $\bar{2}.7193 \div 3$

පූර්ණාංශය වන $\bar{2}$, හරියට ම 3 න් නො බෙදේ. 3 න් ඉතිරි නැතිව බෙදෙන පරිදි -2 ට -1 එකතු කර -3 ලෙස ලියා ගනිමු. වෙනසක් නොවීමට දශම කොටසට +1ක් එකතු කර 1.7193 ලෙස ලියා ගනිමු

$\bar{3} \div 3$ $= \bar{1}$

$1.7193 \div 3$ $= 0.5731$

කොටස් දෙක එකතු කළ විට $= \underline{\underline{\bar{1}.5731}}$

හෝ

$$\begin{array}{r|l} 3 & \bar{3} + 1.7193 \\ \hline & \bar{1} + 0.5731 \\ & = \bar{1}.5731 \end{array}$$

එවිට $\bar{2}.7193 \div 3$ $= \bar{1}.5731$

නිදසුන 22.

$\bar{4}.5899 \div 3$ සුළු කරන්න.

පූර්ණාංශය ඉතිරි නැතිව 3 න් බෙදෙන සේ -4 ට -2 ක් එකතු කර -6 ලෙස ද දශම කොටසට +2 එකතු කර + 2.5889 ලෙස ද ලියා ගනිමු.

$$\bar{6} \div 3 = \bar{2}$$

$$2.5899 \div 3 = 0.8633$$

$$\therefore\ \bar{4}.5899 \div 3 = \underline{\underline{\bar{2}.8633}}$$

හෝ

$$\begin{array}{r|l} 3 & \bar{6} + 2.5899 \\ \hline & \bar{2} + 0.8633 \\ & = \bar{2}.8633 \end{array}$$

3.6 අභ්‍යාසය

(1) සුළු කරන්න.

(i) $\bar{2}.1614 \times 2$ (ii) $\bar{1}.2718 \times 3$ (iii) $\bar{1}.7372 \times 3$

(iv) $\bar{2}.9671 \times 3$ (v) $\bar{1}.8692 \times 2$ (vi) $\bar{2}.7993 \times 4$

(vii) $\bar{1}.8820 \times 5$ (viii) $\bar{2}.4786 \times 3$ (ix) $\bar{1}.7959 \times 3$

(x) $\bar{3}.8949 \times 2$

(2) සුළු කරන්න.

(i) $\bar{2}.8949 \div 2$ (ii) $\bar{3}.6513 \div 3$ (iii) $\bar{4}.7364 \div 4$

(iv) $\bar{4}.2504 \div 2$ (v) $\bar{2}.7187 \div 3$ (vi) $\bar{1}.8722 \div 3$

(vii) $\bar{1}.9112 \div 3$ (viii) $\bar{4}.8627 \div 3$ (ix) $\bar{5}.7451 \div 4$

(x) $\bar{1}.8859 \div 4$

3.7 බල සහ මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන

$log_a m^r$ යන්න $r log_a m$ ලෙස දැක්විය හැකි බව මීට පෙර උගත්තෙමු. ඒ අනුව $log_2 8^3 = 3\ log_2 8$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

නිදසුන 23.

2.895^2 හි අගය සොයන්න.

$$
\begin{aligned}
x &= 2.895^2 \quad \text{ලෙස ගනිමු.}\\
lg\,x &= 2\ lg\ 2.895\\
&= 0.4617 \times 2\\
lg\ x &= 0.9234\\
x &= antilog\ 0.9234\\
2.895^2 &= \underline{\underline{8.383}}
\end{aligned}
$$

නිදසුන 24.

$(0.1455)^3$ හි අගය සොයන්න.

$$
\begin{aligned}
x &= (0.1455)^3 \quad \text{ලෙස ගනිමු.}\\
lg\ x &= 3\ lg\ 0.1455\\
&= \bar{1}.1629 \times 3\\
lg\ x &= \bar{3}.4887\\
x &= antilog\ \bar{3}.4887\\
x &= 0.003081\\
\therefore\ 0.1455^3 &= \underline{\underline{0.003081}}
\end{aligned}
$$

නිදසුන 25.

$\sqrt{0.9726}$ හි අගය සොයන්න.

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{0.9726} \quad \text{ලෙස ගනිමු.}\\
x &= (0.9726)^{½}\\
lg\ x &= \frac{1}{2} \times lg\ 0.9726\\
&= \frac{1}{2} \times \bar{1}.9880\\
lg\ x &= \bar{1}.9940\\
x &= antilog\ \bar{1}.9940\\
\therefore\ \sqrt{0.9725} &= \underline{\underline{0.9862}}
\end{aligned}
$$

$\bar{1}.9880$ ලඝුගණකය 2 න් බෙදීම

$$
\begin{aligned}
\bar{1}.9880 &= \bar{1} + \bar{1} + 1.9880\\
\bar{1}.9880 &= \bar{2} + 1.9880\\
\therefore \frac{\bar{2} + 1.9880}{2} &= \bar{1} + 0.9940\\
&= \bar{1}.9940
\end{aligned}
$$

නිදසුන 26.

$\sqrt[3]{0.0785}$ හි අගය සොයන්න.

$$x = \sqrt[3]{0.0785} \quad \text{ලෙස ගනිමු.}$$

$$lg\ x = \frac{1}{3} \times lg\ 0.0785$$

$$= \frac{1}{3} \times \bar{2}.8949$$

$$lg\ x = \bar{1}.6316$$

$$x = antilog\ \bar{1}.6316$$

$$\therefore \sqrt[3]{0.0785} = \underline{\underline{0.4282}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\bar{2}.8949}{3} &= \frac{\bar{3} + 1.8949}{3} \\ &= \bar{1} + 0.6316 \\ &= \bar{1}.6316 \end{aligned}}$$

- සංඛ්‍යාවක බලයක අගය ලඝුගණක මඟින් සෙවීමේ දී සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකය එම බලයට අදාළ දර්ශකයෙන් ගුණ කළ විට එම බලයේ ලඝුගණකය ලැබේ.
- සංඛ්‍යාවක යම් මූලයක අගය ලඝුගණක මඟින් සෙවීමේ දී සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකය එම මූලයට අදාළ සංඛ්‍යාවෙන් බෙදූ විට එම මූලයේ ලඝුගණකය ලැබේ.

3.7 අභ්‍යාසය

(1) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

(i) $(3.985)^2$ (ii) $\sqrt{143.9}$ (iii) $\sqrt{0.01257}$ (iv) $(0.7575)^{\frac{1}{2}}$

(v) $(0.0014557)^{\frac{1}{3}}$ (vi) $\sqrt{40005}$ (vii) $(17.25)^{\frac{2}{3}}$ (viii) $\sqrt[3]{0.1285}$

(ix) $\sqrt[4]{0.0025}$ (x) $(5.002)^2$

(2) $lg\ 2=0.3010$, $lg\ 3=0.4771$, $lg\ 5=0.6990$ යන අගයයන් භාවිතා කරමින් පහත ලඝුගණක ගණනය කරන්න.

(i) $lg\ 6$ * (ii) $lg\ \sqrt{2}$ (iii) $lg\ 30$ * (iv) $lg\ \sqrt[3]{5}$

(v) $lg\ \frac{2}{3}$ (vi) $lg\ 6^2$ (vii) $lg\ (0.002)^3$ (viii) $lg\ \frac{3}{\sqrt{2}}$

(ix) $lg\ \sqrt[3]{0.03}$ (x) $lg\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

ඉඟිය :- * (i) $lg\ 6 = lg\ (2\times3)$
* (iii) $lg\ 30 = lg\ (6\times5)$

3.8 බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශනවල අගය සෙවීම හා ගණකය ඇසුරින් නිරවද්‍යතාව තහවුරු කිරීම

නිදසුන 27.

$\dfrac{\sqrt{12.42}\times 0.725}{(1.748)^2}$ හි අගය සොයන්න. ගණකය ඇසුරින් නිවැරදි බව පරීක්ෂා කරන්න.

$$x = \frac{\sqrt{12.42}\times 0.725}{(1.748)^2}$$ ලෙස ගනිමු.

$$lg\, x = \frac{1}{2}\ lg\, 12.42 + lg\, 0.725 - 2lg\, 1.748$$

$$= \frac{1}{2}\times 1.0941 + \bar{1}.8603 - 2\times 0.2425$$

$$= 0.5470 + \bar{1}.8603 - 0.4850$$

$$lg\ x = \bar{1}.9223$$

$$x = antilog\ \bar{1}.9223 = 0.8361$$

$$\frac{\sqrt{12.42}\times 0.725}{(1.748)^2} = \underline{\underline{0.8361}}$$

$$\begin{array}{rr} & 0.5470 \\ + & \bar{1}.8603 \\ \hline & 0.4073 \\ - & 0.4850 \\ \hline & \bar{1}.9223 \\ \hline\hline \end{array}$$

නිදසුන 28. $\dfrac{38.54\times(0.0357)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{0.5164}}$

$$x = \frac{38.54\times(0.0357)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{0.5164}}$$ ලෙස ගනිමු.

$$lg\ x = lg\, 38.54 + \frac{1}{3}\ lg\, 0.0357 - \frac{1}{2}\ lg\, 0.5164$$

$$= 1.5860 + \frac{1}{3}\times \bar{2}.5527 - \frac{1}{2}\times \bar{1}.7129$$

$$= 1.5860 + \bar{1}.5176 - \bar{1}.8564$$

$$= 1.1036 - \bar{1}.8564$$

$$lg\ x = 1.2472$$

$$x = antilog\ 1.2472$$

$$= \underline{\underline{17.67}}$$

$$\therefore\ \frac{38.54\times(0.0357)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{0.5164}} = \underline{\underline{17.67}}$$

ඔබේ පිළිතුරෙහි නිරවද්‍යතාව ගණක යන්ත්‍ර ඇසුරින් තහවුරු කරන්න.

3.8 අභ්‍යාසය

ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් අගය සොයන්න. ගණකය භාවිතයෙන් ඔබේ පිළිතුර පිරික්සන්න.

(1) $\dfrac{(4.23)^2 \times \sqrt[3]{0.276}}{3.27}$ අගය දශමස්ථාන දෙකකට දෙන්න.

(2) (i) $\dfrac{\sqrt{143.8} \times (0.7524)^2}{3.0025}$ හි දළ අගය ආසන්න පූර්ණ සංඛ්‍යාවට සොයන්න

(ii) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ඉහත ප්‍රකාශනයේ අගය ආසන්න පූර්ණ සංඛ්‍යාවට සොයන්න.

(3) $\dfrac{(3.24)^2 \times \sqrt{0.00276}}{7.32}$ හි අගය,

(i) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් සොයන්න.

(ii) ගණකය භාවිතයෙන් සොයන්න.

(iii) ඉහත (i) හා (ii) හි ඔබට ලැබුණු පිළිතුරු සසඳන්න.

(4) $f = \dfrac{100}{1.52}\sqrt{\dfrac{0.0909}{15.7}}$ නම් ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් f හි අගය සොයන්න.

(5) $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$ සූත්‍රයෙ හි $\pi = 3.142$, $l = 46.4$, $T = 1.37$ වන විට g හි අගය ආසන්න දෙවන දශමස්ථානයට සොයන්න.

(6) $P = 0.0425$ ද, $q = 12.85$ ද, $r = 3.52$ ද නම් $\dfrac{\sqrt{p}}{r^2} \div (q^{\frac{1}{2}})^3$ ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(7) එක්තරා කුඩා කාසියක අරය 0.9 cm වේ. $\pi = 3.142$ ලෙස ගෙන කාසියේ එක් මුහුණත වර්ගඵලය ලඝුගණක භාවිතයෙන් ගණනය කරන්න.
(අරය r වන වෘත්තයක වර්ගඵලය πr^2 වේ.)

(8) සිලින්ඩරයක පරිමාව $\pi r^2 h$ වේ. අරය (r) 1.75 cm වන අතර උස (h) 5.25 cm හා $\pi = 3.142$ වූ සිලින්ඩරයේ පරිමාව ලඝුගණක භාවිතයෙන් සොයන්න.

(9) ගෝලයක පරිමාව $\frac{4}{3}\pi r^3$ වේ. අරය 26 cm ක් වූ ගෝලයක පරිමාව ලඝුගණක භාවිතයෙන් සොයන්න.
($\pi = 3.142$)

(10) ලඝුගණක භාවිතයෙන් සුළු කරන්න.

$$7.76 \times 0.36 \times 5.4 \times 0.2$$

ගණකය භාවිතයෙන් පිළිතුර පරීක්ෂා කරන්න.

04 ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

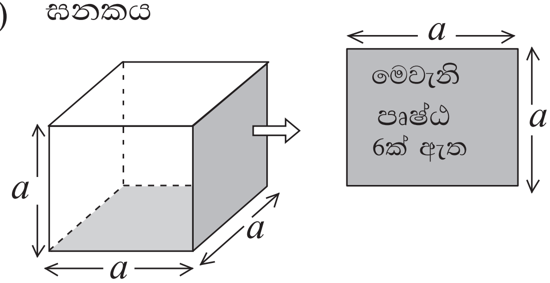
මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ආධාරකය සමචතුරස්‍ර සෘජු පිරමීඩයක
- කේතුවක
- ගෝලයක

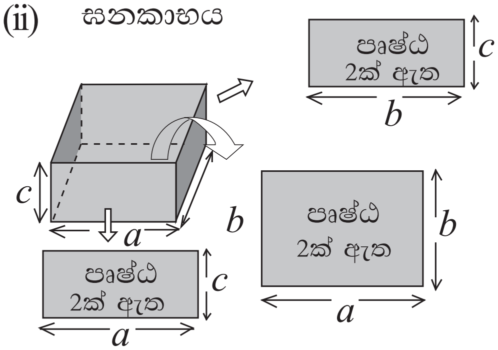
පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය පිළිබඳව මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි වනු ඇත.

පහත දැක්වෙන ඝන වස්තුවල රූප සටහන් දෙස බලන්න. ඒවා ඔබ මීට ඉහත දැක ඇත. එම ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන ආකාරය නැවත සිහිපත් කර ගනිමු. ඝන වස්තුවකට ඇත්තේ එක් පෘෂ්ඨයකි. එහි ඇති එක් එක් පෘෂ්ඨ කොටස් වෙන් කරගත හැකි ය. පහත ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨවල හැඩය වෙන් වෙන් වශයෙන් ඇඳ ඇත.

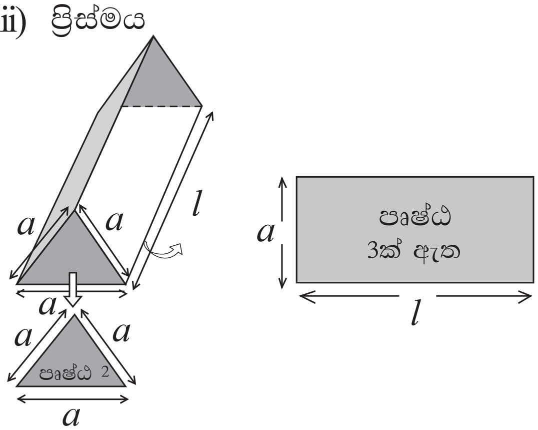
(i) ඝනකය



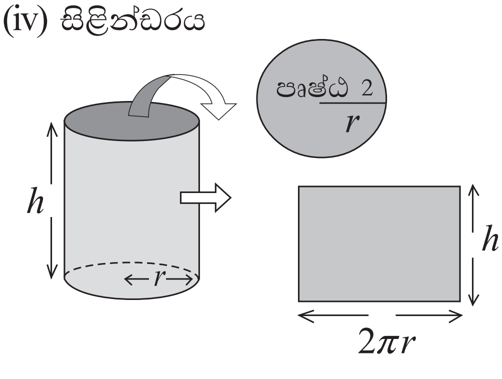
(ii) ඝනකාභය



(iii) ප්‍රිස්මය



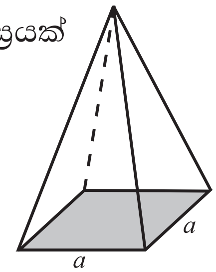
(iv) සිලින්ඩරය

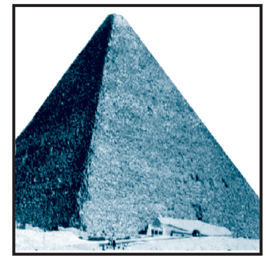


ඝන වස්තුවේ එක් එක් පෘෂ්ඨ කොටසේ (මුහුණතේ) වර්ගඵලය වෙන වෙන ම සෙවීමෙන් ඝන වස්තුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයාගත හැකි ය.

4.1 ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර ඍජු පිරමීඩයන්හි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

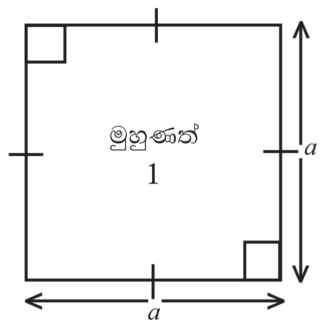
රූපයේ දැක්වෙන්නේ ආධාරකය සමචතුරස්‍රයක් වූ ඍජු පිරමීඩයකි. මෙහි ආධාරකය හැර තවත් පෘෂ්ඨ කොටස් 4ක් ඇත. ඒවා ත්‍රිකෝණාකාර වේ.



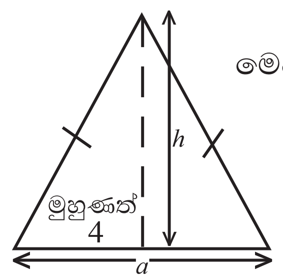


ඍජු පිරමීඩයක ශීර්ෂය ආධාරකයේ හරි මැදට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටා ඇත. ඒ නිසා ශීර්ෂයේ දී හමු වන දාර සියල්ල දිගින් එක සමාන ය. ඉහත දැක්වෙන පිරමීඩයේ පෘෂ්ඨ වෙන් කර මෙසේ ඇඳ දැක්විය හැකි ය.

ආධාරකය



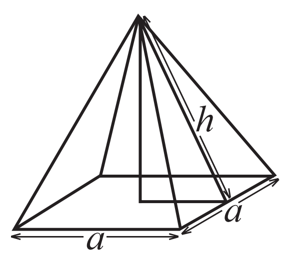
රූපය 1



රූපය 2

මෙවැනි පෘෂ්ඨ කොටස් 4 කි.

රූපය 2 ආකාරයේ මුහුණත් 4ක් ඇත. දී ඇති මිනුම් අනුව පෘෂ්ඨ කොටස්වල වර්ගඵලය මෙසේ ගණනය කළ හැකි ය.



පිරමිඩයේ ආධාරකයේ වර්ගඵලය $= a \times a$

$= a^2$

ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times a \times \mathrm{h}$

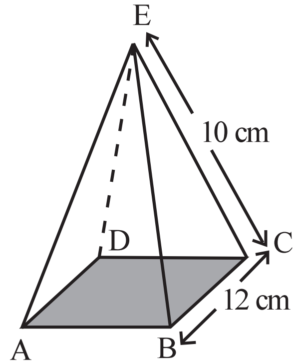
ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් 4 වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} a \times \mathrm{h} \times 4$

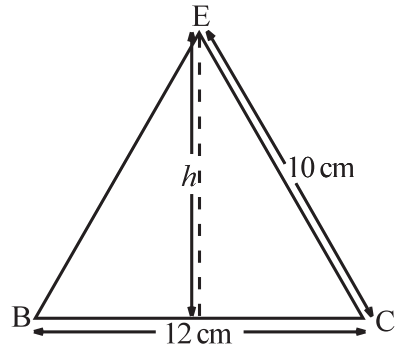
$= 2a\mathrm{h}$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය	$= a^2 + 2a\mathrm{h}$
	$= a(a + 2\mathrm{h})$

නිදසුන 1.

ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වන සෘජු පිරමීඩයක් රූපයේ දැක්වේ. එහි පතුලේ දාරයක දිග 12 cm වේ. සෙසු දර 10 cm බැගින් වේ. සෘජු පිරමීඩයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.





EBC Δ යේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීමට එහි ලම්බ උස සොයා ගනිමු.

පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව

$$h^2 + 6^2 = 10^2$$
$$h^2 = 10^2 - 6^2$$
$$= (10 - 6)(10 + 6)$$
$$h^2 = 4 \times 16$$
$$h = \sqrt{4 \times 16}$$
$$h = 2 \times 4$$

$\therefore$ ලම්බ උස $= 8\,\text{cm}$

ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 12\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$

$= 48\,\text{cm}^2$

ත්‍රිකෝණ 4 වර්ගඵලය $= 48 \times 4\ \text{cm}^2$

$= 192\,\text{cm}^2$

ආධාරකයේ පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 12 \times 12\,\text{cm}^2$

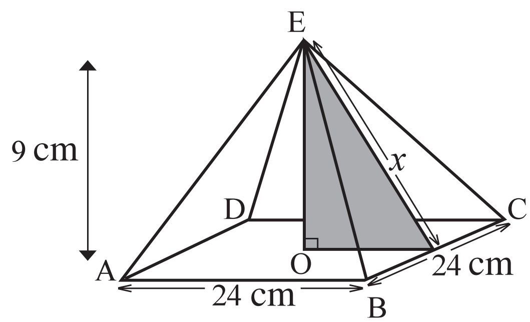
$= 144\,\text{cm}^2$

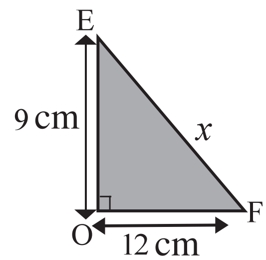
$\therefore$ පිරමීඩයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 192\,\text{cm}^2 + 144\,\text{cm}^2$

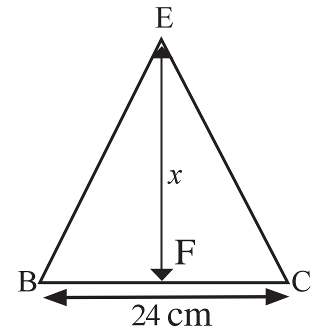
$= \underline{\underline{336\,\text{cm}^2}}$

නිදසුන 2.

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකය සහිත පිරමීඩයේ ලම්බ උස 9 cm වේ. ආධාරකයේ පාදයක දිග 24 cm වේ. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.







$x^2 = 9^2 + 12^2$ (පයිතගරස් සම්බන්ධයෙන්)

$= 81 + 144$

$x^2 = 225$

$x = \underline{\underline{15 \text{ cm}}}$

ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 24 \times 15 \text{ cm}^2$

$= 180 \text{ cm}^2$

ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් 4 වර්ගඵලය $= 180 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}^2$

$= 720 \text{ cm}^2$

ආධාරක මුහුණතේ වර්ගඵලය $= 24 \times 24 \text{ cm}^2$

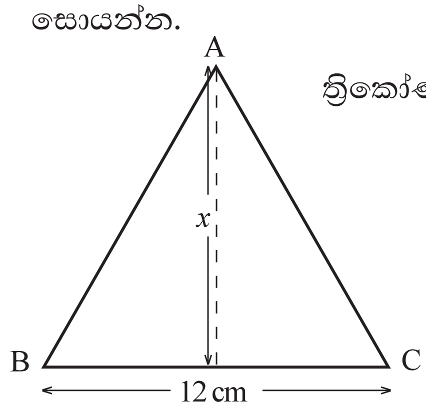
$= 576 \text{ cm}^2$

මුළු පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 576 \text{ cm}^2 + 720 \text{ cm}^2$

$= \underline{\underline{1296 \text{ cm}^2}}$

නිදසුන 3.

සමචතුරස්‍ර ආධාරකය සහිත පිරමිඩයක ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත්වල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 240 cm^2. එහි ආධාරකය 12 cm නම් ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතේ ලම්බ උස සොයන්න.



ත්‍රිකෝණාකාර එක් මුහුණතක වර්ගඵලය $= 240 \times \frac{1}{4} \text{ cm}^2$

$= 60 \text{ cm}^2$

ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 12 \times x \text{ cm}^2$

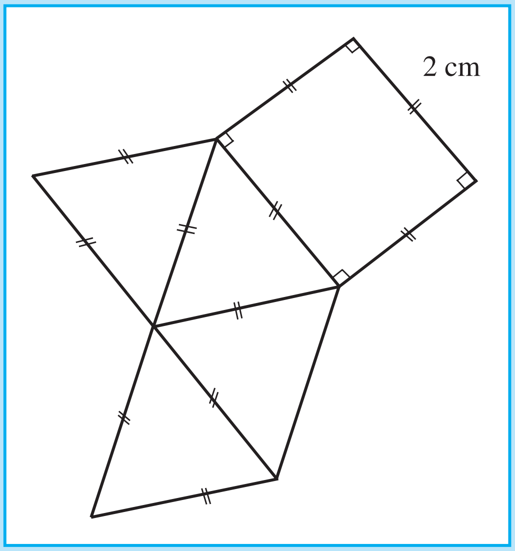
$\frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times x = 60$

$x = 10$

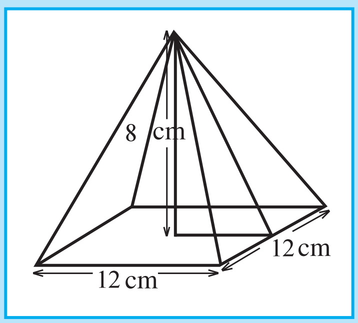
$\therefore$ ලම්බ උස $= \underline{\underline{10 \text{ cm}}}$

4.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන සෘජු පිරමිඩ පතරොමකි. පිරමීඩයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න. ($\sqrt{3} = 1.732$ ලෙස ගන්න.)



(2) පැත්තක් 12 cm වූ සමචතුරස්‍ර ආධාරකයක් සහිත සෘජු පිරමිඩයක ලම්බ උස 8 cm නම් පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



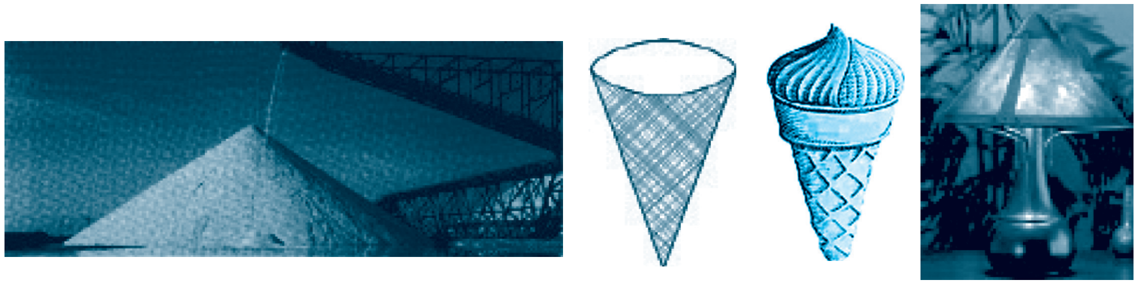
(3) ආධාරකයේ පැත්තක දිග 6 cm වන සමචතුරස්‍රයක් වන සෘජු පිරමිඩයක ඇල දාරයක දිග 5 cm කි. ආධාරකය හැර ඉතිරි මුහුණත්වල වර්ගඵලය සොයන්න.

(4) අජිත් සමචතුරස්‍ර ආධාරකයක් ඇති පිරමිඩයක් හැඩැති කූඩාරමක් තැනීමට අදහස් කරයි. ඒ සඳහා 6m දිග දඬු 4 ක් හා 5m දිග දඬු 4 ක් යොදා ගනී, ආධාරකයේ පාදයක දිග 6m කි. කූඩාරම ආවරණය කිරීමට අවශ්‍ය කැන්වස් රෙදිවල වර්ගඵලය සොයන්න. (අපතේ ගිය කොටස නොසලකා හරින්න.)

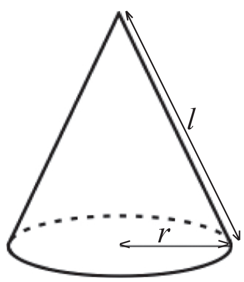
(5) සමචතුරස්‍ර ආධාරකය සහිත සෘජු පිරමිඩයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $340\ \mathrm{cm}^2$ වේ. ආධාරක පාදයක දිග 10 cm වේ.

1. ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස සොයන්න.
2. ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ඇල දරයේ දිග සොයන්න.

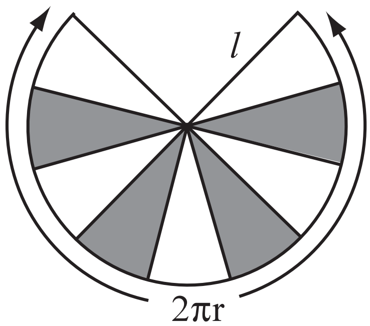
4.2 කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය



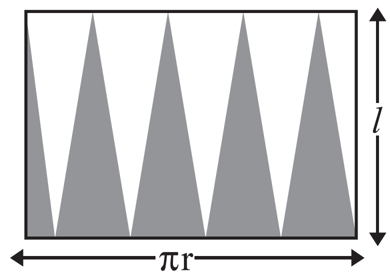
ආධාරකය වෘත්තයක් වූ ශීර්ෂය ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයට හරි ඉහළින් පිහිටි ඝන වස්තුවක් ඍජුවෘත්ත කේතුවක් ලෙස හැඳින්වේ.



රූපය 1



රූපය 2



රූපය 3

රූපය 1 කඩදාසියෙන් තනාගත් ආධාරකයක් නොමැති කේතුවක් (හිස්) ලෙස සලකන්න. එසේ කඩදාසියෙන් තනාගත් කේතුව ශීර්ෂයේ සිට ආධාරකයට සරල රේඛාවක් දිගේ කපාගෙන දිග හැරිය විට රූපය 2 වැන්නක් ලැබෙනු ඇත.

දැන් මෙම හැඩය කුඩා තීරුවලට වෙන් කර රූපයක් 3හි දැක්වෙන ආකාරයට මාරුවෙන් මාරුවට අලවා ගත හොත් එවිට ආසන්නව ඍජුකෝණාස්‍ර හැඩයක් ලැබේ. එම

ඍජුකෝණාස්‍රයේ දිග $\dfrac{2\pi r}{2}$ ද පළල l ද වේ.

$\therefore$ ඍජු කොණාස්‍රයේ දිග $=$ ඒකක πr

ඍජු කෝණාස්‍රයේ පළල $=$ ඒකක l

$\therefore$ වර්ගඵලය $=$ වර්ග ඒකක $\pi r l$

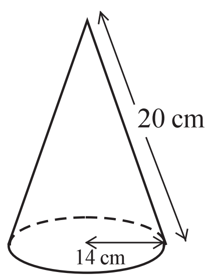
කේතුවේ වක්‍රපෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $=$ වර්ග ඒකක $\pi r l$

අරය r වූ ද, ඇල උස l වූ ද කේතුවක වක්‍රපෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $A =$ වර්ග ඒකක $\pi r l$

කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $=$ වෘත්තාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලය + වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r^2 + \pi r l$ වර්ග ඒකක $= \pi r (r + l)$

නිදසුන 4.

ඝන කේතුවක රූප සටහනක් පහත දැක්වේ. එහි ඇති තොරතුරුවලට අනුව පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න. ($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න)



කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 20 \, \text{cm}^2$

$= 880 \, \text{cm}^2$

වෘත්තාකාර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \, \text{cm}^2$

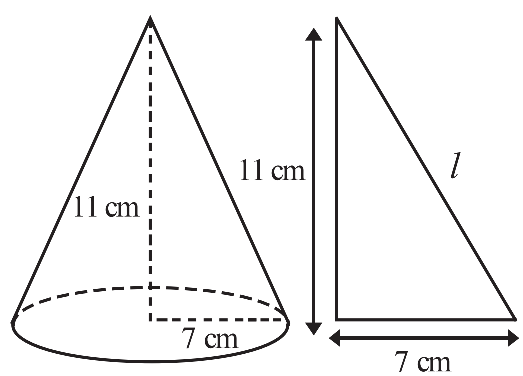
$= 616 \, \text{cm}^2$

කේතුවේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 880 \, \text{cm}^2 + 616 \, \text{cm}^2$

$= \underline{\underline{1496 \, \text{cm}^2}}$

නිදසුන 5.

රූපසටහනේ ලකුණුකර ඇති තොරතුරුවලට අනුව කේතුවේ වක්‍ර පෘෂඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



ආධාරකයේ අරය $=$ 7 cm

ඇල උස $= l$

ලම්බ උස $=$ 11cm

$l^2 = 11^2 + 7^2$ (පයිතගරස් සම්බන්ධයෙන්)

$= 121 + 49$

$= 170$

$$l = \sqrt{170}\text{ cm} = 13.04\text{ cm}$$

කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{170}\text{ cm}^2$$

$$= 22\sqrt{170}\text{ cm}^2$$

$$= 22 \times 13.04\text{ cm}^2$$

$$= \underline{\underline{286.88\text{ cm}^2}}$$

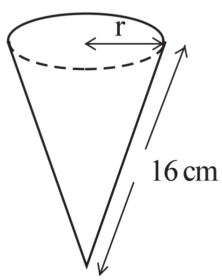
නිදසුන 6.

පරිධිය 66 cm වන කේතුවක ඇල උස 16 cm නම් එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

$$l = 16\text{ cm}$$

$$r = ?$$

කේතුවේ ආධාරකයේ අරය සොයමු.



වෘත්තයේ පරිධිය $= 2\pi r$

$$= 66\text{ cm}$$

$$2\pi r = 66\text{ cm}$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 66$$

$$r = \frac{66 \times 7}{22 \times 2}$$

$$r = \frac{21}{2}$$

අරය $= \underline{\underline{10.5\text{ cm}}}$

ඝන කේතුවේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi r l + \pi r^2\text{ cm}^2$

$$= \pi r (l + r)\text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 10.5(16 + 10.5)\text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 10.5 \times 26.5\text{ cm}^2$$

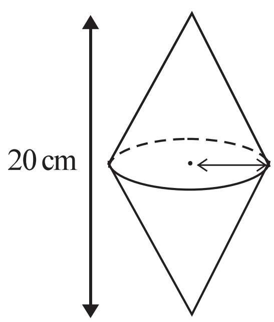
$$= \underline{\underline{874.5\text{ cm}^2}}$$

නිදසුන 7.

කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය 440 cm^2 කි. එහි ඇල උස 20 cm නම්, පතුලේ පරිධිය සොයන්න.

$$\text{වක්‍ර පෘෂයයේ වර්ගඵලය} = \pi r l$$
$$= 440\ cm^2$$
$$\pi r l = 440\ cm^2$$
$$\frac{22}{7} \times r \times 20 = 440$$
$$r = \frac{440 \times 7}{22 \times 20}\ cm$$
$$r = 7\ cm$$

$$\text{කේතුවේ පරිධිය} = 2\pi r$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7\ cm$$
$$= 44\ cm$$



එක එකෙහි අරය 7 cm බැගින් වන කේතු 2 ක් එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සාද ඇති වස්තුවක රූප සටහනක් මෙහි දක්වේ. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

4.2 අභ්‍යාසය

(1) ඝණ කේතුවක ආධාරකයේ අරය 7 cm ද, ඇල උස 12 cm ද නම් එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

(2) සෘජු කේතුවක් හැඩැති වැලි ගොඩක ආධාරකය වූ වෘත්තයේ අරය සෙවීමට නිමල්ට අවශ්‍ය වී ඇත. ඒ සඳහා ක්‍රමයක් යෝජනා කරන්න.

(3) 

කුඩා කෘමීන් ඇල්ලීමට භාවිත කරන ගොටුවක රූප සටහන මෙහි දැක්වේ. එහි කම්බි රවුමේ අරය 7 cm ද, ලම්බ උස 24 cm ද වේ. කේතු ආකාර ගොටුව සෑදීමට යොදා ගත් රෙදිවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.
(මූට්ටු සඳහා වැය වූ ප්‍රමාණය නොසලකන්න)

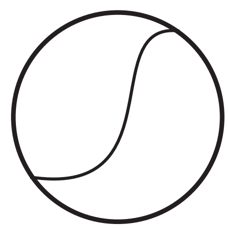
(4) සෘජු කේතුවක් හැඩැති වැලි ගොඩක පතුලේ පරිධිය 528 cm වේ. එහි ඇල උස 140 cm වේ. වැලි ගොඩේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න. වැලි ගොඩ කොපමණ ඉඩ ප්‍රමාණයක් පුරා පැතිර තිබේ ද?

(5) කමල් කේතු හැඩැති කුඩාරමක් තැනීමට අදහස් කරයි. එහි ලම්බ උස 2 m බව තීරණය කරයි. පතුලේ අරය 1.5 m කි. එය වැසීමට අවශ්‍ය කැන්වස් රෙදිවල වර්ගඵලය සොයන්න. (මූට්ටු සඳහා වැය වූ ප්‍රමාණය නොසලකන්න)

4.3 ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

ලෝක ගෝලය

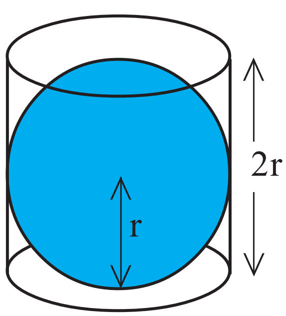
පාපන්දුව



බෝලය

ගෝල හැඩැති වස්තු කීපයක රූප සටහන් මෙහි දැක්වේ.

ගෝලයේ අරයට සමාන අරය ඇති ගෝලයේ විෂ්කම්භයට සමාන උස ඇති සිලින්ඩරයක වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලයට සමාන බව ආකිමිඩිස් නම් ගණිතඥයා විසින් සොයා ගන්නා ලදී.



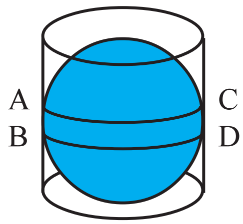
සිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 2\pi r \times 2r$

$=$ වර්ග ඒකක $4\pi r^2$

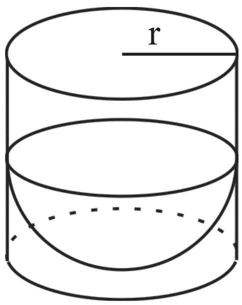
ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය (A) = වර්ග ඒකක $4\pi r^2$

- ගෝලයේ මතුපිට පෘෂ්ඨ වර්ගඵලයට සමාන වක්‍ර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ඇති සිලින්ඩරය එම ගෝලයේ පරිසිලින්ඩරය ලෙස හැඳින් වේ.

- දන්නවා ද?



ගෝලයක් පරිසිලින්ඩරය තුළ රූපයේ දැක්වෙන අන්දමට ඇතැයි සිතමු. සිලින්ඩරයේ වෘත්තාකාර හරස්කඩට සමාන්තර ව BAC හා BD මගින් වෙන් වන කොටසේ වර්ගඵලය ගෝලයේ අනුරූප කොටසේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලයට සමාන වේ.



අර්ධ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

අර්ධ ගෝලයක වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 2\pi r \times r$

අර්ධ ගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය = වර්ග ඒකක $2\pi r^2$

∴ අර්ධ ගෝලයක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi r^2 + 2\pi r^2$

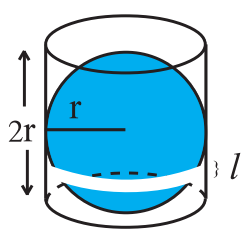
= වර්ග ඒකක $\underline{\underline{3\pi r^2}}$

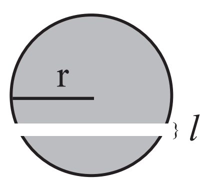
(මෙහි πr^2 යනු අර්ධ ගෝලයේ තල පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලයයි)

- ගෝලයේ ඕනෑ ම කොටසක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය එහි පරිසිලින්ඩරය ඇසුරින් සෙවිය හැකි ය.

- **විමසන්න**

මෙම රූප දෙකේ අඳුරු නොකළ පෘෂ්ඨ වර්ගඵල සමාන ය.





නිදසුන 8.

අරය 14 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න.)

ගෝලයක අරය $= 14$ cm

පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \text{ cm}^2$

$= \underline{\underline{2464 \text{ cm}^2}}$

නිදසුන 9.

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 154 cm^2 වේ. මෙහි අරය සොයන්න.

($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න.)

ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$

දී ඇති ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 154\ cm^2$

$\therefore \quad 4\pi r^2 = 154$

$$r^2 = \frac{154}{4\pi} = \frac{154}{4 \times \frac{22}{7}}$$

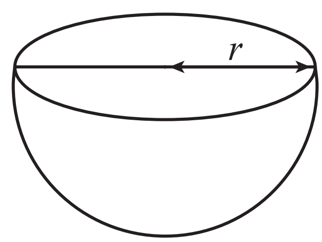
$$r^2 = \frac{154 \times 7}{22 \times 4} = \frac{7 \times 7}{4}$$

$$r = \frac{7}{2}$$

$\therefore$ අරය $= \underline{\underline{3.5\ cm}}$

නිදසුන 10.

අර්ධ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 462 cm^2 වේ. එහි අරය සොයන්න.



අර්ධ ගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 2\pi r^2$

වෘත්තාකාර කොටසේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi r^2$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 3\pi r^2$

$= 462\ cm^2$

එවිට, $3\pi r^2 = 462$

$$3 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 462$$

$$r^2 = \frac{462 \times 7}{3 \times 22}$$

$$r^2 = 49$$

$$r = \sqrt{49}$$

$$r = 7$$

$\therefore$ අරය $= \underline{\underline{7\ cm}}$

නිදසුන 11.

දිග 280 cm හා පළල 220 cm වූ තුනී තඹ තහඩුවක් සම්පූර්ණයෙන් භාවිත කර අරය 7 cm වූ කුහර සහිත ගෝල කීයක් සෑදිය හැකි ද ? (වාත්තු කිරීමේ දී ලෝහ කිසිවක් අපතේ නොයන ලදැයි සලකන්න. $\pi = \frac{22}{7}$)

අරය r වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\,cm^2$

$= 616\,cm^2$

තහඩුවේ වර්ගඵලය $= 280 \times 220\,cm^2$

ගෝල සංඛ්‍යාව $= \frac{280 \times 220}{616}$

$= \underline{\underline{100}}$

4.3 අභ්‍යාසය

(1) ගෝලයක අරය 14 cm වේ. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

(2) අරය 7 cm වන ඝන අර්ධ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

(3) ගෝලයක අරය 10.5 cm වේ. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

(4) අරය 7 cm වූ අර්ධ ගෝලාකාර වස්තුවක පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(5) ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $616\,cm^2$ එහි අරය සොයන්න.

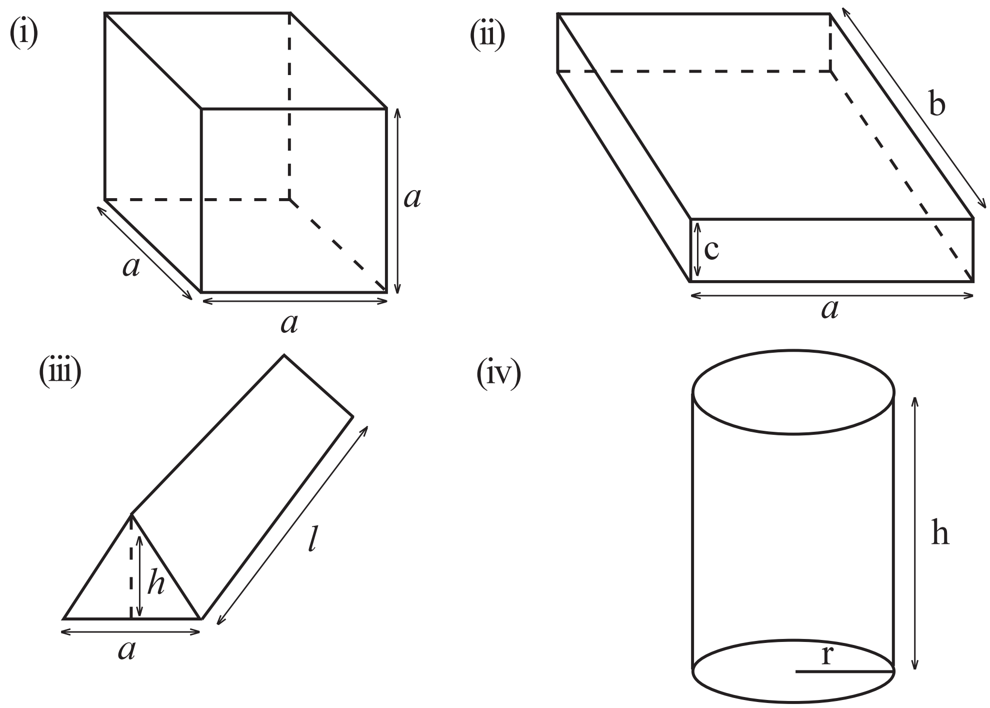
05 ඝන වස්තුවල පරිමාව

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- පතුල සමචතුරස්‍ර වූ පිරමීඩයක
- කේතුවක
- ගෝලයක

පරිමාව පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

ඝන වස්තුවල පරිමාව සෙවීමේ දී මීට පෙර උගෙන ඇති ඝනකයේ, ඝනකාභයේ, ප්‍රිස්මයේ හා සිලින්ඩරයේ පරිමාව සොයන ආකාරය සිහිපත් කර ගනිමු.



ඒකාකාර හරස්කඩක් ඇති ඝනවස්තුවක පරිමාව හරස්කඩ වර්ගඵලය හා දිග ඇසුරින් දැක්විය හැකි ය.

ඉහත දැක්වෙන ඝනවස්තුවල පරිමාව, ඒ එක එකෙහි හරස්කඩ වර්ගඵලය $\times$ දිග යනුවෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

- ඝනකය : හරස්කඩ වර්ගඵලය $\times$ උස $= (a \times a) \times a$ ඝන ඒකක
  $= a^2 \times a$ ඝන ඒකක
  $= a^3$ ඝන ඒකක
- ඝනකාභය : හරස්කඩ වර්ගඵලය $\times$ උස $= (a \times b) \times c$ ඝන ඒකක
  $= ab \times c$ ඝන ඒකක
  $= abc$ ඝන ඒකක

- ත්‍රිකෝණ ප්‍රිස්මය : හරස්කඩ වර්ගඵලය $\times$ දිග $= \frac{1}{2} ah \times l$ ඝන ඒකක

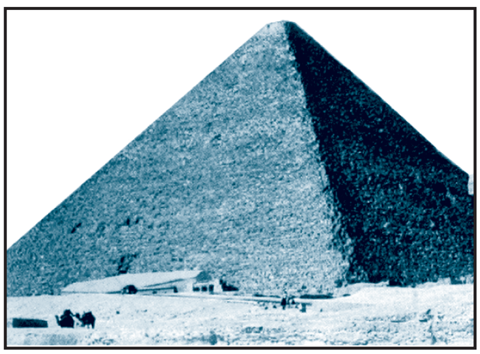
$= \frac{1}{2} ahl$ ඝන ඒකක

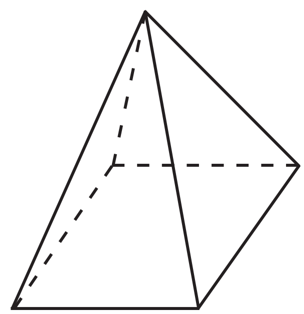
- සිලින්ඩරය : හරස්කඩ වර්ගඵලය $\times$ උස $= \pi r^2 \times h$ ඝන ඒකක

$= \pi r^2 h$ ඝන ඒකක

ඒකාකාර හරස්කඩක් ඇති ඝනවස්තුවක පරිමාව $=$ හරස්කඩ වර්ගඵලය $\times$ දිග

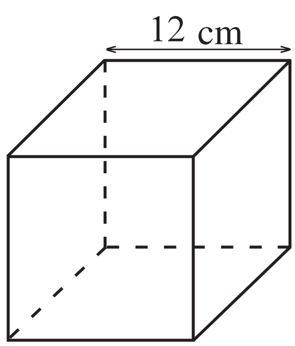
5 1 ආධාරකය සමචතුරස්‍රයක් වූ පිරමිඩයක පරිමාව



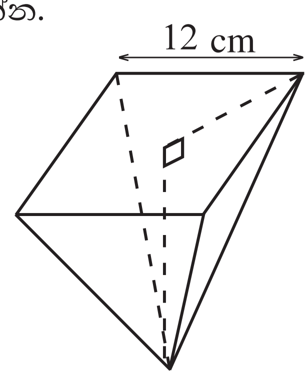


5.1 ක්‍රියාකාරකම

පාදයක දිග 12 cm වන පියන රහිත ඝනකය හැඩැති භාජනයක් පාදයක දිග 12 cm වූ සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත සෘජු උස 12 cm වූ කුහර සහිත සමචතුරස්‍ර පිරමීඩයක හැඩැති බඳුනක් ද ඝන කඩදාසිවලින් සාදගන්න.



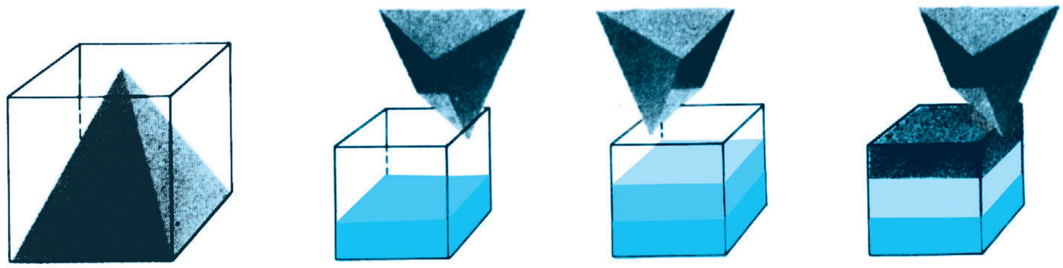
ඝනකය



පිරමීඩය

- සාදගත් පිරමීඩ හැඩැති බඳුන සිහින් වැලිවලින් පුරවා, එම වැලි ඝනක හැඩැති බඳුනට දමන්න. ඝනක හැඩැති බඳුන සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට පිරමීඩ හැඩැති බඳුනින් වැලි කී වාරයක් දැමිය යුතු දැයි සොයන්න.

- 3 න් වාරයක් වැලි එසේ දැමිය යුතු බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

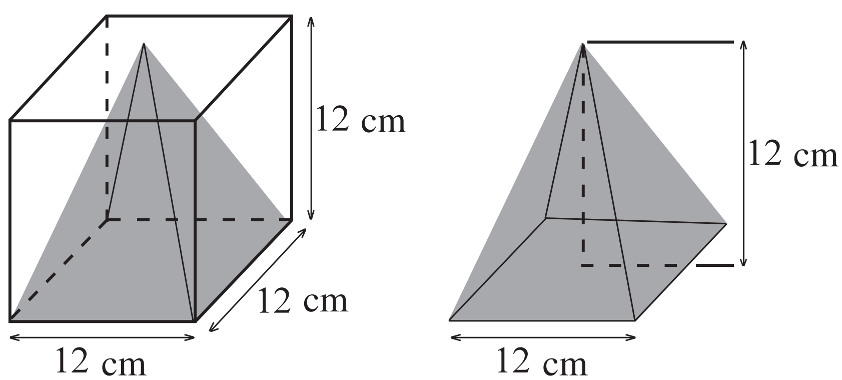


$\therefore$ පිරමිඩයේ පරිමාව $\times 3$ = ඝනකයේ පරිමාව

පිරමිඩයේ පරිමාව = $\frac{1}{3}$ $\times$ ඝනකයේ පරිමාව

පිරමිඩයේ පරිමාව = $\frac{1}{3}$ $\times$ ආධාරකයේ වර්ගඵලය $\times$ ලම්බ උස

නිදසුන 1. ආධාරකයේ පැත්තක දිග 12 cm වූ ද උස 12 cm වූ ද ඍජු පිරමිඩයක පරිමාව සොයන්න.



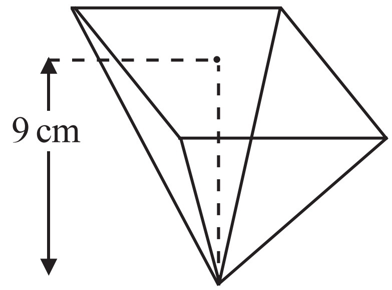
පිරමිඩයේ පරිමාව = $\frac{1}{3}$ $\times$ ආධාරකයේ වර්ගඵලය $\times$ උස

$= \frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 12 \text{ cm}^3$

$= \underline{\underline{576 \text{ cm}^3}}$

නිදසුන 2.

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකය සහිත පිරමිඩයක පරිමාව 588 cm^3 වේ. එහි ලම්බ උස 9 cm වේ. එහි ආධාරකයේ පාදයක දිග සොයන්න.



සමචතුරස්‍ර ආධාරකය සහිත පිරමිඩයේ පරිමාව $= 588\, cm^3$

$\frac{1}{3} \times$ ආධාරක පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $\times$ ලම්බ උස $= 588\ cm^3$

$\frac{1}{3} \times$ ආධාරක පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $\times 9\, cm = 588\ cm^3$

ආධාරක පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \frac{588 \times 3}{9}\ cm^2$

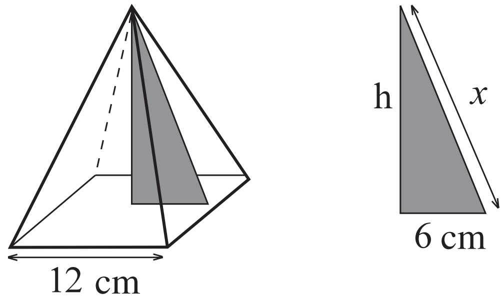
$= 196\ cm^2$

පාදයක දිග $= \sqrt{196}\ cm$

$= \underline{\underline{14\ cm}}$

නිදසුන 3.

සමචතුරස්‍ර ආධාරකය සහිත පිරමිඩයක ආධාරකයේ පාදයක දිග 12 cm වේ. එහි පරිමාව 384 cm^3 වේ. පිරමීඩයේ ලම්බ උස සොයන්න. එම පිරමිඩයේ ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස සොයන්න.



සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකය සහිත පිරමිඩයේ පරිමාව $= 384\ \text{cm}^3$

$\frac{1}{3} \times$ ආධාරක පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $\times$ ලම්බ උස $= 384\ \text{cm}^3$

$$\frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times h = 384$$

$$h = \frac{384 \times 3}{12 \times 12}$$

$$h = 8$$

$\therefore$ පිරමිඩයේ ලම්බ උස $= 8\ \text{cm}$

රූපයට අනුව ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතේ ලම්බ උස සෙන්ටිමීටර් x නම්,

පයිතගරස් සම්බන්ධයෙන් $x^2 = 8^2 + 6^2$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

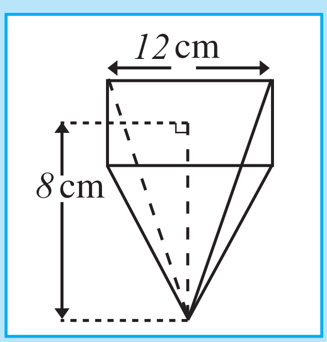
$$x = 10$$

$\therefore$ ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතේ ලම්බ උස $= \underline{\underline{10\ \text{cm}}}$

5.1 අභ්‍යාසය

(1) පැත්තක දිග 6 cm වූ සමචතුරස්‍ර ආධාරකය සහිත පිරමිඩයක ලම්බ උස 4 cm වේ. එහි පරිමාව සොයන්න.

(2) රූපයේ දැක්වෙනුයේ සිහිවටන පලකයක ආකෘතියකි. එය සමචතුරස්‍ර පිරමිඩයක හැඩය ගනී. එහි ලම්බ උස 8 cm ද, පිරමිඩයේ සමචතුරස්‍ර මුහුණතේ පැත්තක දිග 12 cm ද වේ. මෙම පිරමිඩයේ පරිමාව සොයන්න.

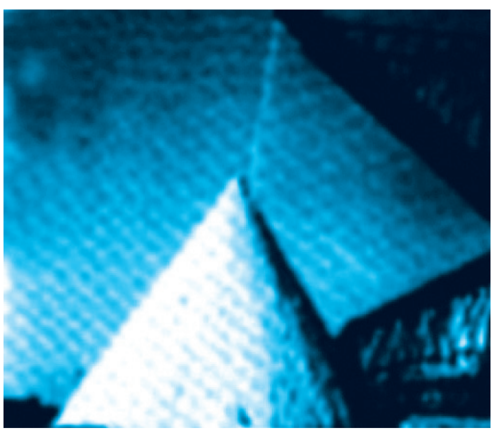


(3) පාදයක දිග 10 cm වූ සමචතුරස්‍ර ආධාරකය සහිත ඍජු පිරමීඩයක් වීදුරුවලින් තනා ඇත. එහි ලම්බ උස 12 cm කි. එහි ඇති වීදුරු පරිමාව සොයන්න.

(4) සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් ඇති ඍජු පිරමීඩයක ආධාරකයේ පාදයක දිග $8\sqrt{3}$ cm වේ. එහි ලම්බ උස 9 cm වේ. පිරමීඩයේ පරිමාව සොයන්න.

(5) සමචතුරස්‍ර ආධාරකයක් ඇති පිරමීඩයක ලම්බ උස 12 cm එහි පරිමාව 256 cm^3 වේ. ආධාරකයේ පැත්තක දිග සොයන්න.

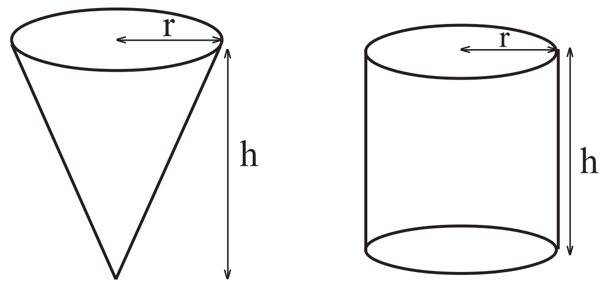
5.2 කේතුව



5.2 ක්‍රියාකාරකම

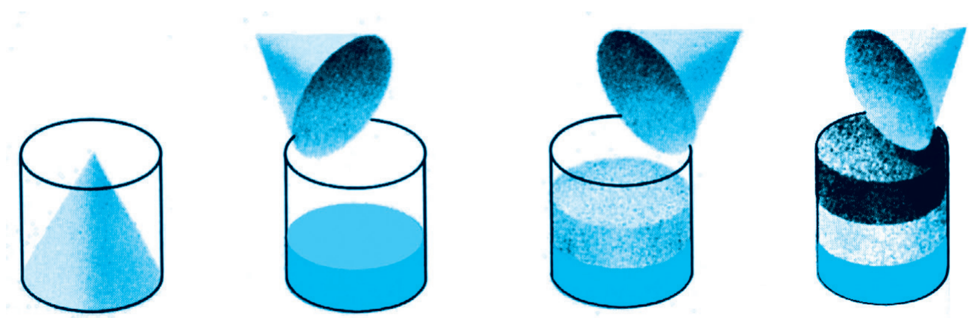
කැමති අරයක් ඇති ව පියන රහිත කේතු ආකාර කඩදාසි බඳුනක් පිළියෙල කරගන්න. එම අරයට සමාන වූ ආධාරකය සහිත සිලින්ඩරාකාර කඩදාසි බඳුනක් ඝන කඩදාසිවලින් සකස් කර ගන්න. සාදාගත් කේතු ආකාර භාජනය සිහින් වැලිවලින් පුරවන්න. එම වැලි ප්‍රමාණය සිලින්ඩරාකාර භාජනයට දමන්න. සිලින්ඩරාකාර භාජනය සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට කේතු ආකාර භාජනයෙන් කොපමණ ප්‍රමාණයක් දැමිය යුතු දැයි සොයන්න.

- කේතු ආකාර භාජනයෙන් තුන් වාරයක් වැලි දැමූ විට සිලින්ඩරාකාර භාජනය සම්පූර්ණයෙන් වැලිවලින් පිරෙන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.



කේතුවේ පරිමාව $\times 3$ = සිලින්ඩරයේ පරිමාව

කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3} \times$ කේතුවේ උස හා කේතුවේ ආධාරකයේ අරයට සමාන අරය සහිත සිලින්ඩරයක පරිමාව

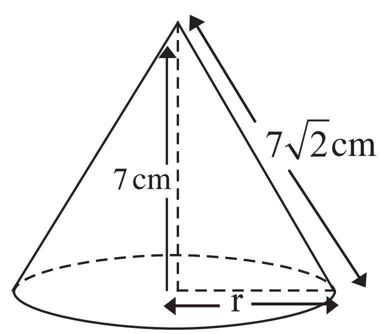


කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3} \times$ ආධාරක පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $\times$ උස

කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ (ඝන ඒකක)

නිදසුන 4.

ඇල උස $7\sqrt{2}$ cm වූ ද ලම්බ උස 7 cm වූ ද කේතුවක පරිමාව සොයන්න.

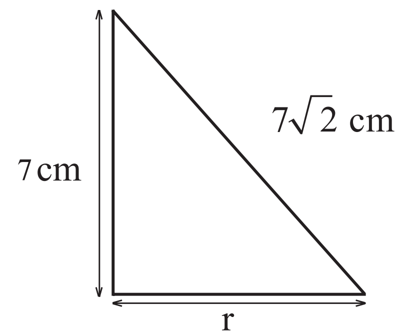


මෙහි දී පළමු ව කේතුවේ ආධාරකයේ අරය සෙවිය යුතු ය. ඒ සඳහා පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිත කරමු.

ඒ අනුව

$$(7\sqrt{2})^2 = 7^2 + r^2$$
$$98 = 49 + r^2$$
$$r^2 = 49$$
$$r = 7$$

අරය $= 7\text{ cm}$



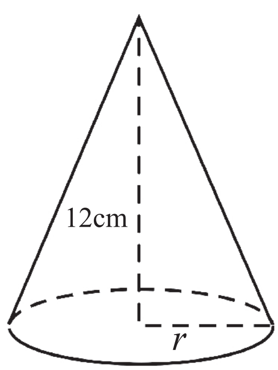
කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7\text{ cm}^3$$

$$= \underline{\underline{359.33\text{ cm}^3}}$$

නිදසුන 5.

කේතුවක ආධාරකයේ පරිධිය 22 cm වේ. ලම්බ උස 12 cm වේ. පරිමාව සොයන්න.



ආධාරකයේ පරිධිය $= 22\text{ cm}$

$$2\pi r = 22$$
$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$
$$r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22}$$
$$r = 3.5$$

අරය $= 3.5\text{ cm}$

කේතුවෙහි පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 12\text{ cm}^3$$

$$= \underline{\underline{154\text{ cm}^3}}$$

නිදසුන 6.

පරිමාව 1540 cm^3 වූ ද ලම්බ උස 10 cm වූ ද කේතුවක ආධාරකයේ අරය සොයන්න.

$$\text{කේතුවේ පරිමාව} = 1540\ cm^3$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 1540$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 10 = 1540$$

$$r^2 = \frac{1540 \times 7 \times 3}{22 \times 10}$$

$$r^2 = 49 \times 3$$

$$r = 7\sqrt{3}$$

$$\text{ආධාරකයේ අරය} = \underline{\underline{7\sqrt{3}\ cm}}$$

5.2 අභ්‍යාසය

(1) පතුලේ අරය 7cm හා ලම්බ උස 10 cm වූ කේතුවක පරිමාව සොයන්න.

(2) පතුලේ අරය $\frac{7}{2}$ cm හා ලම්බ උස 15cm වූ කේතුවක පරිමාව සොයන්න.

(3) කේතුවක පරිමාව 616 cm^3 කි. එහි ලම්බ උස 12 cm නම් ආධාරකයේ අරය සොයන්න.

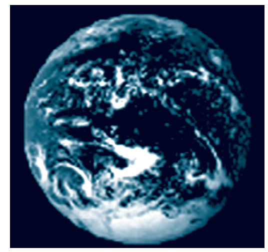
(4) ඝන කේතුවක ආධාරකයේ පරිධිය 66 cm නම් ආධාරකයේ අරය සොයන්න. කේතුවෙහි ලම්බ උස 9 cm නම් එහි පරිමාව සොයන්න.

(5) කේතුවක ආධාරකයේ පරිධිය 44 cm වේ. එහි ඇල උස $\sqrt{58}$ cm නම් පරිමාව සොයන්න.

(6). ආධාරකයේ අරය 21 cm හා ඇල උස 35 cm වූ කේතු ආකාර භාජනයකට සියුම් වැලි පිරවීමට අවශ්‍යව ඇත. එයට අල්ලන වැලි පරිමාව සොයන්න. (කේතුව සෑදී ඇති තහඩුවේ ඝනකම නොසලකන්න.)

5.3 ගෝලය

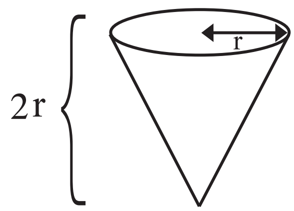
ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම යටතේ සාකච්ඡා කළ පරිදි ගෝලය හා පරිසිලින්ඩරය ඇසුරින් ගෝලයේ පරිමාව සොයා ගනිමු.



5.3 ක්‍රියාකාරකම

මේ සඳහා කුඩා ගෝලයක් ගෙන එහි විෂ්කම්භය සොයා එම විෂ්කම්භයට සමාන උසක් හා එහි අරයට සමාන අරයක් ඇති හා දෙපස ම විවෘත සිලින්ඩරයක් කඩදාසියෙන් තනා ගන්න. ගෝලය පරිසිලින්ඩරය තුළට සීරුවෙන් ඇතුළු කර ගත් විට රූපයේ ආකාරයට පෙනෙනු ඇත.

එම රූපයට අනුව ගෝලය පරිසිලින්ඩරය තුළ මුළු අවකාශය ම අයත් කර නොගන්නා බව පැහැදිලි වේ. ඒ අනුව ගෝලයේ පරිමාව සොයා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙමු.



රූපය 2

අඳුරු කළ කොටසේ පරිමාව සොයා ගැනීමට සිලින්ඩරයේ උසට හා ආධාරකයේ අරයට සමාන අරය ඇති කුහර කේතුවක් සාද ගනිමු. (රූපය 2) දැන් මෙම කුහර කේතුවට සියුම් වැලි පුරවා පරිසිලින්ඩරය තුළ ඇති ගෝලය මතට සීරුවෙන් දමා සම්පූර්ණයෙන් පිරුණු පසු ඝන කාඩ්බෝඩයක් ගෙන පරිසිලින්ඩරයේ ඉහළ පැත්ත ආවරණය වන සේ තබා එය සීරුවෙන් අනිත් පැත්ත හරවා එම පැත්තට ද කේතුවේ ඉතිරි වැලි දමන්න.

මෙසේ කේතුවේ වැලි ඉවර වනතුරු ඉහත ක්‍රියාකාරකම කීප විටක් කළ පසු පරිසිලින්ඩරය තුළ ගෝලය ඇති විට ගෝලයට අයත් නොවන අවකාශයේ පරිමාව, කේතුවේ පරිමාවට සමාන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. ඒ අනුව,

ගෝලයේ පරිමාව = පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාව - කේතුවේ පරිමාව

$$= \pi r^2 \times 2r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times 2r \quad (\, h = 2r \text{ නිසා })$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= 2\pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\pi r^3 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ඝන ඒකක}$$

$$\boxed{\text{ගෝලයේ පරිමාව} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ඝන ඒකක}}$$

නිදසුන 7.

අරය $7\sqrt{3}$ cm වූ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න. පිළිතුර කරණි ආකාරයෙන් දෙන්න. ($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න.)

ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3}\pi r^3$

ගෝලයේ අරය $= 7\sqrt{3}$ cm

ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{3} \times 7\sqrt{3} \times 7\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 \times 3\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

$$= 4 \times 22 \times 7 \times 7\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

$$= 88 \times 49\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

$$= \underline{\underline{4312\sqrt{3}\ \text{cm}^3}}$$

නිදසුන 8.

අරය 14 cm වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක පරිමාව ඝන සෙන්ටිමීටර්වලින් දශමස්ථාන දෙකකට සොයන්න. ($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න.)

අර්ධ ගෝලයේ අරය $= 14 \text{ cm}$

අර්ධ ගෝලයක පරිමාව $= \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{2}{3}\pi r^3$

අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව $= \dfrac{2}{3}\times\dfrac{22}{7}\times 14 \times 14 \times 14 \text{ cm}^3$

$= \underline{\underline{5749.33 \text{ cm}^3}}$

නිදසුන 9.

ගෝලයක පරිමාව 4851 cm^3 වේ. එහි අරය සොයන්න. ($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න.)

ගෝලයක පරිමාව $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4851$$

$$\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}r^3 = 4851$$

$$r^3 = 4851 \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{22}$$

$$r^3 = 441 \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{2}$$

$$r^3 = \frac{441 \times 21}{8}$$

$$r^3 = \left(\frac{21}{2}\right)^3$$

$$r = \frac{21}{2}$$

ගෝලයේ අරය $= \underline{\underline{10.5 \text{ cm}}}$

5.3 අභ්‍යාසය

(1) ගෝල කිහිපයක අරයන් දී ඇත. එක් එක් ගෝලයේ පරිමාව සොයන්න.

(i) 7 cm

(ii) 3.5 cm

(iii) 10.5 cm

(iv) 4.2 cm

(2) පරිමාව $38808\ cm^3$ වූ ගෝලයේ අරය සොයන්න.

(3) අරය $\frac{7}{2}$ cm වූ අර්ධ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.

(4) අර්ධ ගෝලයක පරිමාව $\frac{44\sqrt{3}}{7}\ cm^3$ වේ. එහි අරය සොයන්න.

(5) ඝන ගෝලයක අරය 10.5 cm වේ. එය තනා ඇති ලෝහයේ $1 cm^3$ ක ස්කන්ධය 12 g නම් ගෝලයේ ස්කන්ධය ග්‍රෑම්වලින් සොයන්න.

(6) වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $616\ cm^2$ වූ ගෝලයක අරය සොයන්න. එහි පරිමාව සොයන්න.

5.4 මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

(1) අරය r හා උස 2r වූ කේතුවක පරිමාව (V_1) සොයන්න.

අරය r වූ ගෝලයක පරිමාව (V_2) සොයන්න.

$\dfrac{V_1}{V_2}$ සොයන්න.

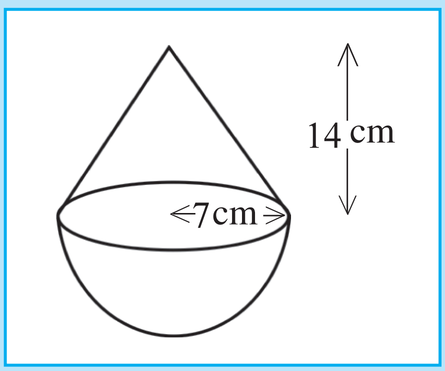
(2) ඇල උස හා ලම්බ උස අතර අනුපාතය $5:4$ වන කේතුවක ආධාරකයේ විෂ්කම්භය 12 cm ක් වේ.

(i) කේතුවේ ඇල උස සොයන්න.

(ii) කේතුවේ පරිමාව සොයන්න.

(3) ගෝලයේ වක්‍රපෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $154\ \text{cm}^2$ නම් එහි පරිමාව සොයන්න.

(4) අර්ධගෝලයකට කේතුවක් රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට සම්බන්ධ කර ඇත. එහි අරය 7 cm කේතුවේ උස 14 cm වේ.



(i) කේතුවේ පරිමාව සොයන්න.

(ii) අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව සොයන්න.

(iii) සංයෝජිත වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

(iv) කේතුවේ පරිමාව හා අර්ධ ගෝලයේ පරිමා අතර අනුපාතය සොයන්න.

(5) අරය 14 cm වූ අර්ධ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න. අර්ධ ගෝලය සෑදී ඇති ද්‍රව්‍යයේ $1\ \text{cm}^3$ ක පරිමාවක ස්කන්ධය 5g නම් එහි ස්කන්ධය සොයන්න.

06 ද්විපද ප්‍රකාශන

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- $(a+b)^3$ හි ප්‍රසාරණය
- $(a-b)^3$ හි ප්‍රසාරණය
- ඝනායිතවල ප්‍රසාරණය භාවිතය

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

6.1 $(a+b)^3$ හි ප්‍රසාරණය

පැත්තක දිග a cmවූ ඝනකයක හැඩය ඇති භාණ්ඩ ඇසුරුම් පෙට්ටියක දිග, පළල හා උස යන එක එකක් b cm ප්‍රමාණයකින් විශාල කරන ලදී. මෙසේ ප්‍රමාණය වෙනස් කිරීමෙන් පසු පරිමාව සොයමු.

මුලින් තිබූ පරිමාව $= a \times a \times a\,\text{cm}^3$

$= a^3\,\text{cm}^3$

ප්‍රමාණය විශාල කිරීමෙන් පසු පැත්තක දිග $= (a+b)$

ප්‍රමාණය විශාල කිරීමෙන් පසු පරිමාව $= (a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,\text{cm}^3$

$= (a+b)^3\,\text{cm}^3$

මෙය $(a+b)$ හි ඝනායිතයයි. එහි අගය ලබාගැනීමට $(a+b)^3$ ප්‍රසාරණය කළ යුතු ය.

$(a+b)$ හි තුන්වන බලයේ එනම් ඝනායිතයේ ප්‍රසාරණය ලබා ගනිමු.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)\,(a+b)\,(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

මේ අනුව,

$$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

6.2 $(a - b)^3$හි ප්‍රසාරණය

ඉහත ආකාරයට ම $(a-b)^3$ හි ප්‍රසාරණය ලබා ගනිමු.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b)\\ &= (a^2-2ab+b^2)(a-b)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

මේ අනුව $(y-n)^3 = y^3-3y^2n+3yn^2-n^3$ වේ.

6.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත වගුව පිටපත් කරගෙන සම්පූර්ණ කරන්න.

	$(a+b)^3$ ප්‍රසාරණය	$(a-b)^3$ හි ප්‍රසාරණය
පද ගණන		
a හි වැඩිම බලය		
b හි වැඩිම බලය		
a^3 හි සංගුණකය		
b^3 හි සංගුණකය		
a^2b හි සංගුණකය		
ab^2 හි සංගුණකය		

(2) හිස්තැන් පුරවන්න.

(i) $(a+b)^3 = a^3 + \ldots + \ldots + b^3$

(ii) $(x+y)^3 = \ldots + 3x^2y + 3xy^2 + \ldots$

(iii) $(p+q)^3 = \ldots + \ldots + 3pq^2 + \ldots$

(iv) $(m+n)^3 = \ldots + 3m^2n + \ldots + \ldots$

(v) $(l-m)^3 = l^3 - 3l^2m + \ldots - m^3$

(vi) $(x-y)^3 = \ldots - \ldots + 3xy^2 - \ldots$

(3) ප්‍රසාරණය කර ලියන්න.

(i) $(x+p)^3$ (ii) $(t+k)^3$ (iii) $(r+s)^3$

(iv) $(p-q)^3$ (v) $(c-d)^3$ (vi) $(u-v)^3$

(4) $(x+y)^3$ හි ප්‍රසාරණයේ y වෙනුවට $-y$ යෙදීමෙන් $(x-y)^3$ හි ප්‍රසාරණය ලබාගන්න.

(5) පැත්තක දිග p cm වූ ඝනකයක හැඩයට ඇති භාණ්ඩ ඇසුරුම් පෙට්ටියක දිග පළල හා උස එක එකක් q cm ප්‍රමාණයකින් විශාල කරන ලදී. මෙසේ වෙනස් කිරීම නිසා වැඩි වන පරිමාව සොයන්න.

6.3 $(a + b)^3$ හි හා $(a - b)^3$ හි ප්‍රසාරණයේ භාවිතය

ඉහත ඔබ හඳුනාගත් ප්‍රසාරණ භාවිත කර දෙන ලද ඕනෑම ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතය ප්‍රසාරණය කර දැක්විය හැකි ය.

නිදසුන 1.

$(x+2)^3$ ප්‍රසාරණය කරන්න.

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \times 2 + 3x \times 2^2 + 2^3$$
$$= \underline{\underline{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}}$$

නිදසුන 2.

$(a-3)^3$ ප්‍රසාරණය කරන්න.

$$(a-3)^3 = a^3 - 3a^2 \times 3 + 3 \times a \times 3^2 - 3^3$$
$$= \underline{\underline{a^3 - 9a^2 + 27a - 27}}$$

නිදසුන 3.

$(1-y)^3$ ප්‍රසාරණය කරන්න.

$$(1-y)^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times y + 3 \times 1\, y^2 - y^3$$
$$= \underline{\underline{1 - 3y + 3y^2 - y^3}}$$

ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතයේ ප්‍රසාරණය භාවිත කර ඇතැම් සංඛ්‍යාවල තුන්වන බලයේ එනම් ඝනායිතයේ අගය සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 4.

104^3 හි අගය සොයන්න.

$$104^3 = (100 + 4)^3$$
$$= 100^3 + 3 \times 100^2 \times 4 + 3 \times 100 \times 4^2 + 4^3$$
$$= 1\,000\,000 + 3 \times 10\,000 \times 4 + 3 \times 100 \times 16 + 64$$
$$= 1\,000\,000 + 120\,000 + 4\,800 + 64$$
$$= \underline{\underline{1\,124\,864}}$$

නිදසුන 5.

47^3 හි අගය සොයන්න.

$$47^3 = (50-3)^3$$
$$= 50^3 - 3 \times 50^2 \times 3 + 3 \times 50 \times 3^2 - 3^3$$
$$= 125\,000 - 3 \times 2\,500 \times 3 + 3 \times 50 \times 9 - 27$$
$$= 125000 - 22500 + 1350 - 27$$
$$= 12\,6350 - 22\,527$$
$$= \underline{\underline{103\,823}}$$

6.2 අභ්‍යාසය

(1) එක් එක් ඝනායිතය ප්‍රසාරණය කරන්න.

(i) $(x + 3)^3$ (ii) $(a - 2)^3$ (iii) $(b - 5)^3$

(iv) $(4 + t)^3$ (v) $(5 - y)^3$ (vi) $(1 + x)^3$

(vii) $(10 - r)^3$ (viii) $(1 - mn)^3$

(2) ප්‍රසාරණය කරන්න.

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (ii) $\left(n-\frac{1}{n}\right)^3$ iii $\left(1-\frac{1}{a}\right)^3$

(3) ද්විපද ප්‍රකාශනයක඲ ඝනායිතයේ ප්‍රසාරණය භාවිත කර අගය සොයන්න.

(i) 102^3

(ii) 95^3

(iii) 53^3

(iv) 96^3

(4) $a = 5$ ද, $b = 2$ ද නම්,

(i) $a - b$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $(a^2 + ab + b^2)$ හි අගය සොයන්න.

(iii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ හි අගය සොයන්න.

(iv) $a^3 - b^3$ හි අගය සොයන්න.

(v) (iv) හි අගය (iii) හි අගයට සමාන ද?

(vi) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ හි අගය සොයන්න.

(vii) $a^3 + b^3$ හි අගය සොයන්න.

(viii) (vi) හි අගය (vii) හි අගයට සමාන ද?

(5) (i) $(a + b) = 5$ හා $ab = 6$ නම් $a^3 + b^3$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $(a - b) = 6$ හා $ab = 7$ නම් $a^3 - b^3$ හි අගය සොයන්න.

(iii) $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$ නම් $x^3-\frac{1}{x^3}$ හි අගය සොයන්න.

ගවේශනයට...

- පහත දක්වෙන්නේ $(x+a)$ හි පිළිවෙළින් ගත් බල කිහිපයක ප්‍රසාරණය හා ඊට අනුරූප සංගුණක රටාවයි. එය අධ්‍යනය කරන්න.

$(x + a)$ හි බලවල ප්‍රසාරණය			සංගුණක රටාව
$(x + a)^0$	=	1	1
$(x + a)^1$	=	$x + a$	1 1
$(x + a)^2$	=	$x^2 + 2ax + a^2$	1 2 1
$(x + a)^3$	=	$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	1 3 3 1

ඉහත සංගුණක රටාවට පැස්කල් ත්‍රිකෝණය යැයි කියනු ලැබේ.

දකුණු පසින් දැක්වෙන සංගුණක රටාවේ ඊළඟ පියවර ලිවීමෙන්

(i) $(x + a)^4$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

(ii) $(x + a)^5$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

- පහත දක්වෙන සාධක සෙවීම අධ්‍යනය කරන්න.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a + b)^3 - 3ab\,(a + b) \\ &= (a + b)\,[(a + b)^2 - 3ab] \\ &= (a + b)\,[a^2 + 2ab + b^2 - 3ab] \\ &= (a + b)\,(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ භාවිත කර $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$ බව පෙන්විය හැකි ද?

07 වීජීය භාග

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- වීජීය භාග එකතු කිරීම
- වීජීය භාග අඩු කිරීම
- වීජීය භාග ගුණ කිරීම
- වීජීය භාග බෙදීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබාගත හැකි ය.

සාමාන්‍ය භාග එකතුකිරීමේ දී හා අඩු කිරීමේ දී එම භාගවල හරයයන්ගේ කුඩා ම පොදු ගුණාකාරය (කු.පො.ගු.), පොදු හරය ලෙස යොදගත් බව ඔබට මතක ඇත. විජීය භාග එකතු කිරීමේ දී හා අඩු කිරීමේ දී ද පොදු හරය ලෙස දෙන ලද භාගවල හරයයන්ගේ කුඩා ම පොදු ගුණාකාරය(කු.පො.ගු.) යොදගනු ලැබේ.

විජීය භාග එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම සඳහා අවශ්‍ය වන, විජීය ප්‍රකාශනවල කු.පො.ගු. සොයන ආකාරය විමසා බලමු.

7.1 වීජීය ප්‍රකාශන දෙකක කු.පො.ගු. සෙවීම

දෙන ලද වීජීය ප්‍රකාශන දෙකක කු.පො.ගු. සෙවීම සඳහා මුලින් ම එම වීජීය ප්‍රකාශන සාධකවලට වෙන් වන්නේ නම් ඒවා සාධකවලට වෙන් කරන්න. අනතුරු ව ඒවායේ පොදු සාධක හා ඉතිරි සාධකවල ගුණිතය ලබා ගන්න. මෙම ගුණිතය එම වීජීය ප්‍රකාශන දෙකේ කු.පො.ගු. වේ. විජීය ප්‍රකාශනවල පොදු සාධක නොමැති විට එම ප්‍රකාශන දෙකෙහි සාධකවල ගුණිතය එම වීජීයප්‍රකාශන දෙකෙහි කු. පො. ගු. වේ. වීජීය ප්‍රකාශන සාධකවලට වෙන් නොවන විට හා එම වීජීය ප්‍රකාශන දෙක එකිනෙකට වෙනස් වේ. එම ප්‍රකාශනවල ගුණිතය ප්‍රකාශන දෙකේ කු.පො.ගු. වේ.

නිදසුන 1.

x^2+x-2 හා x^2-4x+3 හි කු.පො.ගු. සොයන්න.

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ (දෙන ලද ප්‍රකාශන සාධකවලට වෙන් කිරීම.)

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

පොදු සාධකය $(x-1)$ වේ.

ඉතිරි සාධක $(x+2)$, හා $(x-3)$ වේ.

$\therefore$ කු.පො.ගු. $= \underline{\underline{(x-1)(x+2)(x-3)}}$

නිදසුන 2.

x^2+x-6 හා $(x-2)^2$ හි කු.පො.ගු. සොයන්න.

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$$

$$(x-2)^2=(x-2)(x-2)$$

පොදු සාධකය $(x-2)$ වේ.

ඉතිරි සාධක $(x+3)$ හා $(x-2)$ වේ.

$\therefore$ කු.පො.ගු. $= \underline{\underline{(x-2)(x+3)(x-2)}}$

7.2 විජීය ප්‍රකාශන තුනක කු.පො.ගු. සෙවීම

මුලින් ම දෙන ලද ප්‍රකාශන සාධකවලට වෙන් කරන්න. ඊළඟට ප්‍රකාශන තුනට ම පොදු සාධක ලබා ගන්න. අනතුරු ව ප්‍රකාශන දෙකකට පමණක් පොදු සාධක ලබා ගන්න. ඉන් පසු ඉතිරි සාධක ලබා ගන්න.

එම සාධක සියල්ලේ ම ගුණිතය දෙන ලද ප්‍රකාශනවල කු.පො.ගු. වේ.

නිදසුන 3.

x^2+2x, x^2+x-2 ,$(x+2)(x^2-2x+4)$ ප්‍රකාශනවල කු.පො.ගු. සොයන්න.

$$x^2+2x = x(x+2)$$

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$$

$(x+2)(x^2-2x+4)$ තව දුරටත් සාධක වෙන් කළ නොහැකි ය.

ප්‍රකාශන තුනට ම පොදු සාධකය $(x+2)$ වේ.

ප්‍රකාශන දෙකකට පමණක් පොදු සාධක නැත.

ඉතිරි සාධක $x,(x-1)$ හා (x^2-2x+4) වේ.

$\therefore$ කු.පො.ගු. $= \underline{\underline{x(x+2)(x-1)(x^2-2x+4)}}$

නිදසුන 4.

$(x-1)^2$, x^2-1 , x^2+4x+3 හි කු.පො.ගු. සොයන්න.

$$(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

$$x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$$

ප්‍රකාශන තුනට ම පොදු සාධක නැත.

ප්‍රකාශන දෙකකට පමණක් පොදු සාධක $(x-1)$ හා $(x+1)$

ඉතිරි සාධක $(x-1)$ හා $(x+3)$ වේ.

$\therefore$ කු.පො.ගු. $= (x-1)(x-1)(x+1)(x+3)$

$$= \underline{\underline{(x-1)^2(x+1)(x+3)}}$$

7.1 අභ්‍යාසය

කු.පො.ගු. සොයන්න.

(1). $x^2, \ x^2+3x$

(2). $a^2-a, \ a^3-a$

(3). $b^2-9, \ b^2+3b$

(4). $x^2+3x-10, \ x^2-3x+2$

(5). $(a-3)^2, \ a^2-2a-3$

(6). $x^2-2x-3, \ x^2-5x+6$

(7). $m^2+3m+2, \ m^2-m-6$

(8). $a^2+a-12, \ a^2+2a-8$

(9). $a^2-1, \ a-1, \ a^2+2a+1$

(10). $ab, \ a(a-b), \ b(a-b)$

(11). $3m^2-2m-5, \ 3m^2+2m-5, \ m^2-1$

(12). $2a^2+3a-2, \ 6a^2-a-1, \ 3a^2+7a+2$

(13). $(a-1)^2, \ (a-1), \ (a+1)$

(14). $(1+x), \ (1-x), \ (1-x^2)$

(15). $x^2+x-2, \ 2x^2+3x-2, \ 2x^2-3x+1$

7.3 වීජීය භාග එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

පහත දැක්වෙන වීජීය භාග දෙක එකතු කරන ආකාරය විමසා බලමු.

$$\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

මුලින්ම මෙම භාගවල හරයන් සාධකවලට වෙන් කරමු.

$$=\frac{3}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{(x-2)(x-2)}$$

මෙම හරයන්ගේ කු.පො.ගු. සොයමු.

පොදු සාධක $(x-2)$

ඉතිරි සාධක $(x+2),(x-2)$

$\therefore$ කු.පො.ගු. $=(x-2)(x+2)(x-2)$

මෙම කු.පො.ගු. හරය ලෙස ගෙන ඉහත භාග දෙකට තුල්‍ය භාග ගොඩනගමු.

$$=\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-2)}+\frac{1(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-2)}$$

භාග දෙකේ හරයන් සමාන නිසා එම හරය පොදු හරය ලෙස ගෙන සාමාන්‍ය භාග එකතු කරන ආකාරයට ම මෙම භාග එකතු කරමු.

$$=\frac{3x-6+x+2}{(x-2)(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{4x-4}{(x-2)(x+2)(x-2)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{4(x-1)}{(x-2)^2(x+2)}}}$$

නිදසුන 5.

සුළු කරන්න.

$$\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{x}{x^2+x-2}$$

පොදු සාධක	$(x-1)$
ඉතිරි සාධක	$(x-4),(x+2)$
$\therefore$ කු.පො.ගු.	$=(x-1)(x-4)(x+2)$

$$= \frac{1}{(x-4)(x-1)} + \frac{x}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-4)} + \frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-4)}$$ (තුල්‍ය භාග ගොඩනැගීම)

$$= \frac{x+2+x^2-4x}{(x-1)(x+2)(x-4)}$$

$$= \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)(x-4)}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-1)}}(x-2)}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+2)(x-4)}$$

(හරයට හා ලවයට $(x-1)$ පොදු නිසා $(x-1)$ න් බෙදීමෙන්)

$$= \frac{(x-2)}{(x+2)(x-4)}$$

නිදසුන 6.

සුළු කරන්න. $\frac{a-3}{a^2-3a-4} - \frac{a-1}{a^2-a-2}$

පොදු සාධකය $(a+1)$
ඉතිරි සාධක $(a-4), (a-2)$
කු.පො.ගු. $=(a+1)(a-2)(a-4)$

$$= \frac{a-3}{(a-4)(a+1)} - \frac{a-1}{(a-2)(a+1)}$$

$$= \frac{(a-3)(a-2)}{(a+1)(a-2)(a-4)} - \frac{(a-1)(a-4)}{(a+1)(a-2)(a-4)}$$

$$= \frac{a^2-5a+6-(a^2-5a+4)}{(a+1)(a-2)(a-4)}$$

$$= \frac{\cancel{a^2}-\cancel{5a}+6-\cancel{a^2}+\cancel{5a}-4}{(a+1)(a-2)(a-4)}$$

$$= \frac{2}{(a+1)(a-2)(a-4)}$$

නිදසුන 7. සුළු කරන්න.

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2}-\frac{x}{1-x^2}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}-\frac{x}{(1-x)(1+x)}-\frac{1}{(x-1)}$$

$(1 - x)$ යන්න -1 න් ගුණ කිරීමෙන් $x - 1$ බවට පත් කළ හැකි ය. ඒ අනුව $-\frac{x}{(1-x)(x+1)}$ හි ලවය -1න් ගුණ කළ විට $+\frac{x}{(x-1)(x+1)}$ වේ.

$$=\frac{(2x-1)}{(x-1)(x+2)}+\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)}$$

හරයන්ගේ කු.පො.ගු. $=(x-1)(x+1)(x+2)$

$$=\frac{(2x-1)(x+1)+x(x+2)-1(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+x-1+x^2+2x-x^2-3x-2}{(x-1)(x+2)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2-3}{(x-1)(x+2)(x+1)}$$

7. 2 අභ්‍යාසය

සුළු කරන්න.

(1). $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

(2). $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x^2-y^2}$

(3). $\frac{2a}{a^2-9}+\frac{1}{a+3}$

(4). $\frac{x-y}{x^2+xy}+\frac{2(x+3y)}{x^2-y^2}$

(5). $\frac{6x}{x^2-4x+3}+\frac{2}{4x-12}$

(6). $\frac{a-3}{a^2-3a-4}-\frac{a-1}{a^2-a-2}$

(7). $\frac{1}{p^2+3p-10}-\frac{1}{4-p^2}$

(8). $\frac{3y^2-8}{y^2-1}-\frac{5y+7}{y^2+2y+1}+\frac{2}{y-1}$

(9). $\dfrac{3}{x^2+13x+30}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

(10). $\dfrac{1}{3x^2-2x-1}-\dfrac{1}{3x^2+7x+2}-\dfrac{1}{6x^2-x-1}$

(11). $\dfrac{a-1}{a-2}-\dfrac{a+1}{a+2}-\dfrac{2a}{4-a^2}$

(12). $\dfrac{3}{y^2+y-2}-\dfrac{5}{2y^2+3y-2}-\dfrac{1}{2y^2-3y+1}$

7.4 වීජීය භාග ගුණකිරීම

වීජීය භාග ගුණ කිරීම සාමාන්‍ය භාග ගුණ කරන ආකාරයට ම කළ හැකි ය.

එක් එක් භාගයේ හරය හා ලවය සාධකවලට වෙන් කරගත හැකි නම් එසේ වෙන් කර, ඉන් පසු පොදු සාධකවලින් බෙදිය හැකි නම් එසේ කර අවසාන භාගය ලබා ගත හැකි ය.

මෙය නිදසුන් මඟින් අවබෝධ කර ගනිමු.

නිදසුන 8.

සුළු කරන්න.

$$\frac{x^2-4a^2}{ax+a^2}\times\frac{2a}{x^2-2ax}$$

$$=\frac{(x-2a)(x+2a)}{a(x+a)}\times\frac{2a}{x(x-2a)}$$ හරයන් හා ලවයන් සාධකවලට වෙන් කිරීම

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{(x-2a)}}(x+2a)}{\underset{1}{\cancel{a}}(x+a)}\times\frac{2\cancel{a}^{\,1}}{x\underset{1}{\cancel{(x-2a)}}}$$ a හා $(x-2a)$ හරයට හා ලවයට පොදු සාධක නිසා ඒවායින් බෙදීම.

$$=\underline{\underline{\frac{2(x+2a)}{x(x+a)}}}$$ ඉතිරි ලවයන් හා හරයන් වෙන වෙනම ගුණ කිරීම.

නිදසුන 9.

(සුළු කරන්න)

$$\frac{2x^2+5x+2}{x^2-9}\times\frac{x^2+3x}{2x^2+9x+4}$$

$$=\frac{(2x+1)(x+2)}{(x-3)(x+3)}\times\frac{x(x+3)}{(2x+1)(x+4)}$$ (සාධකවලට වෙන් කිරීම)

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{(2x+1)}}\,(x+2)}{(x-3)\,\underset{1}{\cancel{(x+3)}}}\times\frac{x\,\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(2x+1)}}\,(x+4)}$$ (පොදු සාධකවලින් බෙදීම)

$$=\underline{\underline{\frac{x(x+2)}{(x-3)(x+4)}}}$$ (ඉතිරි ලවයන් හා හරයන් වෙන වෙන ම ගුණ කිරීම)

7.5 වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් බෙදීම

සමාන්‍ය භාගයක් තවත් සාමාන්‍ය භාගයකින් බෙදීමේ දී එම දෙවන භාගයේ පරස්පරය යොද ගනිමින් බෙදීම ගුණ කිරීමක් බවට පත් කරගත් අයුරු ඔබට මතක ඇත. එසේ ම දෙන ලද වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් බෙදීමේ දී එම දෙවන භාගයේ පරස්පරයෙන් දෙන ලද භාගය ගුණ කිරීමෙන් බෙදීම ගුණ කිරීමක් බවට පත් කරගත හැක. අනතුරු ව එය ගුණ කිරීමක් සුළු කරන ආකාරයට සුළු කළ හැකි ය.
මෙය නිදසුන් මගින් පැහැදිලි කර ගනිමු.

නිදසුන 10.

සුළු කරන්න.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x-12}\div\frac{x^2-4}{x^2-7x+6}$$

$$=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x-12}\times\frac{x^2-7x+6}{x^2-4}$$ (බෙදීම ලකුණින් පසුව ඇති භාගයේ පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීම)

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}\,(x-1)}{\underset{1}{\cancel{(x-6)}}\,(x+2)}\times\frac{\overset{1}{\cancel{(x-6)}}\,(x-1)}{\underset{1}{\cancel{(x-2)}}\,(x+2)}$$ (සාධකවලට වෙන් කිරීම හා පොදු සාධකවලින් බෙදීම)

$$=\underline{\underline{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}=\left[\frac{x-1}{x+2}\right]^2}}$$ (ලවයන් වෙනමත් හරයන් වෙනමත් ගුණ කිරීම)

නිදසුන 11.

සුළු කරන්න.

$$\frac{x^2+x-12}{x^3-64} \div \frac{x^2-x-6}{x^2+4x+16}$$

$$\frac{x^2+x-12}{x^3-4^3} \times \frac{x^2+4x+16}{x^2-x-6}$$ (පරස්පරයෙන් ගුණ කිරිම)

(සාධකවලට වෙන් කිරීම හා පොදු සාධකවලින් බෙදීම)

$$= \frac{(x+4)\cancelto{1}{(x-3)}}{(x-4)\cancelto{1}{(x^2+4x+16)}} \times \frac{\cancelto{1}{(x^2+4x+16)}}{\cancelto{1}{(x-3)}(x+2)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(x+4)}{(x-4)(x+2)}}}$$

නිදසුන 12.

සුළු කරන්න.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4} \div \frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1} \times \frac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$$

$$= \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4} \times \frac{2x^2+3x+1}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$$ (බෙදීමේ ලකුණින් පසු ව ඇති භාගයේ පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීම)

$$= \frac{\cancelto{1}{(x-3)}\,\cancelto{1}{(x-2)}}{\cancelto{1}{(x+4)}\,\cancelto{1}{(x+1)}} \times \frac{\cancelto{1}{(2x+1)}\,\cancelto{1}{(x+1)}}{\cancelto{1}{(x-3)}\,\cancelto{1}{(x-1)}} \times \frac{\cancelto{1}{(x+4)}\,\cancelto{1}{(x-1)}}{\cancelto{1}{(2x+1)}\,\cancelto{1}{(x-2)}}$$ (සාධකවලට වෙන් කිරීම හා පොදු සාධකවලින් බෙදීම)

$$= \underline{\underline{1}}$$

ඉහත නිදසුනෙ හි පොදු සාධකවලින් බෙදීමේ දී අවසානයේ ලවයට 1 ලැබෙන අතර හරයට ද 1 ලැබේ. ඒ අනුව 1 , 1 න් බෙදූ විට අවසාන පිළිතුර ලෙස 1 ලැබේ.

7.3 අභ්‍යාස

පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශන සුළුකරන්න.

(1). $\dfrac{x}{2y+5}\times\dfrac{4y^2+10y}{3x^2}$

(2). $\dfrac{x^2-4}{x+1}\times\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$

(3). $\dfrac{a^2-121}{a^2-4}\div\dfrac{a+11}{a+2}$

(4). $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}\times\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

(5). $\dfrac{(p+2)(p^2-2p+4)}{p^2-9}\div\dfrac{p+2}{p^2+2p-3}$

(6). $\dfrac{a^2-4}{3ab}\times\dfrac{12b^2}{a^2+3a-10}$

(7). $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$

(8). $\dfrac{25a^2-b^2}{9a^2x^2-4x^2}\times\dfrac{x(3a+2)}{5a+b}$

(9). $\dfrac{x^2-5x}{x^2-4x-5}\div\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2+2x+1}$

(10). $\dfrac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\div\dfrac{ab+3}{2a+1}$

7.4 මිශ්‍ර අභ්‍යාස

සුළු කරන්න.

(1). $\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{1}{x^2-a^2}$

(2). $\dfrac{x+4}{x^2+3x-10}-\dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$

(3). $\dfrac{a}{3+a}-\dfrac{a}{a-3}+\dfrac{2a^2}{9-a^2}$

(4). $\dfrac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45}\div\dfrac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$

(5). $\dfrac{b^2-8b}{b^2-4b-5}\times\dfrac{b^2+2b+1}{b^3-8b^2}\div\dfrac{b^2+2b-3}{b-5}$

(6). $\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x^2-4}+\dfrac{3}{(x+2)^2}$

(7). $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}$

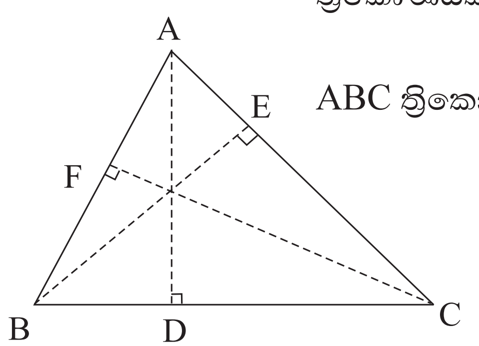
08 සමාන්තර රේඛා අතර තල රූපවල වර්ගඵලය

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- එක ම ආධාරකය හා එක ම සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව
- එකම ආධාරකය හා එක ම සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව
- එකම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩක් බව
- ආධාරකය එකම රේඛාවේ පිහිටි පොදු ශීර්ෂයක් ඇති ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල ආධාරක අතර අනුපාතයට සමාන බව

පිළිබඳ අවබෝධයක් ලබාගත හැකි ය.

ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය සහ සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය පිළිබඳ ව පහත සඳහන් කරුණු පෙර පන්තිවල දී ඉදිරිපත් කර ඇත. ඒවා නැවත මතකයට නංවා ගනිමු.



ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ ආධාරකය $\times$ උච්චය.

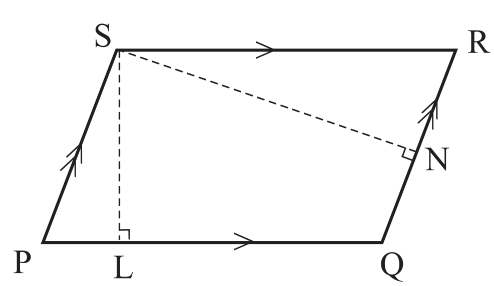
ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ හෝ

$= \frac{1}{2} \times AC \times BE$ හෝ

$= \frac{1}{2} \times AB \times CF$ හෝ වේ.

සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය $=$ ආධාරකය $\times$ උච්චය

PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= PQ \times SL$ හෝ

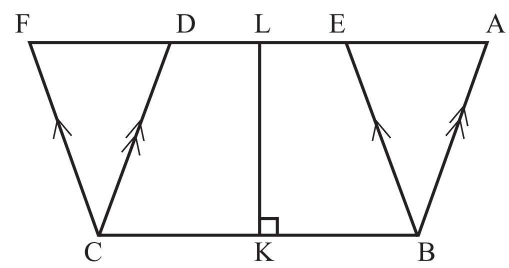


$= QR \times SN$ හෝ වේ.

8.1 සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල අතර සම්බන්ධතා

8.1 ක්‍රියාකාරකම

පහත වගන්ති පිටපත් කරගෙන හිස්තැන් පුරවන්න.



(1) රූපයේ --------- හා --------- යනුවෙන් සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් ඇත.

(2) එම සමාන්තරාස්‍ර දෙකට ම පොදු ආධාරකයක් ඇත. එය------ වේ.

(3) KL එම සමාන්තරාස්‍ර දෙකට ම පොදු--------- වේ.

(4) ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= CB \times$ -------------

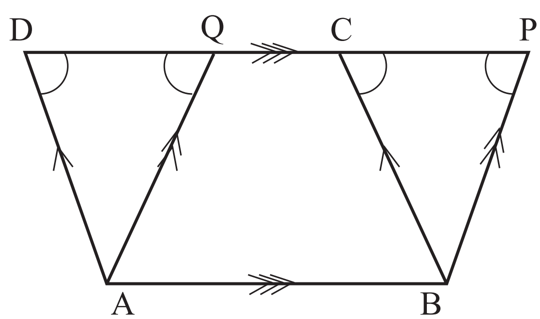
(5) CBEF සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = ------ $\times$ ---------

(6) ඉහත (4) හා (5) අනුව ABCD හා CBEF සමාන්තරාස්‍ර දෙකේ වර්ගඵලයන් ------------- වේ.

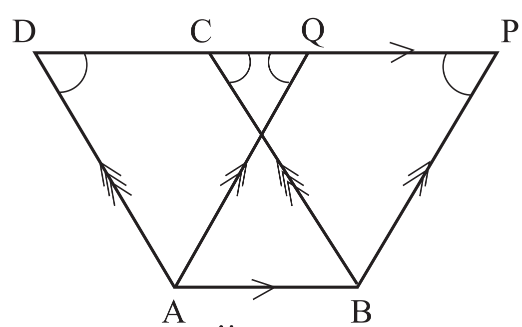
මෙම ක්‍රියාකාරකම අවසානයේ දී ඔබට ලැබී ඇත්තේ වැදගත් සම්බන්ධයකි. එය ජ්‍යාමිතියේ ප්‍රමේයයක් ලෙස ද මෙසේ ඉදිරිපත් කර ඇත.

ප්‍රමේයය :	එකම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන ආකාරය අධ්‍යයනය කරන්න.



i රූපය



ii රූපය

දත්තය : ABCD හා ABPQ සමාන්තරාස්‍ර දෙක එක ම AB ආධාරකයක් මත හා AB , DP සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටා ඇත.

සා.ක.යු : ABCD හා ABPQ සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව.

සාධනය : ADQ හා BCP ත්‍රිකෝණවල

$A\hat{D}Q = B\hat{C}P$ (අනුරූප කෝණ AD // BC)

$A\hat{Q}D = B\hat{P}C$ (අනුරූප කෝණ AQ // BP)

AD = BC (ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද)

$\therefore$ ADQ $\triangle \equiv$ BCP $\triangle$ (කෝ . කෝ . පා .)

$\therefore$ ADQ $\triangle$ = BCP $\triangle$ (වර්ගඵලයෙන්)

i රූපය අනුව ABCQ චතුරස්‍රයට ඉහත ත්‍රිකෝණ එකතු කළ විට

ABCQ + ADQ $\triangle$ = ABCQ + BCP $\triangle$

ABCD = ABPQ

i රූපය හා ii රූපය අනුව

ABPD චතුරස්‍රයෙන් ඉහත එක් එක් ත්‍රිකෝණ අඩු කළ විට

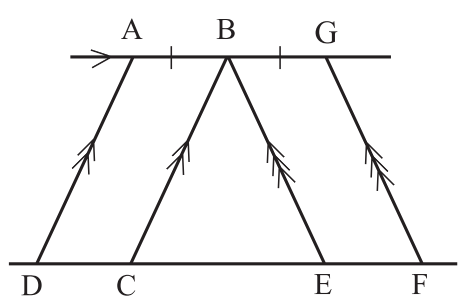
ABPD - ADQ = ABPD - BCP $\triangle$

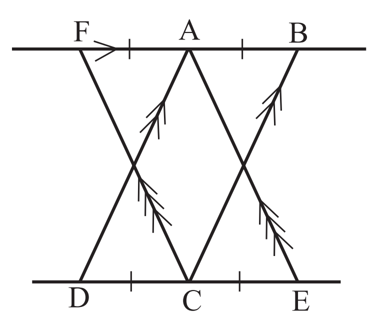
$\therefore$ ABPQ = ABCD

$\therefore$ ABCD හා ABPQ සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

විමසුම

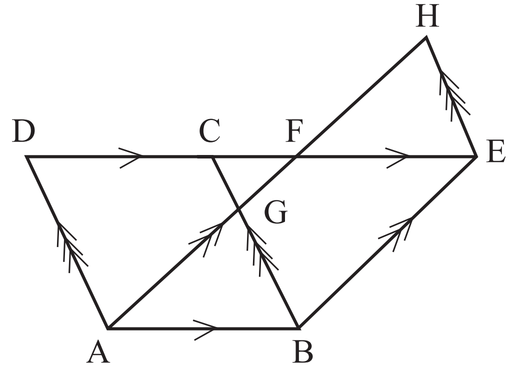
එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටන සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් වර්ගඵලයෙන් සමාන වන්නේ ඒවා එක ම ආධාරකයක් මත පිහිටා ඇත්නම් පමණ ද?





නිදසුන 1.

රූපයේ DCFE සරල රේඛාවකි. ABCD හා ABEF සමාන්තරාස්‍ර වේ. දික් කල AF රේඛාව H හි දී හමු වන සේ BC ට සමාන්තරව EH ඇඳ තිබේ. BC හා AH රේඛා G හි දී ඡේදනය වේ. ABCD හා BGHE සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.



දත්තය : ABCD හා ABEF සමාන්තරාස්‍ර දෙක එක ම AB ආධාරකයක් මත හා AB, DE සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටා ඇත.

සා. ක. යු. : ABCD හා BGHE වර්ගඵලයෙන් සමාන බව

සාධනය : ABCD හා ABEF සමාන්තරාස්‍ර වේ. (දත්තය)

∴ ABCD = ABEF (AB එක ම ආධාරකය හා AB // DE නිසා)

BGHE චතුරස්‍රයේ

BE // GH (BE // AF නිසා)

BG // EH (BC // EH බව දී ඇති නිසා)

∴ BGHE සමාන්තරාස්‍රක් වේ.

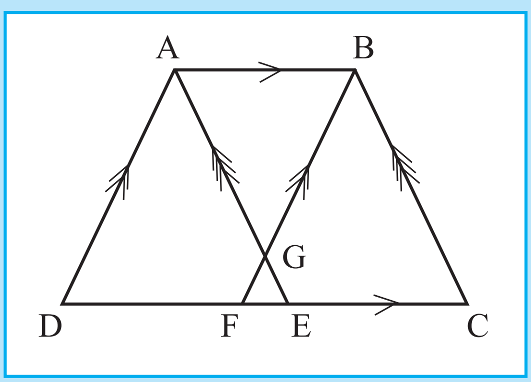
BGHE = ABEF (BE එකම ආධාරකය හා BE // AH නිසා)

ABCD = ABEF (ඔප්පු කර ඇත.)

∴ ABCD හා BGHE වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

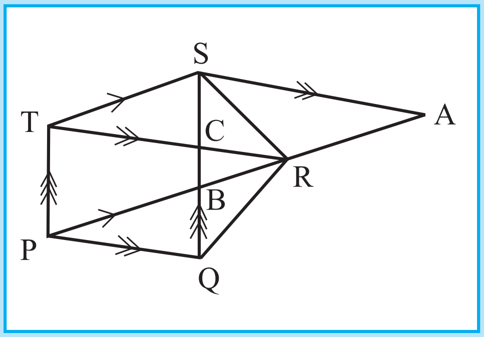
8.1 අභ්‍යාසය

(1)



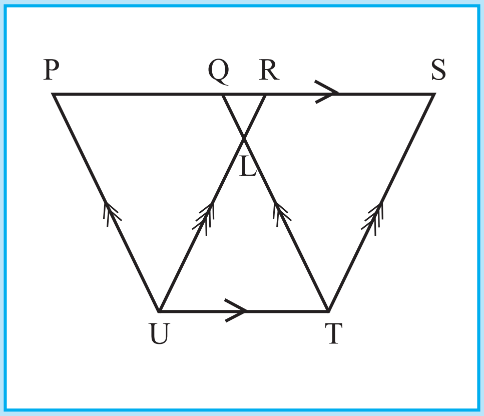
මෙම රූපයේ සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් නම් කරන්න. එම සමාන්තරාස්‍ර දෙක වර්ගඵලයෙන් සමාන ද?

(2)



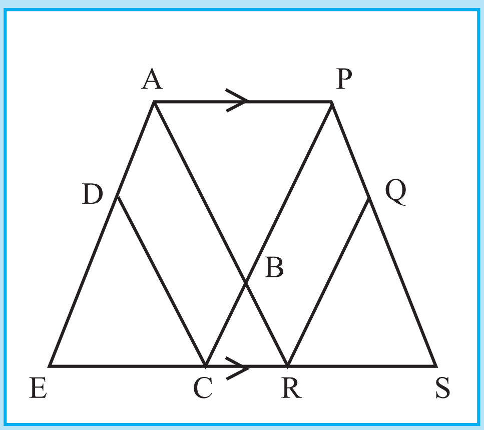
රූපයේ දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් PBST සමාන්තරාස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන වන සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් නම් කරන්න.

(3)



රූපයේ PS // UT ද PU // QT ද RU // ST ද වේ. රූපය පිටපත් කරගෙන දී ඇති දත්ත ලකුණු කරන්න. PQLU හා RSTL චතුරස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව පෙන්වා දෙන්න.

(4)



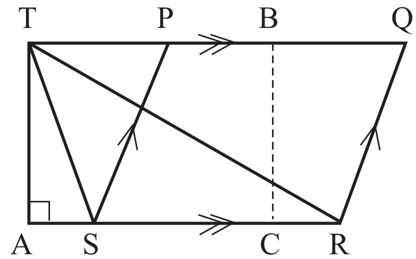
රූපයේ ABCD හා PQRB සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. ES // AP වේ. ADE , PBC , ABR හා PQS සරල රේඛා වේ.

(i) රූපය පිටපත් කර ගෙන දී ඇති දත්ත ලකුණු කරන්න.
(ii) APCE හා APSR වර්ගඵලයෙන් සමාන බවත්
(iii) CDE $\triangle \equiv$ QRS $\triangle$ බවත්
(iv) ABCD හා PQRB සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බවත් සාධනය කරන්න.

8.2 එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර හා එක ම ආධාරකය මත පිහිටි සමාන්තරාස්‍රයක හා ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵල අතර සම්බන්ධතා

8.2 ක්‍රියාකාරකම

හිස්තැන් පුරවන්න.



(1) රූපයේ SRT ත්‍රිකෝණයකි.
PQRS ------------------ කි.

(2) එම ත්‍රිකෝණයට හා සමාන්තරාස්‍රයට පොදු ආධාරකයක් ඇත.
එය -------- වේ.

(3) SRT ත්‍රිකෝණයේ උච්චය TA ද, PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ උච්චය -------- ද වේ.

(4) SRT ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times SR \times$ --------

(5) PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ -------- $\times BC$

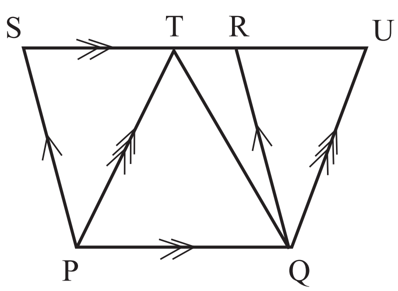
(6) TQ // AR නිසා TA $=$ -------- වේ. එවිට
PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= SR \times TA$
SRT ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times SR \times$ --------

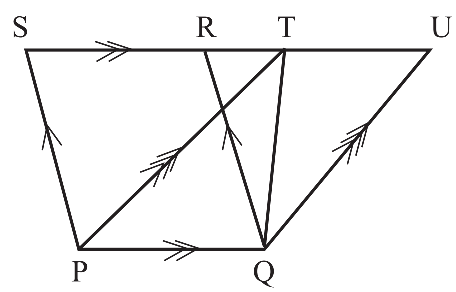
(7) ඉහත (6) අනුව SRT ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් -------- වේ.

මෙම ක්‍රියාකාරකම අවසානයේ ඔබට ලැබී ඇති සම්බන්ධය ද ජ්‍යාමිතියේ ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කර ඇත.

ප්‍රමේයය	ත්‍රිකෝණයක් ද, සමාන්තරාස්‍රයක් ද එක ම ආධාරකයක් මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටා ඇත් නම් එම ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකට සමාන වේ.

මෙම ප්‍රමේයයෙන් දැක්වෙන සම්බන්ධය ඔබට තවදුරටත් තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන එහි විධිමත් සාධනය අධ්‍යයනය කරන්න.





දත්තය : PQRS සමාන්තරාස්‍රය හා PQT ත්‍රිකෝණය එක ම PQ ආධාරකය මත හා PQ , SR සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටා ඇත.

සා.ක.යු. : PQT $\triangle$ හි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය බව

නිර්මාණය : PQUT සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කිරීම.

සාධනය :

$$PQT\triangle = \frac{1}{2}\, PQUT$$

(TQ යනු PQUT සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණයක් නිසා)

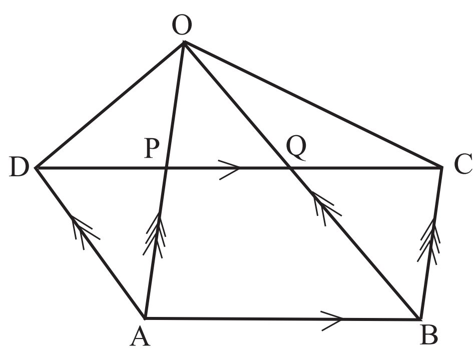
නමුත් PQRS = PQUT (PQ එක ම ආධාරකය හා PQ // SU නිසා)

$$\underline{\underline{PQT\Delta = \frac{1}{2}\, PQRS \text{ (වර්ගඵලයෙන්)}}}$$

විමසුම	එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර ත්‍රිකෝණයක් හා සමාන්තරාස්‍රයක් පිහිටා ඇති විට එම ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකට සමාන වීම සඳහා එම ත්‍රිකෝණය හා සමාන්තරාස්‍රය එක ම ආධාරකය මත පිහිටා තිබිය යුතු ම ද?

නිදසුන 2.

ABCD ත්‍රපීසියමේ AB // DC ද DC > AB ද වේ. BC ට සමාන්තර ව A හරහා A හි දී ඇඳි රේඛාවත් AD ට සමාන්තර ව B හරහා B හි දී ඇඳි රේඛාවත් O හි දී හමු වේ. ADO $\triangle$ ත් BCO $\triangle$ ත් වර්ගඵලයෙන් සමාන වන බව සාධනය කරන්න.



දත්තය : ABCD ත්‍රපීසියමේ AB // DC ද DC > AB ද වේ. BC ට සමාන්තර ව A හරහා ඇඳි රේඛාවත් AD ට සමාන්තර ව B හරහා ඇඳි රේඛාවත් O හි දී හමු වේ.

AO හා BO මගින් DC ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q වේ.

සා.ක.යු. : ADO △හි වර්ගඵලය = BCO △ හි වර්ගඵලය බව.

සාධනය : ABQD චතුරස්‍රයේ

AB // DQ (AB // DC නිසා)

AD // BQ (AD // BO නිසා)

∴ ABQD සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

එසේම ABCP ද සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

∴ ABQD = ABCP (එක ම AB ආධාරකයක් හා AB // DC නිසා)

එවිට $\frac{1}{2}$ ABQD = $\frac{1}{2}$ ABCP

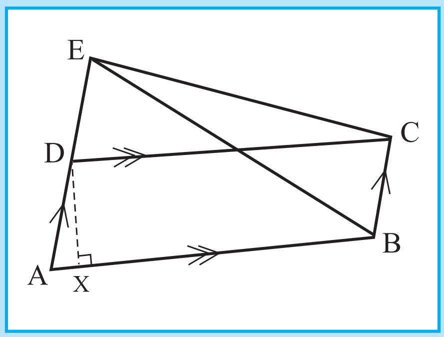
එහෙත් ADO △ = $\frac{1}{2}$ ABQD (එක ම AD ආධාරකය හා AD // BO නිසා)

BCO △ = $\frac{1}{2}$ ABCP (එක ම BC ආධාරකය හා BC // AO නිසා)

∴ ADO △ = BCO △ (වර්ගඵලයෙන්)

8.2 අභ්‍යාසය

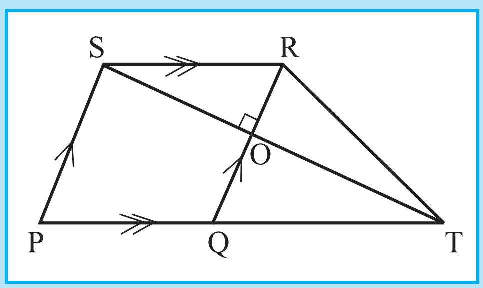
(1) ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ AD පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත. AB = 7.5 cm ද , DX = 6 cm , DX ⊥ AB ද වේ.



(i) ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) BCE ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(2) PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ QR ට ලම්බ ව S සිට ඇඳි රේඛාවක් දික් කළ PQ පාදය T හි දී හමුවේ. ST හා QR රේඛා O හි දි ඡේදනය වේ.

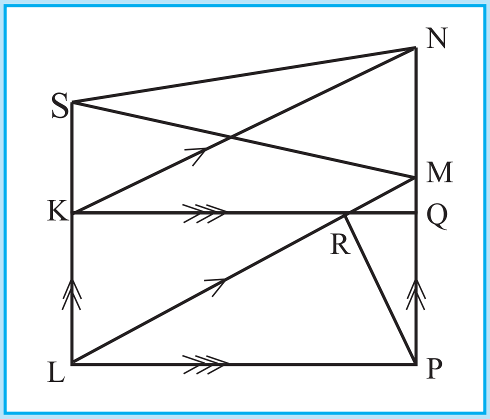


(i) RST ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයත් PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයත් අතර සම්බන්ධය ලියා හේතු දක්වන්න.

(ii) PS = 6 cm හා SO = 8 cm නම් RST ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(3) $AB = 5cm$, $A\hat{B}C = 105^0$, $BC = 4.5$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. $CD = 3$ cm වන සේ ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක වර්ගඵලයක් ඇති ABDE සමාන්තරාස්‍රය නිර්මාණය කරන්න.

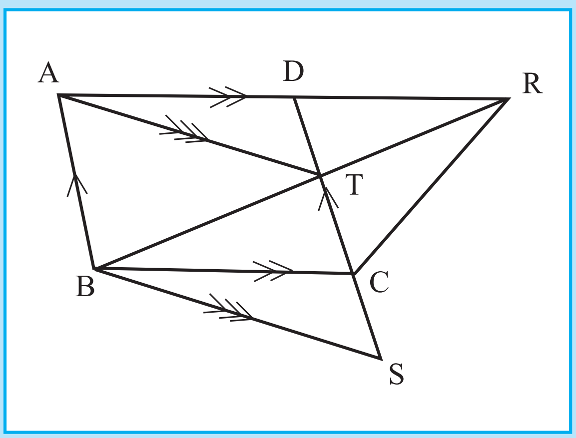
(4) රූපයේ KLMN හා KLPQ සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. PQMN සරල රේඛාවකි. LM හා KQ රේඛා R හි දී ඡේදනය වේ. LK පාදය S තෙක් දිගු කර ඇත.



(i) රූපය පිටපත් කරගෙන දී ඇති දත්ත එහි ලකුණු කරන්න.

(ii) SMN $\triangle$ හි වර්ගඵලය =LPR $\triangle$ හි වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.

(5)



රූපයේ ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ DC පාදය මත T පිහිටා ඇත. දික් කළ AD හා BT රේඛා R හි දී හමු වේ. දික් කළ DC රේඛාව S හි දී හමු වන සේ AT ට සමාන්තර ව BS ඇඳ තිබේ.

(i) රූපය පිටපත් කර ගෙන දී ඇති දත්ත ලකුණු කරන්න.

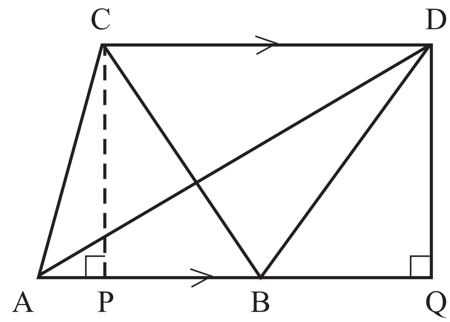
(ii) BCR $\triangle$ හා ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵල අතර සම්බන්ධය ලියන්න. හේතු දක්වන්න.

(iii) BSC $\triangle$ හි වර්ගඵලය = CTR $\triangle$ හි වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.

8.3 එක ම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ දෙකක වර්ගඵල අතර සම්බන්ධතාව

8.3 ක්‍රියාකාරකම.

හිස්තැන් පුරවන්න.



(1) රූපයේ ABC ත්‍රිකෝණයට හා ABD ත්‍රිකෝණයට පොදු ආධාරකයක් ඇත. එය --------- වේ.

(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ උච්චය -------- ද, ABD ත්‍රිකෝණයේ උච්චය DQ ද වේ.

(3) AQ // CD නිසා CP හා DQ උච්චයන් -------- වේ.

(4) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times AB \times$ ---------

(5) ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ ------- $\times DQ$

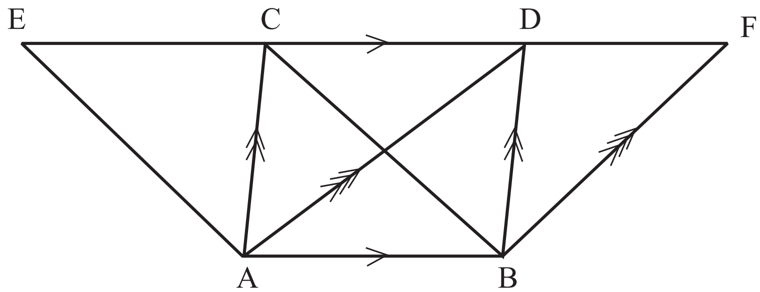
(6) $CP = DQ$ නිසා $\frac{1}{2} \times AB \times$ ------- $= \frac{1}{2} \times$ ------ $\times DQ$ වේ.

(7) ඒ අනුව ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයත් ------ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයත් ------- වේ.

මෙම ක්‍රියාකාරකම අවසානයේ ඔබට ලැබී ඇති සම්බන්ධය ද ජ්‍යාමිතියේ වැදගත් ප්‍රමේයයකි. එය පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය : එක ම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

මෙම ප්‍රමේයයේ විධිමත් සාධනය පහත දැක්වේ.



දත්තය : ABC හා ABD ත්‍රිකෝණ එක ම AB ආධාරකය මත හා AB , CD සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර පිහිටා ඇත.

සා.ක.යු. : ABC $\triangle$ හි වර්ගඵලය = ABD $\triangle$ හි වර්ගඵලය බව

නිර්මාණය : ABCE හා ABFD සමාන්තරාස්‍ර සම්පූර්ණ කිරීම.

සාධනය : ABCE = ABFD (එක ම AB ආධාරකය හා AB //EF නිසා)

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \text{ ABCE} = \frac{1}{2} \text{ ABFD}$$

එහෙත් ABC $\triangle = \frac{1}{2}$ ABCE (එකම AB ආධාරකය හා AB // EF නිසා)

එසේම ABD $\triangle = \frac{1}{2}$ ABFD

$\therefore$ ABC $\triangle$ = ABD $\triangle$ (වර්ගඵලයෙන්)

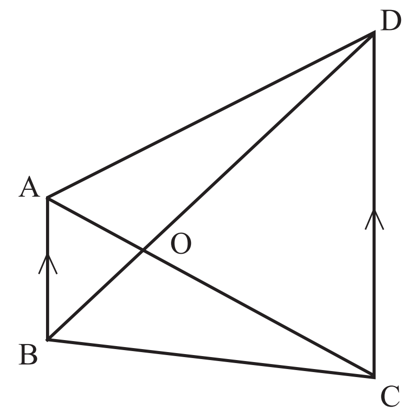
> **විමසුම** : එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටා ඇති ත්‍රිකෝණ දෙකක් වර්ගඵලයෙන් සමාන වන්නේ ඒවා එක ම ආධාරකය මත පිහිටා ඇත්නම් පමණක් ද?

මෙම පාඩමේ මුල සිට මේ වන තෙක් විමසුම් තුනක් ඉදිරිපත් කර තිබුණි. ඒවායින් පහත සඳහන් නිගමනවලට එළඹීමට හැකි වී දැයි බලන්න.

1. එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර සමාන ආධාරක මත පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.
2. එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර සමාන ආධාරක මත ත්‍රිකෝණයක් ද සමාන්තරාස්‍රයක් ද පිහිටා ඇත්නම් එම ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකට සමාන වේ.
3. එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර සමාන ආධාරක මත පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

නිදසුන 3.

රූපයේ AB // DC වේ.



(i) ABC ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) ACD ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

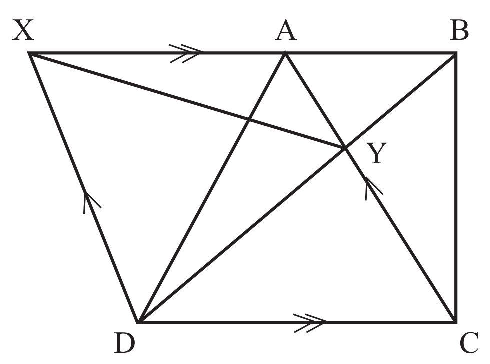
(iii) BOC $\triangle$ හි වර්ගඵලය = AOD $\triangle$ හි වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.

විසඳුම

(i) ABC$\triangle$ = ABD $\triangle$ (AB එක ම ආධාරකය හා AB//DC නිසා)
(ii) ACD $\triangle$ = BCD $\triangle$ (DC එක ම ආධාරකය හා AB//DC නිසා)
(iii) ABC$\triangle$ = ABD $\triangle$ (ඉහත සාධනය කර ඇත.)

$\therefore$ ABC$\triangle$ – AOB$\triangle$ = ABD $\triangle$ – AOB$\triangle$
$\therefore$ BOC$\triangle$ = AOD$\triangle$ (වර්ගඵලයෙන්)

නිදසුන 4.



රූපයේ ABCD ත්‍රපීසියමේ AB//DC වේ. දික්කළ BA පාදය X හි දී හමු වන සේ CA ට // ව DX ඇඳ තිබේ. AC හා BD විකර්ණ Y හි දි ඡේදනය වේ.

(i) BYX $\triangle$ = ABD$\triangle$ බව සාධනය කරන්න.
(ii) BYX $\triangle$ = ABC$\triangle$ බව සාධනය කරන්න.

දත්තය : ABCD ත්‍රපීසියමේ AB // DC වේ. දික් කළ BA පාදය X හි දී හමු වන සේ CA ට // ව DX ඇඳ තිබේ. AC හා BD විකර්ණ Y හි දී ඡේදනය වේ.

සා.ක.යු. : (i) BYX $\triangle$ = ABD$\triangle$ බව
(ii) BYX $\triangle$ = ABC$\triangle$ බව

සාධනය

(i) $AYX\ \triangle = AYD\triangle$ (AY එක ම ආධාරකය හා AY// XD නිසා)

$\therefore AYX\triangle + ABY\ \triangle = AYD\triangle + ABY\ \triangle$

$\therefore \underline{\underline{BYX\ \triangle = ABD\ \triangle}}$

(ii) $BYX\ \triangle = ABD\triangle$ (සාධනය කර ඇත.)

$ABC\ \triangle = ABD\ \triangle$ (AB එක ම ආධාරකය හා AB//DC නිසා)

$\therefore \underline{\underline{BYX\ \triangle = ABC\ \triangle}}$

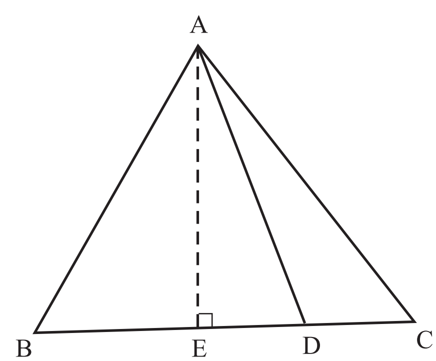
ඉහත ප්‍රමේයය යටතේ වර්ගඵලයෙන් සමාන වන ත්‍රිකෝණ දෙකක

1. එක ම ආධාරකය නැත හොත් සමාන ආධාරක, සමාන්තර රේඛා දෙකෙන් එකක් මත තිබිය යුතු ය.
2. එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ ඉතිරි ශීර්ෂය ආධාරකයට සමාන්තර වූ රේඛාව මත තිබිය යුතු ය.

8.4 එක ම උච්චය සහිත ත්‍රිකෝණ දෙකක වර්ගඵල අතර සම්බන්ධයක්

8.4 ක්‍රියාකාරකම

හිස්තැන් පුරවන්න.



(1) රූපයේ දක්වෙන ABD හා ADC ත්‍රිකෝණ දෙකට ම එක ම උච්චයක් ඇත. එය -------- වේ.

(2) ABD හා ADC ත්‍රිකෝණ දෙකේ ම ආධාරක එක ම -------- සරල රේඛාව මත පිහිටා ඇත.

(3) ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times BD \times$ --------

(4) ADC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ ------- $\times AE$

(5) ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ADC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයෙන් බෙදූ විට

$$\frac{\text{ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය}}{\text{ADC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය}} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times \text{------}}{\frac{1}{2} \times \text{-------} \times AE}$$

$$\therefore \frac{ABD\ \Delta}{ADC\ \Delta} = \frac{BD}{---}$$

මේ අනුව ABD$\triangle$: ADC$\triangle$ = BD : -------

මෙයින් කියවෙන්නේ ABD හා ADC ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ ආධාරකවල දිගට සමානුපාතික වන බවයි. මෙම සම්බන්ධය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කර ඇත.

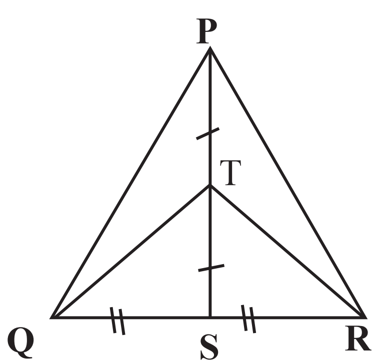
ප්‍රමේයය : ආධාරක එක ම සරල රේඛාවක පිහිටි පොදු ශීර්ෂයක් ඇති ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල ආධාරකවල දිගට සමානුපාතික වේ.

ඉහත ලක්ෂණ සහිත ත්‍රිකෝණ දෙකක ආධාරක සමාන වුවවොත් එම ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල සමාන වේ. මේ අනුව

සමාන ආධාරක සහ එක ම උච්චය සහිත ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

නිදසුන 5.

PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S වේ. PS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. PQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 60 cm^2 නම් PQT ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



QS = SR නිසා

PQS $\triangle$ ව.ඵ = PSR$\triangle$ ව.ඵ

$\therefore$ PQS $\triangle = \frac{60}{2}$

$= 30\ cm^2$

PT = TS නිසා

PQT$\triangle$ ව.ඵ = TQS$\triangle$ ව.ඵ

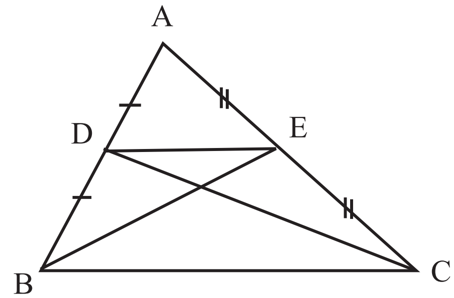
$\therefore$PQT $\triangle$ ව.ඵ $= \frac{30}{2}\ cm^2 = \underline{\underline{15\ cm^2}}$

නිදසුන 6.

ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D හා E වේ.

(i) $BCD \triangle = BCE \triangle$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) එනයින් $DE \parallel BC$ බව පෙන්වා දෙන්න.



දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D හා E වේ.

සා.ක.යු. : (i) $BCD \triangle = BCE \triangle$ බව

(ii) $DE \parallel BC$ බව

සාධනය :

(i) $BD = AD$ (දත්තය)

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore BCD \triangle = \frac{1}{2} ABC \triangle$$ (වර්ගඵල ආධාරකවලට සමානුපාතික නිසා)

එසේම $BCE \triangle = \frac{1}{2} ABC \triangle$

$$\underline{\underline{\therefore BCD \triangle = BCE \triangle}}$$

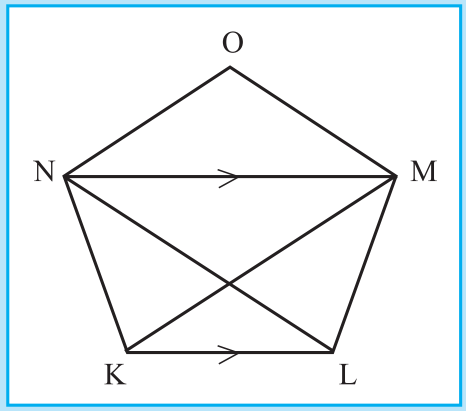
(ii) $BCD \triangle = BCE \triangle$ (සාධිතයි.)

$BCD \triangle$ හා $BCE \triangle$ එක ම BC ආධාරකය මත පිහිටා ඇත.

$$\underline{\underline{\therefore DE \parallel BC}}$$

8.3 අභ්‍යාසය

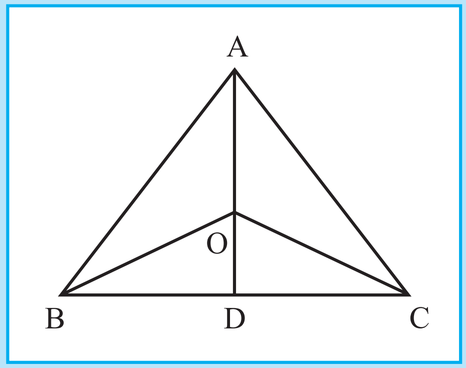
(1) රූපයේ KLMN ත්‍රපීසියමේ KL//MN වේ.



(i) KLN ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

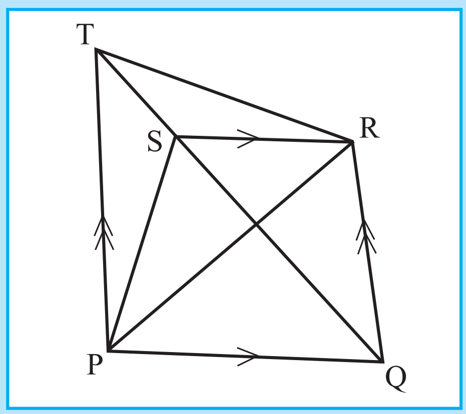
(ii) ඒ නයින් LMON හා KMON චතුරස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව පෙන්වා දෙන්න.

(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. AD මධ්‍යස්ථය මත O ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත.
AOB△ හි වර්ගඵලය = AOC△ හි වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.



(3) රූපයේ PQRS චතුරස්‍රයේ PQ//SR වේ. QR ට සමාන්තරව P සිට ඇඳි රේඛාවට දික් කළ QS විකර්ණය T හි දී හමු වේ.

PQS△ හි වර්ගඵලය = TQR△ හි වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.



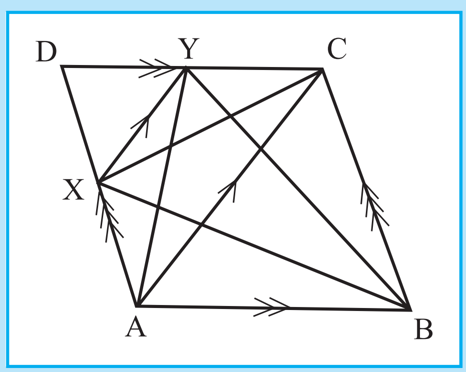
(4) රූපයේ ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ AC විකර්ණයට සමාන්තරව XY ඇඳ තිබේ.

(i) රූපය පිටපත් කරගෙන දී ඇති දත්ත ලකුණු කරන්න.

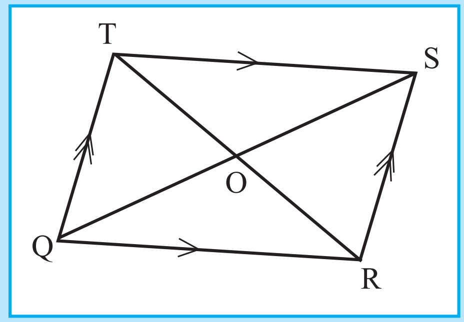
(ii) BCY△ ට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

(iii) AXB△ ට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

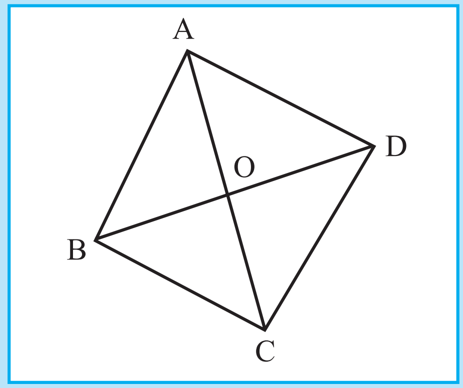
(iv) BCY△ හි වර්ගඵලය = AXB△ හි වර්ගඵලය බව පෙන්වා දෙන්න.



(5) QRST සමාන්තරාස්‍රයේ QS හා RT විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. QOR△, ROS △ , SOT △ හා QOT △ වර්ගඵලයෙන් සමාන බැව් සාධනය කරන්න.



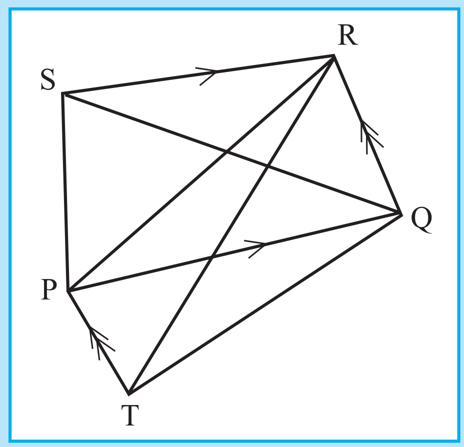
(6) ABCD චතුරස්‍රයේ AC විකර්ණය BD මගින් O හි දී සමච්ඡේදනය වේ. දී ඇති දත්ත රූපයේ ලකුණු කරන්න.



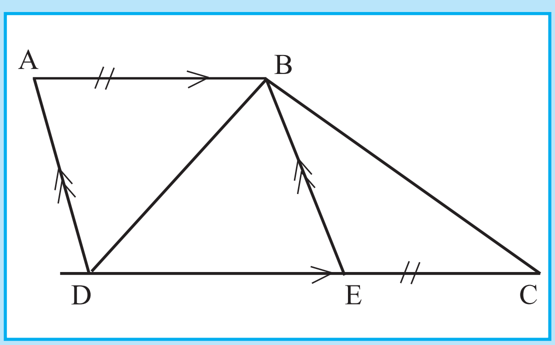
(i) AOB△ට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

(ii) BD මගින් ABCD චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න.

(7) රූපයේ PQ//SR ද RQ//PT ද වේ. PQS△ හා RQT△ වර්ගඵලයෙන් සමාන වන බව සාධනය කරන්න.



(8) රූපයේ AB//DC ද , AD//BE ද, හා AB=EC ද, වේ.

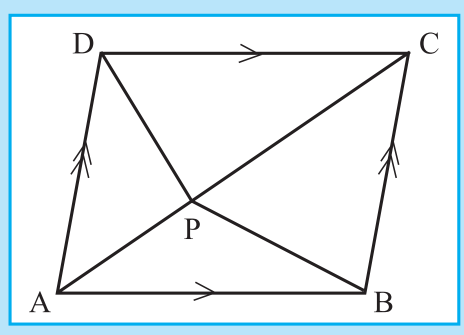


(i) ABD△ සහ BCE△ වර්ගඵලයෙන් සමාන බවත්

(ii) ABD△ $= \frac{1}{2}$ BCD△ බවත්

සාධනය කරන්න.

(9) ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ AC විකර්ණය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ.
ABP△ = APD△ බව සාධනය කරන්න.
(ඉගිය BD විකර්ණය ඇඳගන්න.)



(10) PQ = 4 cm, QR = 3 cm, PR = 6 cm, $P\hat{R}S = 60^0$, RS = 4.5 cm වන පරිදි PQRS චතුරස්‍රය නිර්මාණය කරන්න. එහි දික් කළ SR පාදය T හි දී හමුවන සේ PR ට සමාන්තර ව QT රේඛාව නිර්මාණය කරන්න. PT යා කරන්න.

(a) ඔබේ නිර්මාණය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශවල හිස්තැන් පුරවා ලියන්න.

(i) PR//QT නිසා

PQR △ = ---------

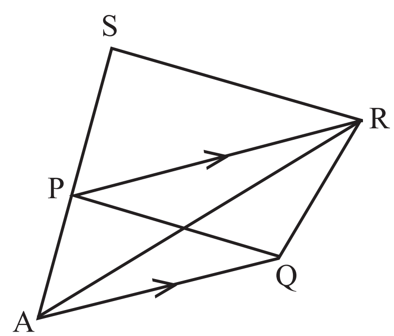
දෙපසට ම PRS △ එකතු කළ විට

PQR △+ PRS △ = -------- + PRS △

∴ PQRS = ------------

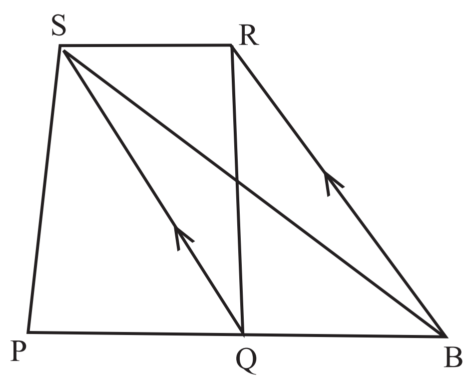
(b) ඉහත නිර්මාණයෙහි ඔබ විසින් කර ඇත්තේ PQRS චතුරස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන වූ ත්‍රිකෝණයක් (PST△) නිර්මාණය කිරීමයි. මෙම නිර්මාණය නැවත හොඳින් අධ්‍යයනය කර PQRS චතුරස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන වන සේ මෙවැනි ත්‍රිකෝණ කීයක් නිර්මාණය කළ හැකි දැයි සොයන්න.

ඔබේ පහසුව සඳහා තවත් එවැනි නිර්මාණ දෙකක දළ සටහන් මෙහි දක්වා ඇත.



PQRS = ASR △

දික් කළ SP රේඛාව A හි දී හමුවන සේ PR ට සමාන්තර ව QA ඇඳීම.



PQRS = PBS △

දික් කළ PQ රේඛාව B හි දී හමු වන සේ R හරහා SQ ට සමාන්තර ව RB ඇඳීම.

09 ප්‍රතිශත

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට
- නියමිත කාලයක් සඳහා වැල්පොලිය ගණනය කිරීම
- කුලී කිණීම යටතේ භාණ්ඩ මිල දී ගැනීම
- ණය මුදලක් ගැනීමේ දී හීන වන ශේෂයට පොලිය ගණනය කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

9.1 වැල්පොලිය

පහත දැක්වෙනුයේ 10% ක වාර්ෂික පොලී අනුපාතයක් ගෙවන මූල්‍ය ආයතනයක් මගින් මුදල් තැන්පත්කරුවකු සඳහා නිකුත් කරන ලද තැන්පත් මුදල් සටහන් කරන ලද වාර්තාවකි.

දිනය	විස්තරය	බැර (තැන්පතු) රුපියල්	හර (ආපසු ගැනුම්) රුපියල්	මුළු මුදල රුපියල්
2004.01.01	මුදල්	5000.00		5000.00
2004.12.31	පොලිය 2004 වර්ෂය	500.00		5500.00
2005.01.01	දිනට ශේෂය			5500.00
2005.12.31	පොලිය 2005 වර්ෂය	550.00		6050.00
2006.01.01	දිනට ශේෂය			6050.00
2006.12.31	පොලිය 2006 වර්ෂය	605.00		6655.00

මෙම වාර්තාව පරීක්ෂා කිරීමේ දී එහි මුදල් තැන්පත් කර ඇති ආකාරය සහ පොලී ගෙවා ඇති ආකාරය දැකිය හැකි ය. 2004 වර්ෂය සඳහා 10% වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකයට ලැබී ඇති පොලිය රු: 500 කි. ඊළඟ වර්ෂය සඳහා තැන්පත් මුදල ලෙස සලකනු ලබන්නේ තැන්පත් මුදලට මෙම පොලිය ද එකතු කිරීමෙන් ලැබෙන මුළු මුදල ය. එනම් රු: 5500 කි. දෙවන වර්ෂය සඳහා මෙම රු: 5500 ට පොලිය ලෙස රු: 550 ලැබේ. ඊළඟ වර්ෂයට පොලිය ගණනය කරන්නේ කලින් ලැබූ මුළු මුදලට මෙම රු: 550 එකතු කිරීමෙන් ලැබෙන මුදල වන රු. 6050 මත ය.

මේ ආකාරයට පොලිය ගණනය කිරීමේ දී ගෙවිය යුතු ව තිබුණු පොලියත් ණය මුදල ලෙස සලකා එයට ද පොළිය අය කරනු ලබයි. මෙම ක්‍රමයට පොලිය අය කිරීම **වැල්පොලී ක්‍රමය** යයි කියනු ලැබේ.

අවුරුදු කිහිපයක් සඳහා සුළු පොලිය ගණනය කිරීමේ දී තැන්පත් මුදලට අවුරුද්දට පොලිය ගණනය කර එය අවුරුදු ගණනින් ගුණ කිරීමෙන් මුළු පොලිය ගණනය කරන ලද බව ඔබට මතක ඇත.

රු. 5000 කට 10% බැගින් අවුරුදු 3ක දී ලැබෙන සුළු පොලිය ද අවුරුදු තුන අවසානයේ ගෙවිය යුතු මුළු මුදල ද සොයමු.

එනම් රු: 5000 ට අවු 1 ට පොලිය $= \text{රු}: 5000 \times \frac{10}{100}$

$= \text{රු} : 500$

$\therefore$ රු: 5000 ට අවු 3 ට පොලිය $= \text{රු}: 500 \times 3$

$= \text{රු}: 1500$

$\therefore$ අවුරුදු 3 අවසානයේ ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු}: 5000 + 1500$

$= \underline{\underline{\text{රු}: 6500}}$

මෙය ඉහත වැල්පොලිය ගණනය කළ ආකාරයට ලැබෙන මුළු මුදලට වඩා අඩු බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

නිදසුන 1.

එක්තරා වාණිජ බැංකුවකින් අවුරුද්දකට 25% වැල් පොලියට රුපියල් 12000 ක් ණයට ගත් අයෙකු අවුරුදු දෙකක් අවසානයේ ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කොපමණ ද ?

විසඳුම

ණය මුදල $= \text{රු}: 12000$

පොලී අනුපාතිකය $= 25\%$

කාලය = අවුරුදු 2

පළමු වසර අවසානයේ ගෙවිය යුතු පොලිය $= 12000 \times \frac{25}{100}$

$= \text{රු} \ 3000$

දෙවැනි වසර ආරම්භයේ දී ණය මුදල $= \text{රු} \ 12000 + \text{රු} \ 3000$

$= \text{රු} \ 15000$

දෙවැනි අවුරුද්දට පොලිය $= 15000 \times \frac{25}{100} = \text{රු} \ 3750$

දෙවැනි අවුරුද්ද අවසානයේ ගෙවිය යුතු මුළු මුදල $= \text{රු} \ 15000 + \text{රු} \ 3750$

$= \underline{\underline{\text{රු} \ 18750}}$

නිදසුන 2.

පුද්ගලයෙක් තමන් සතු රුපියල් 100 000 ක මුදල 12% වැල් පොලී ක්‍රමයට පොලී ගෙවන ආයතනයක ස්ථිර තැන්පතු වශයෙන් තැන්පත් කළේ ය. අවුරුදු තුනක් අවසානයේ දී ඔහුට ලබාගත හැකි වන මුළු මුදල සොයන්න.

විසඳුම :

පළමු වසර සඳහා මුදල $= \text{රු } 100\,000$

පළමු වසර සඳහා පොලිය $= 100000 \times \dfrac{12}{100}$

$= \text{රු } 12\,000$

දෙවැනි වසර සඳහා මුදල $= \text{රු } 100\,000 + \text{රු } 12\,000$

$= \text{රු } 112\,000$

දෙවැනි වසර සඳහා පොලිය $= 112\,000 \times \dfrac{12}{100}$

$= \text{රු } 13\,440$

තුන්වැනි වසර සඳහා මුදල $= \text{රු } 112\,000 + \text{රු } 13\,440$

$= \text{රු } 125\,440$

තුන්වැනි වසර සඳහා පොලිය $= 125\,440 \times \dfrac{12}{100}$

$= \text{රු } 15\,052.80$

$\therefore$ තුන්වැනි වසර අවසානයේ $= \text{රු } 125\,440 + \text{රු } 15\,052.80$

ලැබෙන මුළු මුදල $= \underline{\underline{\text{රු } 140\,492.80}}$

පොලිය ගණන් බලනු ලබන්නේ අවුරුද්දට, හය මාසයට, තුන් මාසයට, මාසයකට හෝ ඇතැම් විට දවසට විය හැකි ය. එක් කාල ඒකකයක් සඳහා පොලිය මුල් මුදලට එකතු කර ඊළඟ කාල ඒකකයට පොලිය ගණනය කිරීම **වැල් පොලිය** වේ.

9.1 අභ්‍යාසය

(1) අවුරුද්දට 8 % වැල්පොලී ක්‍රමයට රුපියල් 40 000ණයට ගත් කෙනෙක් අවුරුදු 2 ක් අවසානයේ ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.

(2) අවුරුද්දට 14 % වැල් පොලියට රුපියල් 60 000 ක් ණයට දුන් කෙනෙකු අවුරුදු 2 ක් අවසානයේ අයකරන මුළු මුදල සොයන්න.

(3) කෙනෙක් බැංකුවකින් රුපියල් 300 000 ක් ණයට ගත්තේය. බැංකුව අවුරුද්දට 15% වැල් පොලියක් අය කරන්නේ නම් අවුරුදු 3 ක් අවසානයේ ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.

9.2 කුලී කිණීම

''පළමුව රු. 5000 ක් ගෙවා රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක් රැගෙන ඉන් පසු රු. 1200 බැගින් වාරික 12 කින් ගෙවන්න''

මෙවැනි වෙළඳ දැන්වීම් ඔබ බොහෝ විට රූපවාහිනියෙන් හෝ පුවත් පත් මගින් දැක ඇත.

භාණ්ඩ අත්පිට මුදලට ලබාගැනීමට අවශ්‍ය වුව ද එම සම්පූර්ණ මුදල එකවර ගෙවිය නොහැකි අවස්ථාවක දී භාණ්ඩයේ වටිනාකමින් කොටසක් ගෙවා ඉතිරි මුදල ණයක් ලෙස යම් කිසි පොලියක් සමඟ වාරික වශයෙන් ගෙවා නිම කිරීමට ලබාගැනීම **කුලී කිණීම** ලෙස හැඳින්වේ.

මෙහි දී පළමු ගෙවීම කළ පසු ඉතිරි ණය මුදල වාරික ක්‍රමයට ගෙවන බැවින් පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂය මත ය. හීන වන ශේෂය යනු ගෙවීමට ඇති ණය මුදල් ශේෂයයි. සෑම මාසයක ම පොලී ගණනය කරන්නේ ඉතිරි වූ ණය ශේෂයට පමණි.

පාරිභෝගිකයාට මේ ක්‍රමයේ වාසි මෙන් ම අවාසි ද බොහොමයක් ඇත. භාණ්ඩයේ සම්පූර්ණ වටිනාකම ගෙවීමට පෙර පරිහරණය කිරීමට ලැබීම ඉන් වාසියකි. තව ද ඉදිරි කාලයේ භාණ්ඩ මිල ඉහළ යාමෙන් ඇති විය හැකි අවාසි ද මින් මඟ හැරේ. තමන්ගේ වාරික මුදල් නියමිත කාලසීමාවේ දී ගෙවීමට නොහැකි වුවහොත් ගෙවූ මුදල් හා භාණ්ඩය යන දෙක ම අහිමි වී යාම මෙම ක්‍රමයේ දී ඇති වන අවාසියකි. තව ද අත්පිට මුදලට භාණ්ඩයක් ගැනීමට වඩා වැඩි මුදලක් මෙහි දී ගෙවීමට සිදු වීම ද අවාසියකි.

නිදසුන 3.

අත්පිට මුදලට රුපියල් 15500 ක වටිනාකමක් ඇති රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් මුල් ගෙවීම වශයෙන් රුපියල් 3500 ක් ගෙවා ඉතිරිය අවුරුද්දකට 24% පොලිය යටතේ මාසික වාරික 6 කින් කුලී කිණීමේ ක්‍රමය ට ගෙවා නිම කිරීමේ කොන්දේසි යටතේ ලබාගත හැකි නම් ගෙවිය යුතු මාසික වාරිකය ගණනය කරන්න.

අවුරුද්දකට පොලී අනුපාතිකය = 24%

මසකට පොලී අනුපාතිකය $= 24\% \times \frac{1}{12}$

$= 2\%$

යන්ත්‍රයේ වටිනාකම = රු 15 500

පළමුව ගෙවිය යුතු මුදල = රු 3 500

ගෙවිය යුතු ඉතිරිය = රු 15 500 - රු 3 500

= රු 12 000

ඉතිරිය ගෙවිය යුතු කාලය = මාස 6 යි.

එක් වාරිකයක වටිනාකම $= \dfrac{\text{රු } 12\,000}{6}$

$= \text{රු } 2\,000$

එක් වාරිකයකට මාසික පොලිය $= 2\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 40$

1 වැනි මාසයට ණය මුදල $= \text{රු } 12\,000 = 2000 \times 6$
2 වැනි මාසයට ණය මුදල $= \text{රු } 10\,000 = 2000 \times 5$
3 වැනි මාසයට ණය මුදල $= \text{රු } 8\,000 = 2000 \times 4$
4 වැනි මාසයට ණය මුදල $= \text{රු } 6\,000 = 2000 \times 3$
5 වැනි මාසයට ණය මුදල $= \text{රු } 4\,000 = 2000 \times 2$
6 වැනි මාසයට ණය මුදල $= \text{රු } 2\,000 = 2000 \times 1$

1 වැනි මාසයට පොලිය $= \text{රු } 6 \times 2000 \times \dfrac{2}{100} = 40 \times 6$

2 වැනි මාසයට පොලිය $= \text{රු } 5 \times 2000 \times \dfrac{2}{100} = 40 \times 5$

3 වැනි මාසයට පොලිය $= \text{රු } 4 \times 2000 \times \dfrac{2}{100} = 40 \times 4$

4 වැනි මාසයට පොලිය $= \text{රු } 3 \times 2000 \times \dfrac{2}{100} = 40 \times 3$

5 වැනි මාසයට පොලිය $= \text{රු } 2 \times 2000 \times \dfrac{2}{100} = 40 \times 2$

6 වෙනි මාසයට පොලිය $= \text{රු } 1 \times 2000 \times \dfrac{2}{100} = 40 \times 1$

මුළු පොලිය $= \text{රු } (6 \times 40) + (5 \times 40) + (4 \times 40) + (3 \times 40) + (2 \times 40) + (1 \times 40)$

$= \text{රු } 40 \times (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$

රු 40 යනු මාස ඒකකයට පොලිය වේ.

මෙහි $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ යනු මාස ඒකක සංඛ්‍යාව ය.

$\therefore$ මුළු පොලිය = රු. 40×21 = රු. 840

මෙහි 6, 5, 4, 3, 2, 1 යනු සමාන්තර ශ්‍රේඪියක් බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

[$\therefore$ ඓක්‍යය $= \dfrac{n}{2}(n+1)$ යන සූත්‍රය භාවිත කිරීමෙන් මෙහි ඓක්‍යය ලබාගත හැකි ය.]

$\therefore$ වාරික වශයෙන් ගෙවිය යුතු මුළු මුදල = ණය මුදල + මුළු පොලිය

= රු 12 000 + රු840

= රු 12840

එක් වාරිකයක් සඳහා ගෙවිය යුතු මුදල = රු $\dfrac{12840}{6}$ (සමාන වාරික 6 කින් ගෙවන බැවින්)

= රු $\underline{\underline{2140.00}}$

නිදසුන 4.

අත්පිට මුදලට රුපියල් 120 000 මිල නියම කර ඇති ගෘහ භාණ්ඩ කට්ටලයක් කුලී කිණීමේ ක්‍රමය යටතේ ගැනීමට ආරම්භයේ දී රුපියල් 40 000 ක් ගෙවා ඉතිරිය මාසික වාරික මගින් මාස 16 න් ගෙවා නිම කළ යුතු ය. වාර්ෂික පොලිය 18% වේ.

(1) ණය මුදලින් මාසික ව ගෙවිය යුතු කොටස කොපමණ ද?

(2) මාස ඒකකයට පොලිය සොයන්න.

(3) මාස ඒකක සංඛ්‍යාව කොපමණ ද ?

(4) ගෙවිය යුතු පොලිය කොපමණ ද?

(5) ගෙවිය යුතු සම්පූර්ණ මුදල කොපමණ ද?

(6) වාරිකයකට ගෙවිය යුතු මුදල කොපමණ ද?

(1) පළමු ගෙවීමෙන් පසු ඉතිරි ණය මුදල = රු 120 000 - රු 40 000

= රු 80 000

කාලය = මාස 16

මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය මුදල = රු $\dfrac{80000}{16}$

= රු $\underline{\underline{5000}}$

(2) මාස ඒකකයට පොලිය = රු $5000 \times \dfrac{18}{100} \times \dfrac{1}{12}$

= රු $\underline{\underline{75}}$

(3) මාස ඒකක ගණන $= \dfrac{16}{2}(16+1)$

$= 8 \times 17$

$= \underline{\underline{136}}$

(4) ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය = රු 75×136

= රු $\underline{\underline{10\ 200}}$

(5) ගෙවිය යුතු මුළු මුදල $= $ රු 80 000 + රු 10 200

$= $ රු 90 200

(6) ∴ වාරිකයකට ගෙවිය යුතු මුදල $=$ රු $\dfrac{90\ 200}{16}$ හෝ රු $5000 + \dfrac{10\ 200}{16}$

$=$ රු 5000 + රු 637.50

$=$ රු 5637 . 50 $=$ රු 5637.50

9.2 අභ්‍යාසය

(1) එක්තරා රජයේ සේවකයෙකුගේ මාසික වැටුප රුපියල් 18 000 කි. ඔහු තම දෙපාර්තමේන්තුවෙන් මාස 10 ක වැටුප, ආපදා ණයක් වශයෙන් ලබා ගත්තේ ය. මෙම ණය සඳහා වාර්ෂික ව 5% පොලියක් හීන වන ශේෂය මත අය කරනු ලැබේ. මෙම ණය මුදල මාසික වාරික වශයෙන් මාස 60 කින් වැටුපෙන් අය කරගනු ලැබේ.

(i) මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.

(ii) ණය මුදලේ කොටසකට මාසික ව ගෙවිය යුතු පොලිය සොයන්න.

(iii) පොලී ගණනය කළයුතු මාස ඒකක ගණන සොයන්න.

(iv) මුළු පොලිය සොයන්න.

(v) වාරිකයකට ගෙවිය යුතු මුදල සොයන්න.

(2) පරිගණක යන්ත්‍රයක් රුපියල් 59 000 මිල කර ඇත. මෙය කුලී කිණීමේ ක්‍රමයට ගැනීමට මුල් ගෙවීමක් වශයෙන් රුපියල් 5000 හා ඉතිරිය සමාන මාසික වාරික 18 කින් ගෙවිය යුතු ය. පොලිය වාර්ෂික ව 15% වේ.

(i) පොලිය ගණනය කළ යුතු මාස ඒකක සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(ii) ගෙවිය යුතු සම්පූර්ණ පොලිය සොයන්න.

(iii) වාරිකයකට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.

(3) නිවාස ණයක් වශයෙන් බැංකුවකින් රුපියල් 396000 ක මුදලක් ලබා ගන්නා කෙනෙක් වර්ෂයකට 24% පොලී අනුපාතිකය යටතේ අවුරුදු 3 ක් තුළ දී සමාන මාසික වාරික මගින් ගෙවා නිම කිරීමට එකඟ වෙයි. වාරිකයක තරම සොයන්න.

(4) රමේෂ් එක්තරා ආයතනයකින් රු 57 600 ක් ණයට ගත්තේ ය. හීන වන ශේෂය මත වාර්ෂික පොලිය 18% වේ. මෙම ණය හා පොලිය සමාන මාසික වාරික වශයෙන් මාස 36 න් ගෙවා නිම කළ යුතු ය. වාරිකයක තරම සොයන්න.

නිදසුන 5.

අත්පිට මුදලට රු. 26 000 කට මිලදී ගත හැකි වර්ණ රූපවාහනී යන්ත්‍රයක් කුලී කිණීමේ ක්‍රමයට ගැනීමට මුල් ගෙවීමක් වශයෙන් රු. 5 000 ක් ද ඉතිරිය රු. 1 650 ක් බැගින් වූ සමාන මාසික වාරික 14 කින් ද ගෙවිය යුතු ය.

(1) ඉතිරි ණය මුදල සොයන්න.
(2) මාසික ව ගෙවන ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.
(3) ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.
(4) ගෙවිය යුතු පොලිය සොයන්න.
(5) මාස ඒකක සංඛ්‍යාව සොයන්න.
(6) මාස ඒකකයකට ගෙවිය යුතු පොලිය සොයන්න.
(7) වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

විසඳුම

(1) ඉතිරි ණය මුදල $= \text{රු } 26\,000 - 5000$
$= \text{රුපියල් } 21\,000$

(2) මාසික ව ගෙවන ණය කොටස $= \text{රු } \dfrac{21000}{14}$
$= \text{රු } 1500$

(3) ගෙවිය යුතු මුළු මුදල $= \text{රු } 1650 \times 14$
$= \text{රුපියල් } 23100$

(4) ගෙවන පොලිය $= \text{රු } 23100 - 21000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 2100}}$

(5) මාස ඒකක සංඛ්‍යාව $= \dfrac{14}{2}(14+1)$
$= 7 \times 15$
$= \underline{\underline{105}}$

(6) මාස ඒකකයකට පොලිය $= \text{රු } \dfrac{2100}{105} = \underline{\underline{\text{රු. } 20}}$

(7) වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය $= \dfrac{20 \times 12}{1500} \times 100\%$
$= \underline{\underline{16\%}}$

9.3 අභ්‍යාසය

(1) රුපියල් 1 400 000 වටිනා මෝටර් රථයක් ආරම්භක ගෙවීම වශයෙන් රුපියල් 200 000 ක් හා ඉතිරිය රුපියල් 59 175 ක් වූ සමාන මාසික ගෙවීම් වශයෙන් වාරික 24 න් ගෙවා නිම කළ හැකි ය.

1. වාරික 24 න් ගෙවන මුළු මුදල සොයන්න.
2. ගෙවන පොලිය සොයන්න.
3. මාසිකව ගෙවන ණය කොටස සොයන්න.
4. මාස ඒකක සංඛ්‍යාව සොයන්න.
5. මාස ඒකකයක පොලිය ගණනය කරන්න.
6. වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය ගණනය කරන්න.

(2) ශීතකරණයක මිල රුපියල් 20720 ක් වේ. මුලින් රුපියල් 2000 ගෙවා ශීතකරණය ලබාගෙන ඉතිරිය රුපියල් 942.50 වූ මාසික වාරික මගින් ගෙවා නිම කළ හැකි ය. පොලිය ගෙවිය යුතු මාස ඒකක සංඛ්‍යාව 12×25 , නම්

1. ණය මුදල ගෙවිය යුතු මාස සංඛ්‍යාව සොයන්න.
2. මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය කොටස සොයන්න.
3. ගෙවිය යුතු පොලිය සොයන්න.
4. වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

(3) මහන මැෂිමක වටිනාකම රුපියල් 16 750 ක් වේ. මෙය කුලී කිණීමේ ක්‍රමයට මුල් ගෙවීමක් වශයෙන් රුපියල් 1750 ක් හා ඉතිරිය රුපියල් 1582.50 බැගින් වූ මාසික වාරික 10 කින් ගෙවිය හැකි ය.

1. මාස 10 න් ගෙවන මුදල සොයන්න.
2. ගෙවිය යුතු පොලිය සොයන්න.
3. මාස ඒකක සංඛ්‍යාව සොයන්න.
4. මාස ඒකකයකට පොලිය සොයන්න.
5. මාසික ව ගෙවන ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.
6. වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

10 ව්‍යාපාර හා කොටස්

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ප්‍රාග්ධනය, කොටස්, ආරම්භක නිකුත් කිරීම
- නාමික අගය, වෙළඳ අගය යන පදවල අර්ථය
- ආයෝජනයෙන් ලැබෙන ලාභාංශය ගණනය කිරීම
- ලාභදායි කොටස්වල ආයෝජන කිරීමට අවශ්‍ය ගණනය කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබාගත හැකි වනු ඇත.

10.1 හැඳින්වීම

වෙළඳ ව්‍යාපාරයක් ආරම්භ කිරීම සඳහා මූලික ව ආයෝජනය කළ යුතු මුදල ප්‍රාග්ධනය ලෙස හැඳින්වේ. එම නිසා ව්‍යාපාරයක් ආරම්භ කිරීම සඳහා ප්‍රාග්ධනය අත්‍යවශ්‍ය සාධකයකි. පෞද්ගලික ව හෝ කිහිප දෙනෙක් කොටස් කරුවන් වී හෝ වැඩි පිරිසක් එකතු වී සමූහ ව්‍යාපාරයක් මඟින් හෝ වෙළඳ ව්‍යාපාරයකට ප්‍රාග්ධනය ලබා ගත හැකි ය. ප්‍රාග්ධනය ඉතා ඉහළ අගයක් ගන්නා ව්‍යාපාර සඳහා අවශ්‍ය මුදල සපයාගනු ලබන්නේ එම ප්‍රාග්ධන මුදල කොටස්වලට බෙදා ඒවා මහජනයා අතර විකිණීමෙනි. ව්‍යාපාරය ආරම්භයේ දී ම එම ආයතනය විසින් මෙම කොටස් විකුණනු ලබන අතර එයට **ප්‍රාථමික නිකුතුව** යැයි කියනු ලැබේ.

ප්‍රාග්ධන අරමුදල කොටස් කරන ආකාරය මෙසේ පැහැදිලි කළ හැකි ය. ව්‍යාපාරයක් ආරම්භ කිරීමට රුපියල් මිලියනයක් අවශ්‍යයැයි සිතමු. මෙම මුදල මහජනයා අතර රු. 10 කොටස් විකිණීම මඟින් ලබා ගැනීමට තීරණය කරන ලද්දේ යයි සිතමු. රුපියල් මිලියනයක ප්‍රාග්ධන අරමුදල ලබා ගැනීම සඳහා එකක් රු. 10 බැගින් කොටස් 100 000 ක් විකිණිය යුතුයි. මෙසේ කොටසකට තීරණය කරන වටිනාකම කොටසක නාමික අගය යැයි කියනු ලැබේ. ඒ අනුව ඉහත සඳහන් කළ ව්‍යාපාරයේ කොටසක නාමික අගය රු. 10 කි. කොටසක නාමික අගය එක් එක් ව්‍යාපාරය සම්බන්ධ ව රු. 2, රු. 5, රු. 10, රු. 25.... ආදි වශයෙන් වෙනස් විය හැකි ය.

ව්‍යාපාරය මඟින් කොටසක නාමික අගය තීරණය කළ ද එය විකුණන මිල අනුව මෙසේ විකිණීම වර්ග කරනු ලැබේ.

(i) කොටසක් විකිණීමේ දී එය නාමික අගයට ම විකිණේ නම් එය **සම මිලට** විකුණන්නේ යැයි ද,

(ii) කොටසක් විකිණීමේ දී එය නාමික අගයට වඩා වැඩි අගයකට විකිණේ නම් එය **අධිමිලට** විකුණන්නේ යැයි ද,

(iii) කොටසක් විකුණන විට එය නාමික අගයට වඩා අඩු අගයකට විකිණෙයි නම් එය **අවමිලට** විකුණන්නේ යැයි ද, කියනු ලැබේ.

මෙම සමමිල , අධිමිල හා අවමිල යන අගයයන් **වෙළඳ අගයයන්** ලෙස හැඳින්වේ.

10.2 ලාභාංශය

කෙනෙකු රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 12 බැගින් මිල දී ගත්තේ යැයි සිතමු. ඔහු රුපියල් 6 000 ක් ඒ සඳහා ආයෝජනය කළේ නම් ඔහුට ගතහැකි වන්නේ කොටස් 500 කි. මෙම කොටස් 500 හි ම නාමික අගය රුපියල් 5 000 කි. මෙසේ ම ඔහු රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 8 බැගින් මිල දී ගත්තේ නම් රුපියල් 6 000 ට මිලට ගත හැකි වන්නේ කොටස් 750 කි. එවිට මෙම කොටස්වල නාමික අගය රුපියල් 7 500 ක් වේ.

කොටසක නාමික අගය රු. 10 ක් වන විට කොටස් 500 ක නාමික අගය හෙවත් කොටස්වල නාමික අගය රු. 10×500 එනම්, රු. 5 000 කි.

වෙළෙඳ ව්‍යාපාරික ආයතනයක් අවුරුද්දක් අවසානයේ තම කොටස්කරුවන්ට ඔවුන්ගේ කොටස්වල නාමික අගයට, නියමිත ප්‍රතිශතයක් ලාභය වශයෙන් ලබා දෙයි. මෙය **ලාභාංශය** ලෙස හැඳින් වේ. කොටසක් කොපමණ අධිමිලට ගත්ත ද අවමිලට ගත්ත ද සමමිලට ගත්ත ද ලාභාංශ ගෙවනු ලබන්නේ කොටස්වල නාමික අගය මත ය.

10.3 කොටස් වෙළෙඳ පොළ

ව්‍යාපාරික ආයතනවල කොටස් විකිණීම හා මිල දී ගැනීම සිදුවනුයේ කොටස් වෙළඳ පොළ හරහා ය. කොටස් වෙළඳ පොළ සමඟ ක්‍රියා කරන තැරැව්කරුවන් මඟින් මෙම කාර්යය සිදු කෙරේ. කාලයෙන් කාලයට මෙම කොටස් වෙළෙඳ පොළ ඉහළ යාම හෝ පහළ යාම, එනම් කොටස්වල මිල ගණන් ඉහළ යාම හෝ පහළ යාම විවිධ හේතූන් මත සිදු වේ.

නිදසුන 1.

ආයෝජකයෙක් 5% ලාභාංශ ගෙවන එක්තරා ව්‍යාපාරයක රුපියල් 25 කොටස් රුපියල් 20 බැගින් මිලට ගැනීමට රුපියල් 10000 ක් ආයෝජනය කළේ ය.

(i) ඔහු මිලට ගත් කොටස් සංඛ්‍යාව සොයන්න.
(ii) කොටස්වල නාමික අගය සොයන්න.
(iii) අවුරුද්දකට ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(iv) ලාභාංශ ආදායම ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

විසඳුම

(i) මිල දී ගත් කොටස් සංඛ්‍යාව $= \dfrac{10000}{20} = \underline{\underline{500}}$

(ii) කොටස්වල නාමික අගය $=$ රු $25 \times 500 =$ රු $\underline{\underline{12\ 500}}$

(iii) අවුරුද්දක ලාභාංශ ආදායම $=$ රු $12\ 500 \times \dfrac{5}{100} =$ රු $\underline{\underline{625}}$

(iv) ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{625}{10\ 000} \times 100\% = \underline{\underline{6.25\%}}$

නිදසුන 2.

එක්තරා ව්‍යාපාරිකයෙක් තමා ළඟ තිබූ රුපියල් 52 000 ක මුදලින් රු. 24000 ක් 8% ක ලාභාංශ ගෙවන සමාගමක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 12 බැගින් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළේ ය. ඉතිරි මුදල 15% ලාභාංශයක් ගෙවන ව්‍යාපාරයක රුපියල් 25 කොටස් රුපියල් 28 බැගින් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළේ ය. ආයෝජන දෙකින් ම ඔහුට ලැබුණ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

විසඳුම

8% ලාභාංශය ගෙවන ව්‍යාපාරයේ කොටස්වල යෙදූ මුදල $=$ රු 24000

$\therefore$ 15% ලාභාංශය ගෙවන ව්‍යාපාරයේ කොටස්වල යෙදූ මුදල $=$ රු 52000 - 24000
$=$ රු 28000

8% ලාභාංශයක් ගෙවන ව්‍යාපාරයේ කොටස්වල නාමික අගය $= \dfrac{24000}{12} \times 10$

$=$ රු 20000

එයින් ලැබෙන ආදායම $= \text{රු } 20000 \times \frac{8}{100}$

$= \text{රු } 1600$

15% ලාභාංශයක් ගෙවන ව්‍යාපාරයේ කොටස් වල නාමික අගය $= \text{රු } \frac{28000}{28} \times 25$

$= \text{රු } 25000$

එයින් ලැබෙන ආදායම $= \text{රු } 25000 \times \frac{15}{100}$

$= \text{රු } 3750$

∴ ලැබෙන මුළු ආදායම $= \text{රු } 1600 + \text{රු } 3750$

$= \text{රු } 5350$

නිදසුන 3.

12% ක ලාභාංශයක් ගෙවන සමාගමක රු. 10 කොටස් එක්තරා ප්‍රමාණයක් හිමි අයෙක් එයින් රු. 2400 ක වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායමක් ලැබුවේ ය. ඔහු එම කොටස් සියල්ල ම විකුණා රු. 26000 ක් ලබාගත්තේ ය. ඔහු සතුව තිබුණු කොටස් සංඛ්‍යාව ද කොටසක් විකුණූ මිල ද සොයන්න.

කොටස්වලින් ලද වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $= \text{රු } 2400$

කොටස්වල නාමික අගය $= \text{රු } 2400 \times \frac{100}{12}$

$= \text{රු } 20000$

කොටස් සංඛ්‍යාව $= \frac{20000}{10}$

$= 2000$

කොටසක් විකුණූ මිල $= \text{රු } \frac{26000}{2000}$

$= \text{රු } 13$

නිදසුන 4.
9% ක ලාභාංශ ගෙවන සමාගමක රු. 10 කොටස් රු. 14 බැගින් මිලයට ගැනීමට එක්තරා මුදලක් යෙද වූ අයකු එමගින් ලබාගත් ලාභාංශ ආදායම රු. 2250 ක් නම් එම කොටස් විෂයයෙහි යොදවන ලද මුදල සොයන්න.

ලාභාංශ අදායම $= \text{රු } 2250$

එම කොටස්වල නාමික අගය $= \text{රු } 2250 \times \frac{100}{9}$

$= \text{රු } 25000$

කොටස් මිලයට ගැනීමට යොදවන ලද මුදල $= \frac{25000}{10} \times 14$

$= \underline{\underline{\text{රු } 35000}}$

නිදසුන 5.
රු. 10 යේ කොටස් රු. 13.50 බැගින් මිලයට ගැනීමට රු. 40500 ක් යෙද වූ අයකුගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රු. 3300 ක් විණි නම් සමාගම ගෙවන ලාභාංශය සොයන්න.

යොදවන ලද මුදල $= \text{රු } 40500$

මිලයට ගත් කොටස් සංඛ්‍යාව $= \text{රු } \frac{40500}{13.50}$

$= 3000$

කොටස්වල නාමික අගය $= \text{රු } 3000 \times 10$

$= \text{රු } 30000$

ලාභාංශ ආදායම $= \text{රු } 3300$

ලාභාංශය $= \frac{3300}{30000} \times 100\%$

$= \underline{\underline{11\%}}$

10.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.

ආයෝජනය කළ මුදල රු.	කොටසක නාමික අගය රු.	කොටසක වෙළෙඳ අගය රු.	ගත හැකි කොටස් ගණන	කොටස් වල නාමික අගය	ලාභාංශය	ලාභාංශ ආදායම
3000	10	12			8%	
	10	8			6%	750
	25	30		2500		375
		15	400	4000	14%	
9000	25			7500		900

(2) කුමාර ලාභාංශය 8% ගෙවන සමාගමක රුපියල් 25 කොටස් රුපියල් 30 බැගින් මිලදී ගැනීමට රුපියල් 15000 ක මුදලක් ආයෝජනය කළේය.

(i) ඔහු ගත් කොටස් සංඛ්‍යාව සොයන්න.
(ii) කොටස්වල නාමික අගය සොයන්න.
(iii) ලාභාංශය සොයන්න.
(iv) ලාභාංශ ආදායම ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(3) සුරංග 12% ලාභාංශයක් ගෙවන ව්‍යාපාරයක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 15 බැගින් මිල දී ගැනීමට යම් මුදලක් යෙදුවේ ය. ඔහුට වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම වශයෙන් රුපියල් 1500 ලැබුණි නම් කොටස්වල යෙදූ මුදල සොයන්න.

(4) 6% ලාභාංශය ගෙවන රුපියල් 100 කොටස් මිල දී ගැනීමට රුපියල් 18000 යෙදවූ කෙනෙකුට වාර්ෂික ලාභාංශය වශයෙන් රුපියල් 1200 ලැබුනේ ය. කොටසක වෙළඳ අගය සොයන්න.

(5) 15% ලාභාංශයක් ගෙවන සමාගමක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 12 බැගින් මිලදී ගැනීමට කෙනෙක් රුපියල් 12000 ක් යෙදවූයේ ය. වාර්ෂික ලාභාංශය ලබා ගැනීමෙන් පසුව ඔහු එම කොටස් රුපියල් 15 බැගින් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල් ද ලාභාංශ වශයෙන් ලැබූ මුදල් ද යොදවා 12% බැගින් ලාභාංශයක් ගෙවන තවත් ව්‍යාපාරයක රුපියල් 25ක කොටස් මිලදී ගත්තේ ය. ඔහුගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රුපියල් 750 කින් වැඩි විය. දෙවැනි ව්‍යාපාරයේ කොටසක වෙළෙඳ අගය සොයන්න.

(6) මොහොමඩ් එක්තරා ව්‍යාපාරයක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 9 බැගින් මිල දී ගැනීමට රුපියල් 27 000ක් යෙදුවේ ය. ව්‍යාපාරයේ ගෙවන ලාභාංශය 12% කි. ලාභාංශය ලබාගැනීමෙන් අනතුරුව එම කොටස් සම මිලට වික්කේ ය. එම මුදල ද, ලැබූ ආදායම ද යොදවා 15% ලාභාංශයක් ගෙවන තවත් ව්‍යාපාරයක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 12 බැගින් මිලදී ගත්තේ ය. දෙවන ව්‍යාපාරයෙන් ඔහුට ලැබෙන ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

(7) 16% ලාභාංශයක් ගෙවන නවීන් සහ සමාගමේ රු. 10 යේ කොටස් මිල දී ගත් අයෙක් අවුරුද්දක් අවසානයේ රුපියල් 4000 ලාභාංශ ආදායමක් ලබා ගත්තේ ය. නවීන් සහ සමාගමේ කොටස්වල නාමික අගය සොයන්න.

(8) රුපියල් 46 000 ක මුදල තිබෙන අයෙක් එම මුදලින් රු. 24000 ක් 12% ලාභාංශයක් ගෙවන සමාගමක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 8 බැගින් මිල දී ගැනීමටත් ඉතිරි මුදල 18% ලාභාංශයක් ගෙවන තවත් සමාගමක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 15 බැගින් මිලට ගැනීමටත් යොදවයි. ඔහුට සමාගම් දෙකින් ම ලැබුණු ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

(9) 7% ලාභාංශයක් ගෙවන සමාගමක රු. 6000 ක වටිනාකමින් යුත් රු. 10 කොටස් තිබෙන කෙනෙක් එම කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල් 6% ලාභාංශයක් ගෙවන රුපියල් 25 කොටස් රුපියල් 24 බැගින් මිල දී ගැනීමට යෙදුවේ ය. මෙ මඟින් ඔහුගේ ආදයම රුපියල් 105 කින් වැඩි විය. 7% ලාභාංශය දෙන රුපියල් 10 කොටස් විකුණූ අගය කොපමණ ද?

(10) රුපියල් 80000 අතැති අයෙක් එයින් රු. 36000 ක් 15% ලාභාංශයක් ගෙවන සමාගමකින් රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 12 බැගින් ද, ඉතිරි මුදල 14% ලාභාංශයක් ගෙවන තවත් සමාගමකින් රුපියල් 20 කොටස් රුපියල් 22 බැගින් මිලට ගත්තේ ය. ආයෝජන දෙකින් ම ඔහුට ලැබුණු ආදායම ඔහුගේ මුළු ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(11) කෙනෙක් 5% ලාභාංශයක් ගෙවන A නම් සමාගමේ රුපියල් 100 කොටස් ද 4% ලාභාංශයක් ගෙවන B නම් සමාගමේ රුපියල් 100 කොටස් ද සමාන සංඛ්‍යාවක් බැගින් මිලයට ගෙන ඇත. සමාගම් දෙකෙන් ම ලැබෙන ලාභාංශ ආදායම රුපියල් 2700 ක් වේ. A සමාගමේ කොටස් රුපියල් 108 බැගිනුත් B සමාගමේ කොටස් රුපියල් 90 බැගිනුත් විකිණීමෙන් ලැබුණු මුදල යොදා 12% ලාභාංශයක් ගෙවන වෙනත් සමාගමක රුපියල් 10 කොටස් රුපියල් 18 බැගින් මිලට ගත්තේ ය.

(i) කොටස් විකිණීමෙන් ලැබුණු මුලු මුදල සොයන්න.

(ii) 12% ලාභාංශය දෙන කොටස්වල නාමික අගය සොයන්න.

(iii) රු. 10 යේ කොටස්වලින් ලැබෙන ආදායම සොයන්න.

(ඉඟිය : එක් එක් සමාගමෙන් ගත් කොටස් සංඛ්‍යාව x යැයි සලකා සරල සමීකරණයක් ගොඩනඟන්න.)

11 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය
- ඉහත ප්‍රමේයයන් මගින් ගැටලු විසඳීම

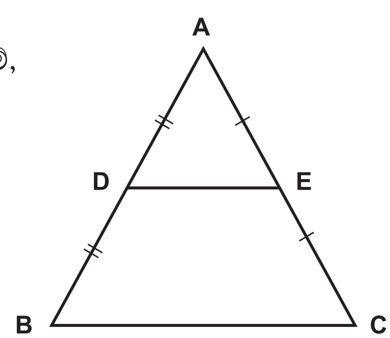
පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි වනු ඇත.

ත්‍රිකෝණයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛා සහ ත්‍රිකෝණයේ පාද අතර සම්බන්ධයක් පවතී. එම සම්බන්ධය හඳුනා ගනිමු.

11.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර, එය දිගින් ඉතිරි පාදයේ දිගෙන් හරි අඩක් වේ.

එනම්,



ABC ත්‍රිකෝණයකි.
D සහ E යනු පිළිවෙළින් AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

එවිට,

$DE \,//\, BC$ සහ $DE = \dfrac{1}{2}BC$

11.1 ක්‍රියාකාරකම

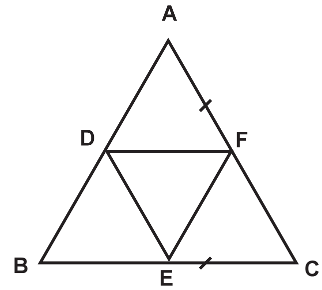
(1) $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 4$ cm වූ ත්‍රිකෝණය අඳින්න. ඕනෑ ම පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය D සහ E ලකුණු කරන්න. DE යා කරන්න. DE මැනීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් DE, ඉතිරි පාදයේ දිග සමග සසඳන්න.

(2) ABCD චතුරස්‍රයක $AB \,//\, DC$ සහ $AD \,//\, BC$ වේ. ABCD චතුරස්‍රය හඳුන්වන විශේෂිත නම කුමක් ද ?

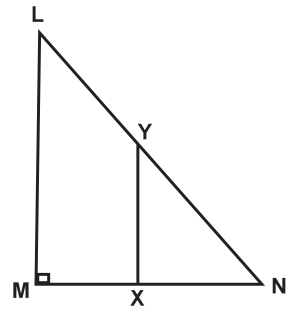
(3) PQRS චතුරස්‍රයේ $PS = QR$ සහ $PS \,//\, QR$ වේ. PQRS චතුරස්‍රය හඳුන්වන විශේෂිත නම කුමක් ද ?

11.1 අභ්‍යාසය

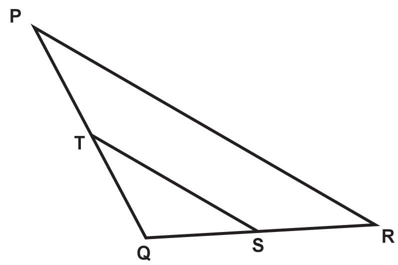
(1)



(i) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = 8 cm, BC = 7 cm සහ AC = 6 cm, AB, BC හා CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E සහ F වේ. DEF ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

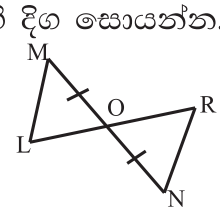


(ii) LMN ත්‍රිකෝණයේ LM = 8 cm, MN = 6 cm සහ $L\hat{M}N = 90^0$ වේ. MN හා LN හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ. $Y\hat{X}N$ හි විශාලත්වය සහ YN හි දිග සොයන්න.



(iii) PQR ත්‍රිකෝණයේ, QR හා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් S සහ T වේ. PR = 24 cm, QR = 13 cm ද, PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 52 cm ද වේ. QT හි හා TS හි දිග සොයන්න.

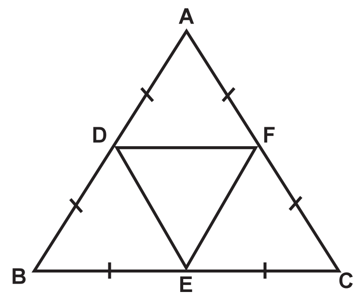
(2)



ඉහත රූපයෙහි LM//NR ද LR හා MN, O හිදි ඡේදනය වන්නේ MO = ON වන ලෙස ය. LMO හා NRO ත්‍රිකෝණ අංගසම බව පෙන්වන්න. එමගින් සමාන වන අනුරූප පාද නම් කරන්න.

නිදසුන 1.

සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන ත්‍රිකෝණය ද සමපාද වන බව පෙන්වා දෙන්න.



දත්තය : ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.

D, E, F යනු පිළිවෙළින් AB, BC, CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

සා.ක.යු. : DEF Δ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

සාධනය : ABC ත්‍රිකෝණයේ

AD = DB සහ AF = FC (D, F මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන නිසා)

$\therefore DF = \frac{1}{2} BC$ ____ (1) (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය - ප්‍රමේයයෙන්)

ABC ත්‍රිකෝණයේ

AD = DB සහ BE = EC (D, E මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන නිසා)

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$ ____ (2) (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන්)

ABC ත්‍රිකෝණයේ,

BE = EC සහ AF = FC (E, F මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන නිසා)

$\therefore EF = \frac{1}{2} AB$ ____ (3) (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන්)

නමුත් AB = BC = AC (ABC Δ සමපාද නිසා)

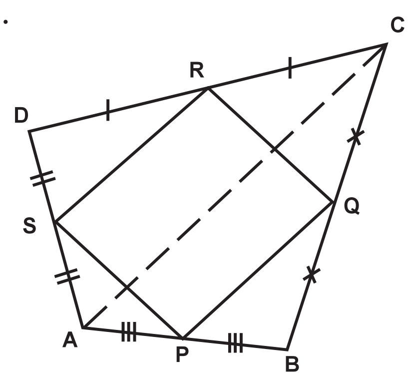
$\therefore$ (1) , (2) සහ (3) න්

DF = DE = EF

$\therefore$ DEF සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.

නිදසුන 2.

ABCD චතුරස්‍රයේ AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q, R සහ S වේ. PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



දත්තය : ABCD චතුරස්‍රයේ

AP = PB, CQ = QB

CR = RD සහ AS = SD වේ.

සා.ක.යු. : PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව,

නිර්මාණය : A හා C යා කරන්න.

සාධනය : ADC ත්‍රිකෝණයේ ,

$AS = SD$ (S මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$CR = RD$ (R මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$\therefore SR = \frac{1}{2} AC ---- (1)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

සහ

$SR // AC ---- (2)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

ABC ත්‍රිකෝණයේ

$AP = PB$ (P මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$CQ = QB$ (Q මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$\therefore PQ = \frac{1}{2} AC ---- (3)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

$\therefore PQ // AC ---- (4)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

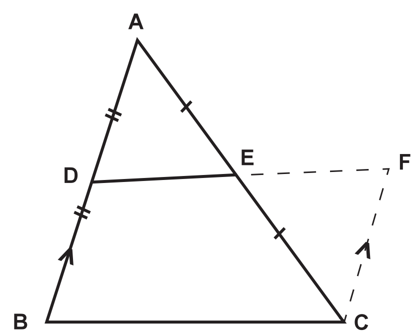
(1) සහ (3) න් , $PQ = SR$

(2) සහ (4) න් , $PQ // SR$

$\therefore$ PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය සාධනය

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ
AB හා AC පාදවල
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින්
D සහ E වේ.



සා. ක. යු. : $DE // BC$ සහ

$DE = \frac{1}{2} BC$ බව

නිර්මාණය : දික් කරන ලද DE, F හි දී හමු වන සේ BA ට සමාන්තර ව C හරහා රේඛාවක් අඳින්න.

සාධනය : ADE සහ CEF ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$AE = EC$ (දත්තය)

$A\hat{D}E = E\hat{F}C$ (ඒකාන්තර කෝණ , $BA // CF$)

$A\hat{E}D = C\hat{E}F$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore ADE\triangle = CFE\triangle$ (කෝ. කෝ. පා.)

$\therefore AD = CF$ සහ $DE = EF$

නමුත් $AD = BD$

$\therefore BD = CF$

BDFC චතුරස්‍රයේ $BD = CF$, $BD // CF$

$\therefore$ BDFC සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore DF = BC$ සහ $DF // BC$

නමුත් $DE = EF$ (ඉහත පෙන්වා දී ඇත.)

$$DE = \frac{1}{2} DF$$

$$DE = \frac{1}{2} BC \quad \text{(DF = BC බව සාධිතය)}$$

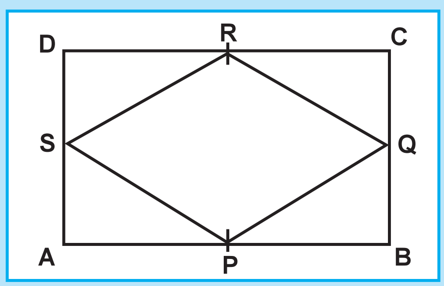
$\therefore DE // BC$ සහ

$$DE = \frac{1}{2} BC$$

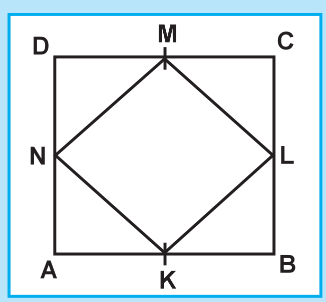
11.2 අභ්‍යාසය

(1) ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයෙහි $AB = BC$ වේ. AB, BC හා CA පාදවල මාධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q සහ R වේ. $PQR\triangle$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.

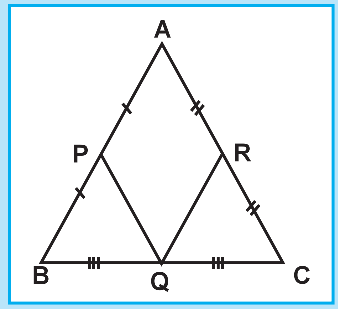
(2) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයකි. P, Q, R, S යනු පිළිවෙළින් AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. PQRS රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න.



(3) ABCD සමචතුරස්‍රයකි. AB, BC, CD සහ DA පාදයන් හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් K, L, M, N වේ. KLMN සමචතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



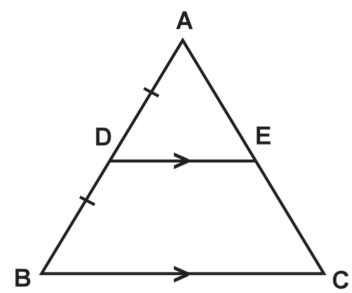
(4) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ. AB, BC සහ CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q සහ R වේ. APQR රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න.



11.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වැනි පාදය සමච්ඡේද වේ.
එනම්

ABC ත්‍රිකෝණයේ AD = BD
සහ DE // BC වන විට
AE = EC වේ.

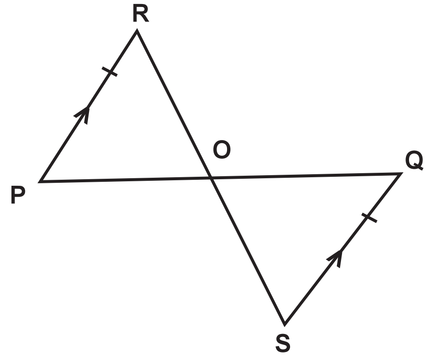


11.2 ක්‍රියාකාරකම

(1) AB = 6 cm , BC = 5 cm , AC = 4 cm වූ ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය D ලකුණු කරන්න. BC ට සමාන්තර ව D හරහා DE රේඛාව අඳින්න. AE හා EC දිග මැන AE හා EC අතර සම්බන්ධය සොයන්න.

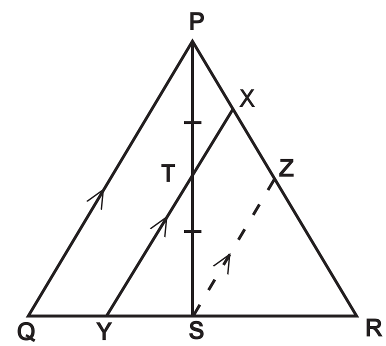
(2) සමාන්තරාස්‍රයක ගුණ සඳහන් කරන්න.

(3) රූපයේ PR // SQ සහ PR = SQ වේ. PQ සහ SR,O හි දී ඡේදනය වේ. POR හා SOQ ත්‍රිකෝණ අංගසම බව පෙන්වන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප පාද යුගල නම් කරන්න.



නිදසුන 3.

PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S වේ. PS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. PQ පාදයට සමාන්තර ව T හරහා ඇඳි රේඛාව PR හා QR පාද පිළිවෙළින් X හා Y හි දී ද හමුවේ. $XY = \frac{3}{4}$ PQ බව පෙන්වන්න.



දත්තය : PQR ත්‍රිකෝණයේ

$QS = SR$, $PT = TS$

$QP \parallel YX$,

සා.ක.යු. : $XY = \frac{3}{4}$ PQ බව

නිර්මාණය : QP ට සමාන්තර ව SZ අඳින්න.

සාධනය : PSZ ත්‍රිකෝණයේ

$PT = TS$ සහ

$TX \parallel SZ$ (නිර්මාණය)

$\therefore PX = XZ$ සහ

$TX = \frac{1}{2}\ SZ$

$TX = a$

එවිට $SZ = 2a$ ---- (1)

PQR ත්‍රිකෝණයේ

$QS = SR$ සහ $QP \parallel SZ$

$\therefore PZ = ZR$ හා $SZ = \frac{1}{2}\ PQ$

$\therefore SZ = 2a$; $PQ = 4a$ ---- (2)

PQS ත්‍රිකෝණයේ

$PT = TS$ සහ $TY \parallel PQ$

$\therefore QY = YS$ සහ $TY = \frac{1}{2}\ PQ$

$\therefore PQ = 4a$ $TY = 2a$ ---- (3)

(1) , (2) සහ (3) න්,

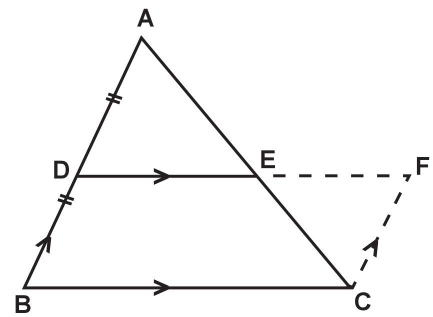
$$XY = TX + TY = a + 2a = 3a$$
$$PQ = 4a$$
$$\underline{\underline{XY = \frac{3}{4}\ PQ}}$$

$$XY = 3a$$
$$XY = 3\ \frac{PQ}{4}$$
$$XY = \frac{3}{4}\ PQ$$

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය සාධනය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන් වැනි පාදය සමච්ඡේද වේ.

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ,
AD = BD සහ
DE // BC



සා.ක.යු. : E යනු AC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බව (එනම් AE = EC බව,)

නිර්මාණය : දික් කරන ලද DE, F හි දී හමු වන සේ C හරහා BD ට සමාන්තර ව රේඛාවක් අඳින්න.

සාධනය : BCFD චතුරස්‍රයේ ,

BC // DF (දත්තය)

BD // CF (නිර්මාණය)

$\therefore$ BCFD සමාන්තරාස්‍රයකි.

BD = CF

නමුත් BD = AD නිසා

$\therefore$ AD = CF වේ.

ADE හා CFE ත්‍රිකෝණ දෙකේ

AD = CF

$A\hat{D}E = E\hat{F}C$ (ඒකාන්තර කෝණ AB // CF)

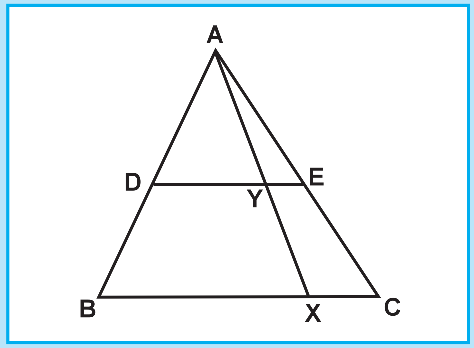
$A\hat{E}D = C\hat{E}F$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore$ ADE $\triangle$ = CFE $\triangle$ (කෝ. කෝ. පා.)

$\therefore$ $\underline{\underline{AE = EC}}$

11.3 අභ්‍යාසය

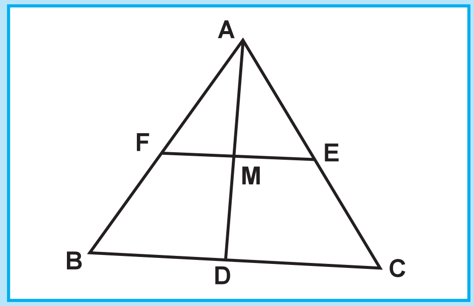
(1) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D සහ E වේ. X යනු BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AX හා DE, Y හි දී ඡේදනය වේ. AY = YX බව පෙන්වන්න.



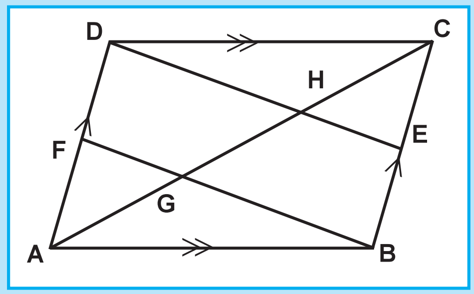
(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA හා AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E සහ F වේ. AD සහ FE, M හි දී ඡේදනය වේ.

(i) AM = MD බව ද,

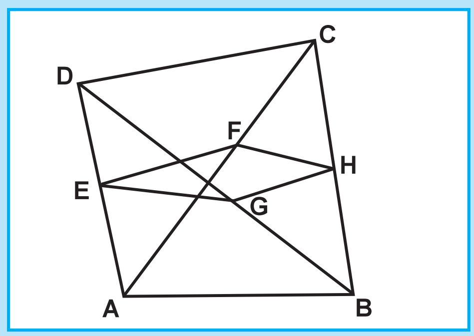
(ii) FM = ME බව ද පෙන්වන්න.



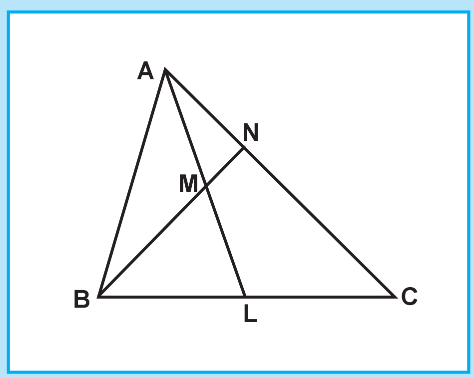
(3) ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. BC හා AD පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E සහ F වේ. BF සහ DE රේඛා AC විකර්ණය පිළිවෙළින් G හා H හි දී ඡේදනය කරයි. BF // ED හා AG = GH = HC බව සාධනය කරන්න.



(4) ABCD චතුරස්‍රයේ AB = DC ද AD, AC, BD හා BC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E, F, G සහ H වේ. EFHG රොම්බසයක් බව සාධනය කරන්න. එ නයින් EH සහ FG එකිනෙකට ලම්බක බව පෙන්වන්න.



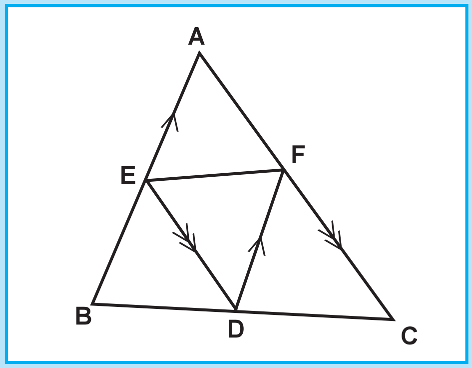
(5) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වේ. AL පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M වේ. දික් කරන ලද BM සහ AC, N හි දී හමු වේ. $AN = \frac{1}{3}AC$ බව පෙන්වන්න.



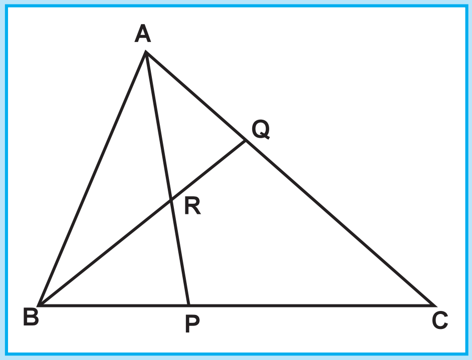
(6) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. BA පාදයට සමාන්තර ව D හරහා අඳින ලද රේඛාවට AC පාදය F හි දී ද, CAට සමාන්තර ව D හරහා අඳින රේඛාවට AB පාදය E හි දී ද හමු වේ.

$EF = \frac{1}{2}$ BC සහ

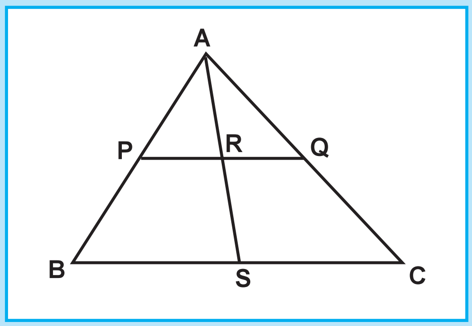
$DE = \frac{1}{2}$ AC බව පෙන්වන්න.



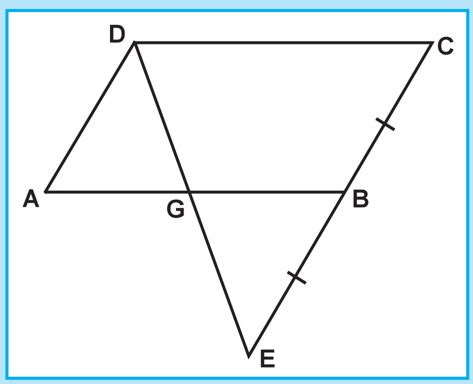
(7) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. Q යනු $AQ : QC = 1 : 2$ වන සේ AC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AP සහ BQ, R හි දී හමු වේ. $AR = RP$ බව සහ $RQ = \frac{1}{4} BQ$ බව ද පෙන්වන්න.



(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය R වේ. දික් කරන ලද AR ට BC, S හි දී හමු වේ.
$BS = SC$ බව පෙන්වන්න.



(9) ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. $CB = BE$ වන සේ CB පාදය E දක්වා දික් කර ඇත. DE හා AB, G හි දී ඡේදනය වේ. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය G බව සාධනය කරන්න.



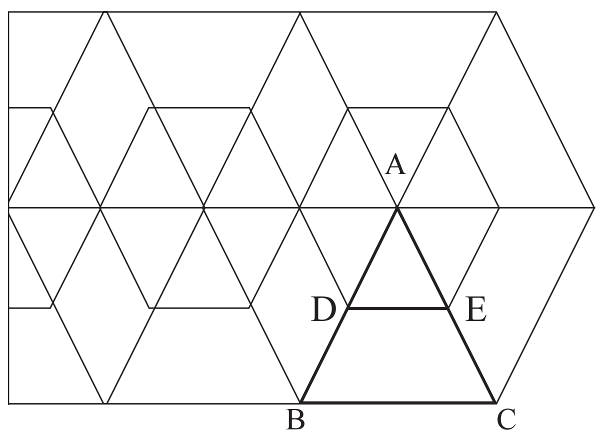
12 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ත්‍රිකෝණ යක පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය භාවිතය
- සමකෝණික ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය භාවිතය

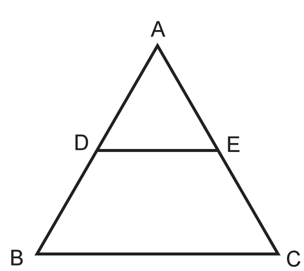
පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

12.1 ත්‍රිකෝණයක පාද සමානුපාතිකව බෙදීම



ඉහත රූපයේ දක්වා ඇත්තේ ගේට්ටුවකට යොදා ඇති රටාවක කොටසකි. එහි විවිධ තල රූප දක්නට ඇත. මෙම කොටස සඳහා යොදා ගෙන ඇති කම්බි ප්‍රමාණයේ මුළු දිග සෙවීමට අවශ්‍ය යැයි සිතමු. ඒ සඳහා රටාව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

තද පාටින් ඇඳ ඇති ත්‍රිකෝණය වෙන් කර ඇඳගනිමු.
ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන අතර D හා E , පිළිවෙළින් AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.



ඔබ මීට ඉහත පාඩමේ දී උගත් ප්‍රමේයය අනුව BC හා DE රේඛා ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

$DE // BC$ හා $DE = \frac{1}{2} BC$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ප්‍රමේයය)

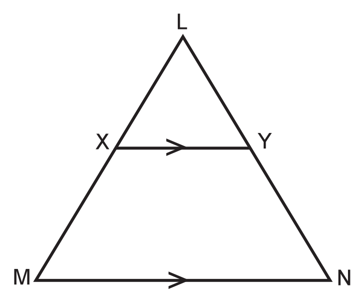
තව ද $\frac{AD}{DB} = 1$ හා $\frac{AE}{EC} = 1$ ද වේ.

එනම් $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ප්‍රමේයය : ත්‍රිකෝණයක පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද සරල රේඛාවකින්, එහි ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ.

එනම් LMN ත්‍රිකෝණයේ LM මත X ද, LN මත Y ද පිහිටි අතර XY // MN.

$\frac{LX}{XM} = \frac{LY}{YN}$ වේ.



12.1 ක්‍රියාකාරකම

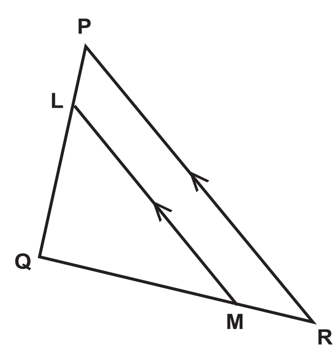
ඉහත ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙ හි යෙදෙන්න.

PQR ත්‍රිකෝණය අභ්‍යාස පොතේ තරමක් විශාල ව ඇඳගන්න. PQ මත L ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර L හරහා PR ට සමාන්තර ව LM අඳින්න.

$Q\hat{L}M$ හා $L\hat{P}R$ කෝණ මැනීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් PR හා LM සමාන්තර බව තහවුරු කරගන්න.

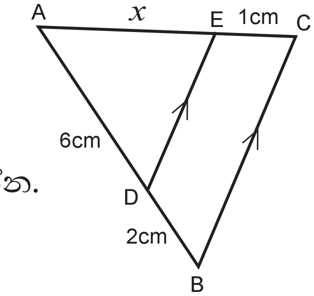
දැන් QL , LP , QM හා MR මැනීමෙන්

$\frac{QL}{LP}$ හා $\frac{QM}{MR}$ හි අගයයන් ලබා ගන්න.



මේ ආකාරයට තවත් හැකි පමණ මහා කෝණී සෘජු කෝණී හා සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණ ඇඳ එම ත්‍රිකෝණ සඳහා ප්‍රමේයය සත්‍ය බව පෙන්වන්න.

දැන් මෙම නිදසුන් හොඳින් අධ්‍යයනය කරන්න.



නිදසුන 1.

රූපයේ DE // BC නම් x හි අගය සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC // DE

ත්‍රිකෝණයක පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ යන ප්‍රමේයයට අනුව $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

$$\frac{6}{2} = \frac{x}{1}$$

$$\underline{\underline{x = 3 \text{ cm}}}$$

නිදසුන 2.

රූපයේ AB // QR වේ. x හි අගය සොයන්න.

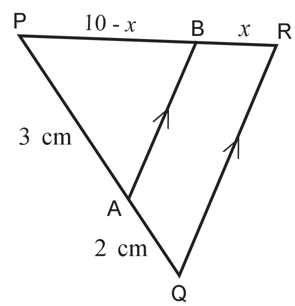
$$\frac{3}{2} = \frac{10 - x}{x}$$

$$3x = 2\,(10 - x)$$

$$3x = 20 - 2x$$

$$5x = 20$$

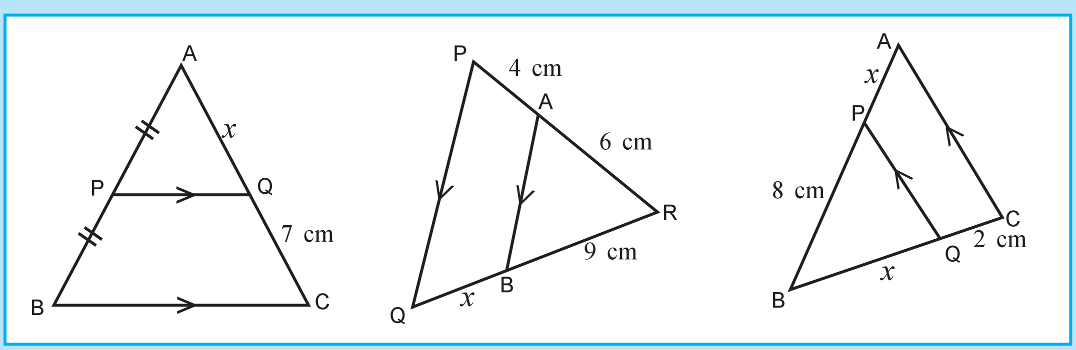
$$\underline{\underline{x = 4 \text{ cm}}}$$

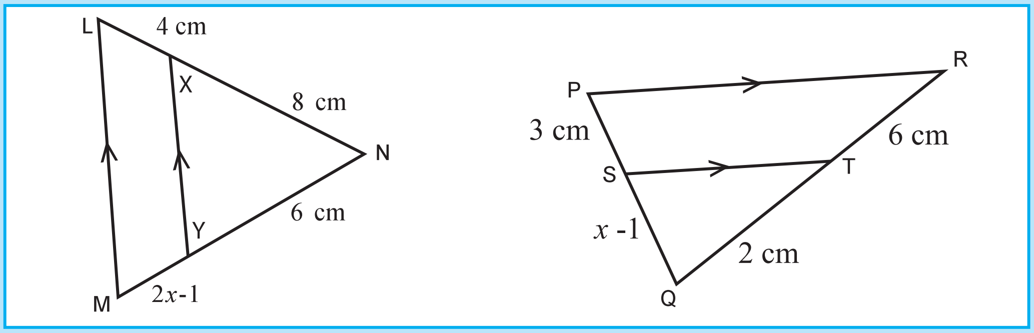


මෙම ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් පහත අභ්‍යාසයන්හි යෙදෙන්න.

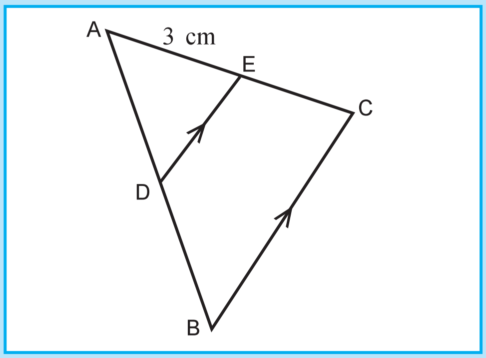
12.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ x මඟින් දක්වා ඇති රේඛා ඛණ්ඩයේ දිග සොයන්න.

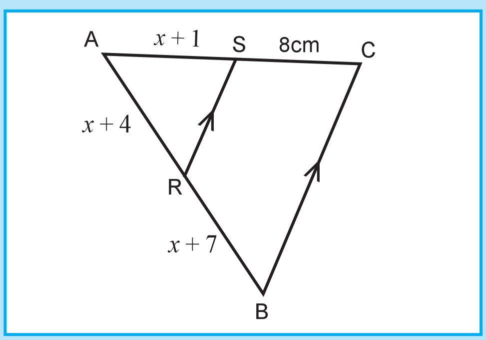




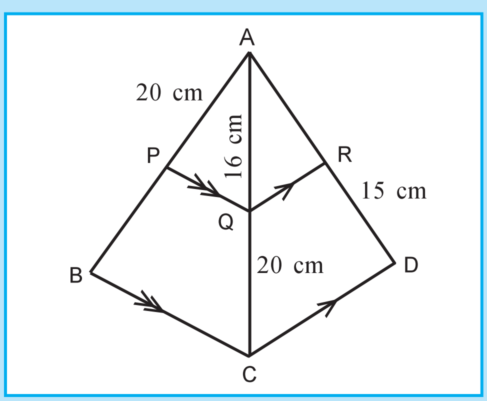
(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = 12 cm , AE = 3 cm, AC = 8 cm වේ. AD සොයන්න.



(3) ABC ත්‍රිකෝණයේ RS//BC වේ. x සඳහා එක ම එක අගයක් පමණක් පැවතිය හැකි බව පෙන්වා එය සොයන්න.

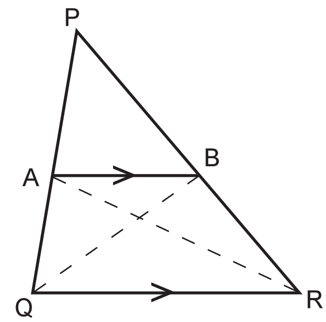


(4) රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව PB සහ AR සොයන්න.



ප්‍රමේයය සාධනය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද රේඛාවෙන් අනෙක් පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ.



දත්තය : PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ මත A ලක්ෂ්‍යය ද PR මත B ලක්ෂ්‍යය ද ඇත. AB//QR

සා.ක.යු. : $\dfrac{PA}{AQ} = \dfrac{PB}{BR}$ බව

නිර්මාණය : AR සහ BQ යා කරන්න.

සාධනය : PAB Δ හා ABQ Δ එකම උච්චයක් සහිත බැවින්

$$\frac{PAB\,\Delta}{ABQ\,\Delta} = \frac{PA}{AQ}$$

එසේම PBA $\triangle$ හා BRA $\triangle$ එක ම උච්චයක් සහිත බැවින්,

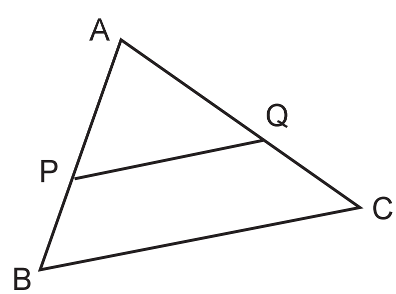
$$\frac{PBA\,\Delta}{BRA\,\Delta} = \frac{PB}{BR}$$

නමුත් ABQ $\triangle$ = BRA Δ (AB ආධාරකය හා AB// QR බැවින්)

$$\therefore\ \frac{PAB\,\Delta}{ABQ\,\Delta} = \frac{PAB\,\Delta}{BRA\,\Delta}$$

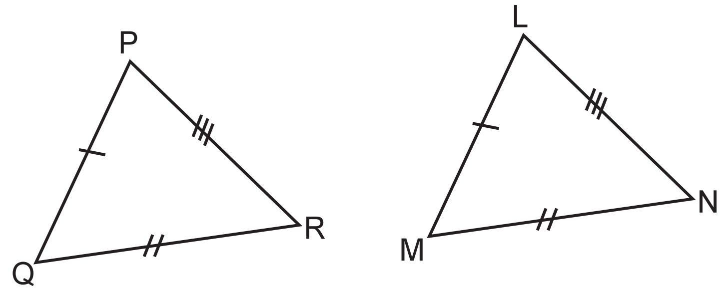
$$\therefore\ \frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BR}$$

ප්‍රමේයයේ විලෝමය : සරල රේඛාවක් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමානුපාතික ලෙස බෙදයි නම් එම සරල රේඛාව තුන්වැනි පාදයට සමාන්තර වේ.



$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ වේ නම් PQ//BC වේ.

12.2 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ



PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ දෙක බලන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙක අංග සම වේ.

$\therefore$ PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$$\hat{P} = \hat{L}$$

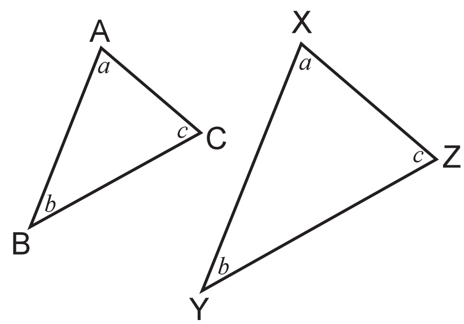
$$\hat{Q} = \hat{M}$$

$$\hat{R} = \hat{N}$$ ද වේ.

එක් ත්‍රිකෝණයක කෝණ තුන තවත් ත්‍රිකෝණයක කෝණ තුනට සමාන නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ.

PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ අංගසම වන අතර ඒවා සමකෝණික ද වේ.
මේ අනුව

අංගසම ත්‍රිකෝණ සෑමවිට ම සමකෝණික ද වේ.



ABC හා XYZ ත්‍රිකෝණ දෙක බලන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$$\hat{A} = \hat{X}$$

$$\hat{B} = \hat{Y}$$

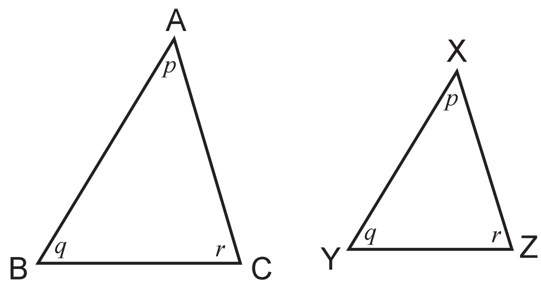
$$\hat{C} = \hat{Z}$$ වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන XYZ ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුනට සමාන ය.
මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම ද? එසේ නැති බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

එහෙත් මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ. ඒවා හැඩයෙන් සමාන නමුත් අංගසම නැත.

සමකෝණික ත්‍රිකෝණ සෑම විට ම අංගසම වන්නේ නැත.

ප්‍රමේයය.
සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

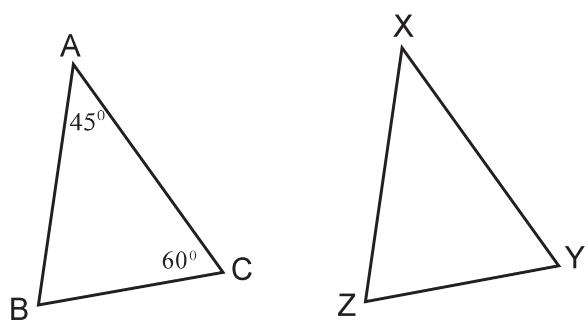


ABC හා XYZ ත්‍රිකෝණ සමකෝණී වේ.

$$\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}=\frac{AC}{XZ}$$

12.2 ක්‍රියාකාරකම

"සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ." යන්න සත්‍යාපනය සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙ හි යෙදෙන්න.



දී ඇති කෝණ දෙකේ විශාලත්ව සහිත ව AC = 4 cm වන ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න.

YZ = 8 cm හා $\hat{Y}=\hat{C}=60^0$ ද $\hat{Z}=\hat{A}=45^0$ ද වනසේ XYZ ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න. ත්‍රිකෝණ එක එකේ ඉතිරි කෝණය මැනීමෙන් ABC හා XYZ ත්‍රිකෝණ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ බව තහවුරු කරගන්න.
දැන් AB , BC පාද ද, XY ද, XZ පාද ද මනින්න.

$\frac{AC}{YZ} = \frac{4}{8}$ බව නිර්මාණයේ දී අපි දනිමු.

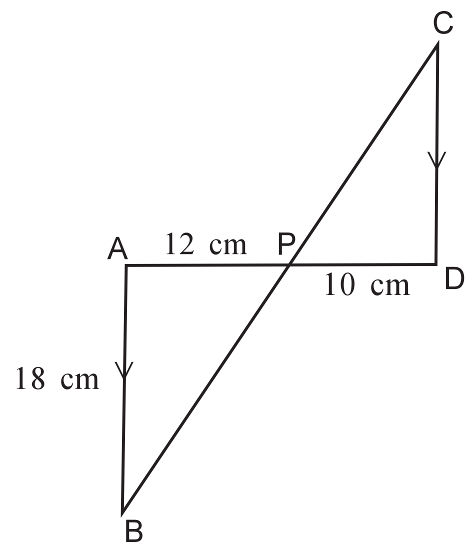
දැන් $\frac{AB}{XZ}$ ද $\frac{BC}{XY}$ ද අගය සෙවීමෙන්

ඉහත ප්‍රමේයයෙන් කියවෙන කරුණු සත්‍ය දැයි පරීක්ෂා කරන්න. විවිධ ආකාරයේ වූ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ ඇඳීමෙන් මෙම ප්‍රමේයය තවදුරටත් සත්‍යාපනය කිරීමට උත්සාහ ගන්න.

> **ප්‍රමේයයේ විලෝමය**
> ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික නම් ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ.

නිදසුන 3.

රූපයේ AB//CD වේ. CD හි දිග සොයන්න.



APB හා PDC $\triangle$ දෙකේ

$A\hat{P}B = C\hat{P}D$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$A\hat{B}P = P\hat{C}D$ (ඒකාන්තර කෝණ AB//CD)

$\therefore B\hat{A}P = P\hat{D}C$ (ත්‍රිකෝණවල ඉතිරි කෝණ)

$\therefore$ APB $\triangle$ හා PDC $\triangle$ සමකෝණික වේ.

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{CD} = \frac{BP}{PC}$$

AP = 12 cm , PD = 10 cm , AB = 18 cm බැවින්

$$\frac{12}{10} = \frac{18}{CD}$$

$$\therefore CD = \frac{18 \times 10}{12}$$

$$= \underline{\underline{15 \text{ cm}}}$$

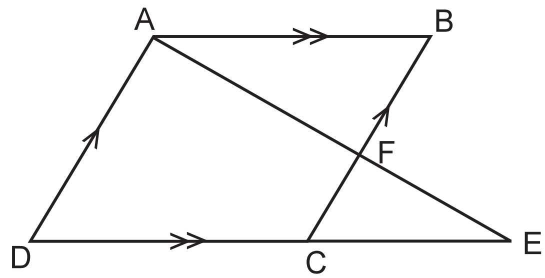
නිදසුන 4.

F යනු ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කරන ලද AF සහ DC රේඛා E හි දී හමු වේ.

(i) ECF හා ABF ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

(ii) EC : AB = FC : BF බව පෙන්වන්න.

පළමුව මෙම දත්ත දක්වෙන සේ රූපසටහනක් ඇඳ ගනිමු



දැන් ABF හා ECF ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$A\hat{F}B = C\hat{F}E$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$A\hat{B}F = F\hat{C}E$ (ඒකාන්තර කෝණ, AB//DC)

$B\hat{A}F = F\hat{E}C$ (ඒකාන්තර කෝණ, AB//DC)

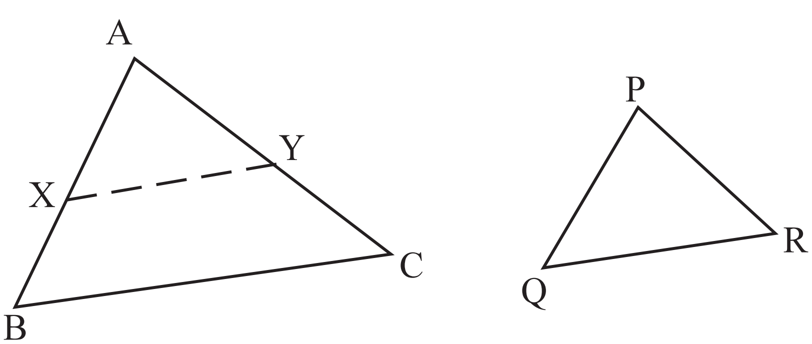
$\therefore$ ABF $\triangle$ හා ECF $\triangle$ සමකෝණික වේ.

ඉහත ප්‍රමේයයට අනුව

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BF}{FC} = \frac{AF}{FE}$$

$\therefore$ EC : AB = FC : BF

සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ යන ප්‍රමේයය සාධනය කරමු.



දත්තය : ABC , PQR ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\hat{A} = \hat{P}$ ද $\hat{B} = \hat{Q}$ ද $\hat{C} = \hat{R}$ ද වේ.

සා.ක.යු. : AB: PQ = BC : QR = CA : RP

නිර්මාණය : AX = PQ වන සේ AB මත X ලක්ෂ්‍යය ද
AY = PR වනසේ AC මත Y ලක්ෂ්‍යය ද ලකුණු කරන්න.
XY යා කරන්න.

සාධනය : AXY හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$\hat{A} = \hat{P}$ (දත්තය)

AX = PQ (නිර්මාණය)

AY = PR (නිර්මාණය)

$\therefore AXY\triangle = PQR\triangle$ (පා.කෝ.පා.)

එබැවින් $A\hat{X}Y = P\hat{Q}R$

එහෙත් $P\hat{Q}R = A\hat{B}C$ (දත්තය)

$\therefore A\hat{X}Y = A\hat{B}C$

මේවා අනුරූප කෝණ බැවින් XY//BC වේ.

$$\therefore \frac{BX}{XA} = \frac{CY}{YA}$$

$$\frac{BX}{XA} + 1 = \frac{CY}{YA} + 1$$ (දෙපසට ම 1 බැගින් එකතු කිරීමෙන්)

$$\frac{BX + XA}{XA} = \frac{CY + YA}{YA}$$

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$$

එහෙත් AX = PQ (නිර්මාණය)

AY = PR (නිර්මාණය)

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

එසේම $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

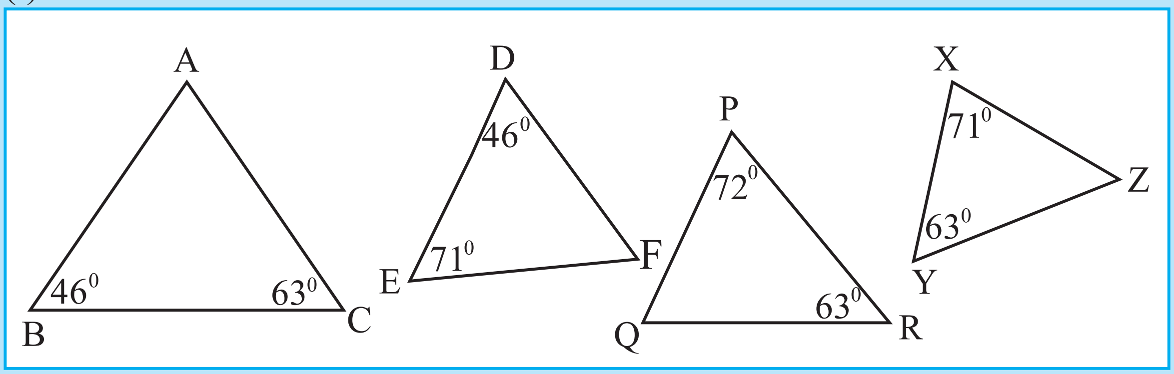
$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

$\therefore$ AB : PQ = BC :QR = CA : RP

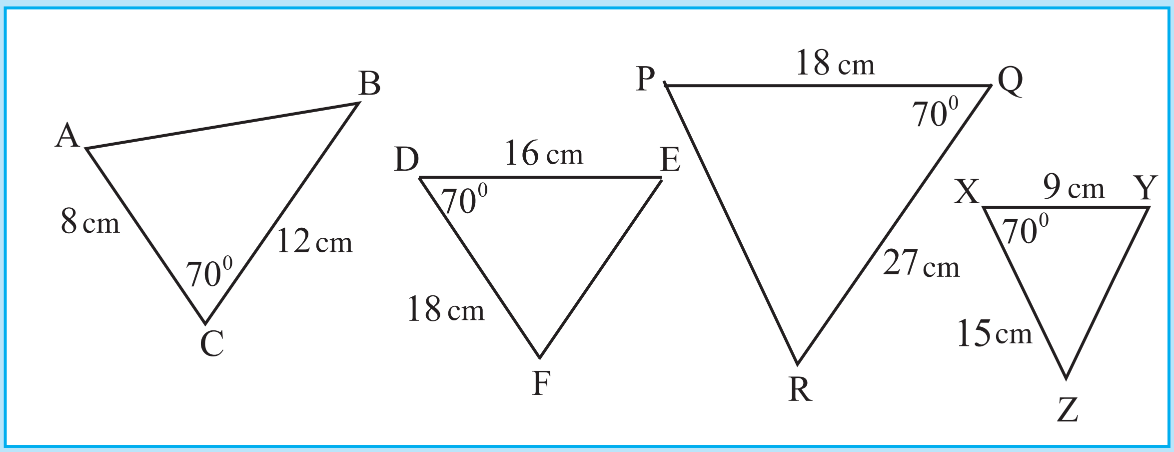
12.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත ත්‍රිකෝණ කට්ටල අතුරෙන් සමකෝණික ත්‍රිකෝණ තෝරන්න. ඒවා සමකෝණික බවට හේතු දක්වන්න.

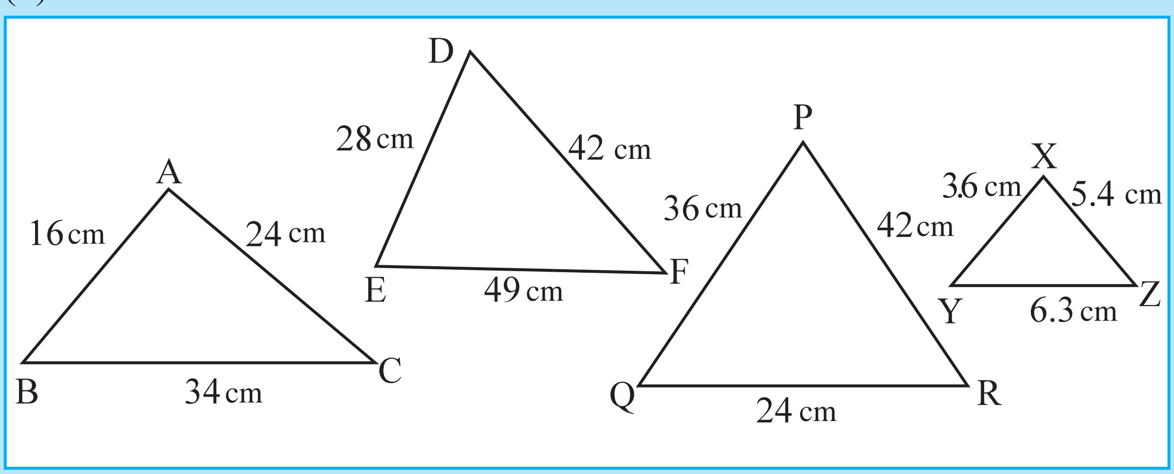
(i)



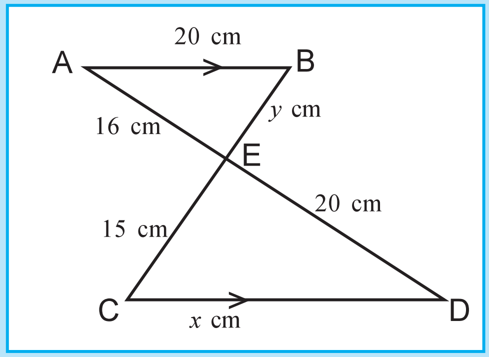
(ii)



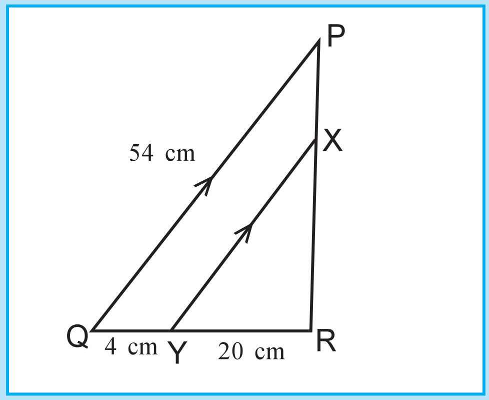
(iii)



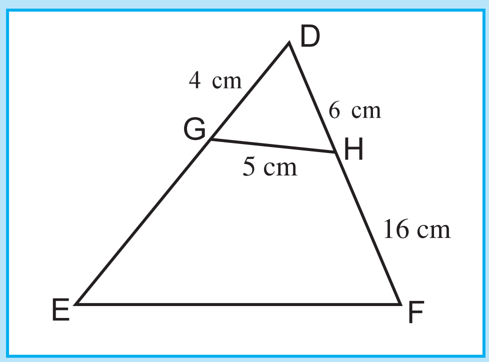
(2) මෙහි AB//CD වේ. AEB හා EDC △ සමකෝණික බව පෙන්වා CD සහ BE සොයන්න.



(3) PQR ත්‍රිකෝණයේ PR = 36 cm වේ. PQ//XY වේ. XY සහ RX සොයන්න.

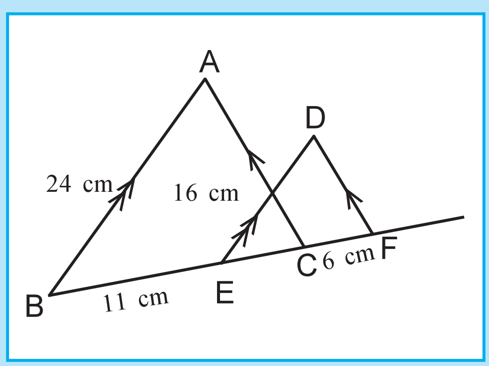


(4) රූපයේ $D\hat{G}H = E\hat{F}D$, නම් DGH හා DFE ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න. GE සහ EF සොයන්න.

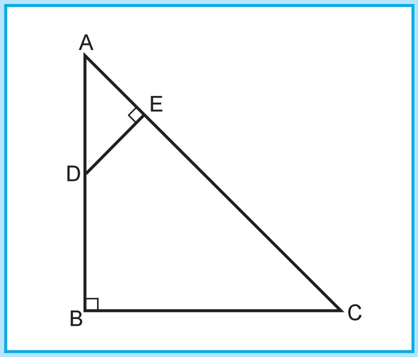


(5) රූපයේ AB//DE , AC//DF වේ.
ABC හා DEF ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න.
EC දිග සොයන්න.

CF = 6 cm BE = 11 cm
AB = 24 cm DE = 16 cm



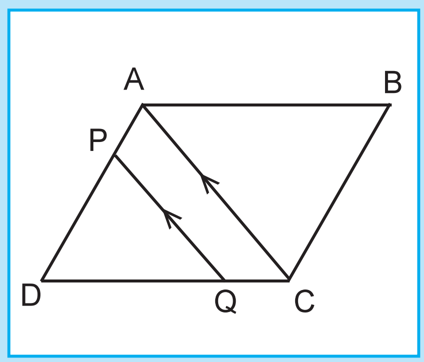
(6) රූපයේ $A\hat{B}C = A\hat{E}D = 90^0$ වේ. AED හා ABC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව සාධනය කරන්න.
AE : AB = DE : BC බව පෙන්වන්න.



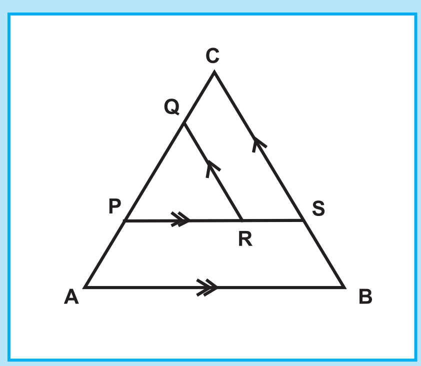
(7) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයේ BD විකර්ණයට A සිට ඇඳි ලම්බය AE වේ.
AD : BD = ED : BC බව සාධනය කරන්න.

(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{A}$ සෘජුකෝණයකි. A සිට BC ට ඇඳි ලම්බය AD වේ.
$AB^2 = BD. BC$ බව සාධනය කරන්න.

(9) ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි
AC//PQ වේ.
AB . PQ = AC . DQ බව සාධනය කරන්න.



(10) රූපයේ ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = BC වේ. P හා Q යනු AC මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. P හරහා AB ට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව S හි දී BC හමුවෙයි. Q හරහා CB ට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවR හි දී PS හමුවෙයි.
AB : AC = PR : PQ බව සාධනය කරන්න.



13 වර්ගජ සමීකරණ

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- සාධක මගින් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම
- වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම
- සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබාගත හැකි ය.

13.1 හැඳින්වීම

ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගත් වීජීය ප්‍රකාශනයක් සාධකවල ගුණිතයක් සේ දැක්වීම සඳහා අනුගමනය කරන ලද ක්‍රමවේදයන් පිළිබඳ ව අවධානය යොමු කරමු.

- පොදු සාධක ඇත්නම් පළමු ව පොදු සාධක හඳුනාගැනීම.
- පද දෙකෙන් දෙක පොදු සාධක වෙන් කිරීම මගින් ප්‍රකාශනයේ සාධක හඳුනා ගැනීම.
- වර්ග දෙකක අන්තරය දැක්වෙන ප්‍රකාශනයක සාධක හඳුනාගැනීම.
- වර්ගජ ප්‍රකාශනයක සාධක හඳුනාගැනීම.
- ඔබ ලබාගත් සාධකවල ගුණිතය පළමු ව දී ඇති වීජීය ප්‍රකාශනයට සමාන විය යුතු වීම.

13.1 අභ්‍යාසය

සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(1) x^2+7x (2) $9x^2-18x$ (3) $4y^2-25$

(4) $ax-ay-bx+by$ (5) $3x^2+xy-6x-2y$ (6) x^2-x-20

(7) $x^2+15x+36$ (8) $y^2-12y+20$ (9) $a^2-15a-54$

(10) $2c^2-c-6$ (11) $6x^2+13x+6$ (12) $4y^2-12y+9$

(13) $30+7y-y^2$ (14) $48-19a+a^2$ (15) $24+k-3k^2$

(16) $25+20p+4p^2$ (17) $2x^3-8x$ (18) $30x^3+17x^2-2x$

13.2 ශුන්‍ය ගුණිය

වීජීය ප්‍රකාශනයක, "සාධක කිහිපයක ගුණිතය ශුන්‍යයට සමාන වේ නම් අඩු ම වශයෙන් එක් සාධකයක් හෝ ශුන්‍යයට සමාන වේ."

ඉහත සඳහන් කළ සංකල්පය භාවිතයට ගනිමින් $3x^2 - 15x = 0$, $y^2 + 3y - 40 = 0$ හා $3p^2 - 2p - 5 = 0$ බඳු වූ වර්ගජ සමීකරණ සාධක මගින් විසඳිය හැකි වේ.

නිදසුන 1.

$3x^2 - 15x = 0$ විසඳන්න.

$$3x(x-5) = 0$$

$3x = 0$ හෝ $x - 5 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ හෝ $\underline{\underline{x = 5}}$

නිදසුන 2.

$y^2 + 3y - 40 = 0$ විසඳන්න.

$$y^2 + 8y - 5y - 40 = 0$$
$$y\,(y + 8) - 5\,(y + 8) = 0$$
$$(y + 8)\,(y - 5) = 0$$

$y + 8 = 0$ හෝ $y - 5 = 0$

$\underline{\underline{y = -8}}$ හෝ $\underline{\underline{y = 5}}$

නිදසුන 3.

$\dfrac{3}{2p-1} - \dfrac{2}{3p+2} = 1$ විසඳන්න.

$$\frac{3(3p+2) - 2(2p-1)}{(2p-1)(3p+2)} = 1$$
$$3\,(3p+2) - 2\,(2p-1) = (2p-1)\,(3p+2)$$
$$9p + 6 - 4p + 2 = (2p-1)(3p+2)$$
$$5p + 8 = 6p^2 + 4p - 3p - 2$$
$$6p^2 - 4p - 10 = 0$$
$$3p^2 - 2p - 5 = 0$$
$$(p+1)(3p-5) = 0$$

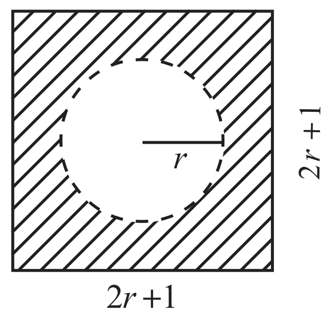
$p+1=0$ හෝ $3p-5=0$

$p=-1$ හෝ $3p=5$

$\underline{\underline{p=-1}}$ හෝ $\underline{\underline{p=\frac{5}{3}}}$ එනම් $\underline{\underline{p=1\frac{2}{3}}}$

නිදසුන 4.

දී ඇති රූපයේ පැත්තක දිග 2r + 1 වන සමචතුරස්‍රයක් තුළ අරය r වූ වෘත්තයක් ඇඳ ඇත. අඳුරු කළ කොටසේ වර්ගඵලය 71 cm^2 වේ නම් r හි අගය ගණනය කරන්න. ($\pi=\frac{22}{7}$ ලෙස ගන්න)



$$(2r+1)^2-\pi r^2=71$$

$$4r^2+4r+1-\frac{22}{7}r^2=71$$

$$28r^2+28r+7-22r^2=497$$

$$6r^2+28r+7-497=0$$

$$6r^2+28r-490=0$$

$$3r^2+14r-245=0$$

$$(r-7)(3r+35)=0$$

$r-7=0$ හෝ $3r+35=0$

$3r=-35$

$r=7$ හෝ $r=-\frac{35}{3}$

වෘත්තයේ අගය සෘණ අගයක් විය නොහැකි ය.

$\underline{\underline{\therefore r=7}}\,\text{cm}$

13.2 අභ්‍යාසය

සාධක භාවිතයෙන් පහත සඳහන් ගැටලු විසඳන්න.

(1) $4x^2=8x$ (2) $\frac{1}{2}x^2+5x=0$

(3) $y(y+1)=12$ (4) $a(a-5)=24$

(5) $p^2=4(8-p)$ (6) $24=c(10-c)$

(7) $15k^2 = 2k + 1$

(8) $6(a-1)(a+1) = 5a$

(9) $4x(x+3) + 9 = 0$

(10) $4x^3 = 25x$

(11) $y(y-4) = 2(y+8)$

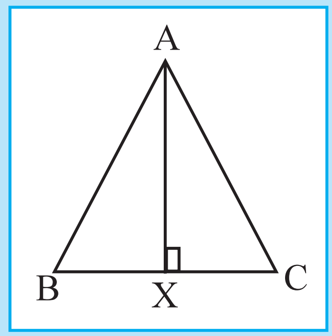
(12) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} = 8$

(13) $\frac{4}{a} + \frac{3}{a+1} = 3$

(14) $\frac{2}{p-1} - \frac{3}{p+1} = 1$

(15) අනුයාත ධන ඔත්තේ සංඛ්‍යා දෙකක වර්ගයන්ගේ ඓක්‍යය 74 කි. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

(16) සංඛ්‍යාවක පරස්පරයේ සිවු ගුණය සංඛ්‍යාවට එකතු කළ විට ප්‍රතිඵලය 4 ක් වේ. සංඛ්‍යාව සොයන්න.



(17) දී ඇති ABC Δ යේ BC ආධාරකයේ දිග $3\,p$ cm වන අතර AX උච්ච රේඛාවේ දිග $(p+3)$ cm වේ. ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $27\,\text{cm}^2$ නම්

(i) p අඩංගු වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනඟන්න.

(ii) p හි අගය සොයා BC ආධාරකයේ දිග සඳහන් කරන්න.

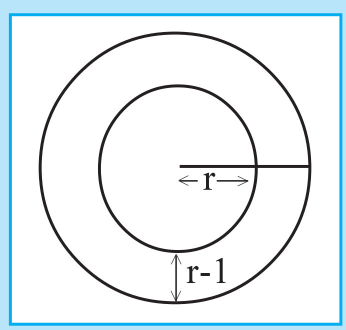
(18) සෘජුකෝණාස්‍රාකාර මේස ලෑල්ලක දිග , එහි පළලට වඩා $\frac{1}{2}$ m විශාල වේ. මේස ලෑල්ලේ වර්ගඵලය $5\,\text{m}^2$ ක් හා පළල මීටර් a නම්,

(i) මේස ලෑල්ලේ දිග a ඇසුරින් සොයන්න.

(ii) a හි අගය සොයන්න.

(iii) මේස ලෑල්ලේ පරිමිතිය සොයන්න.

(19) රූපයේ දක්වා ඇති ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත දෙකෙහි දී ඇති මිනුම් භාවිත කර වර්ගඵල අතර වෙනස $50\frac{2}{7}\ \text{cm}^2$ වේ නම් r හි අගය ගණනය කරන්න.



(20) සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක පාදවල දිග $x, x-7$ හා $x+1$ වේ. මෙම දිග දී ඇත්තේ සෙන්ටිමීටර්වලිනි.

(i) පාදවල දිග ආරෝහණ පටිපාටියට පිළියෙල කරන්න.

(ii) $x > 8\text{cm}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිතයට ගෙන x ඇසුරින් වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(iv) ඉහත (iii) හි ඔබ ලබාගත් සමීකරණය විසඳීමෙන් පාද තුනෙහි දිග සොයන්න.

(21) 21, 18, 15, ... ශ්‍රේඪියේ ආරම්භක පද ගණනක එකතුව 84 ක් වේ. සමාන්තර ශ්‍රේඪී පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්

(i) පද ගණන n ලෙස ගෙන n ඇසුරින් වර්ගජ සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

(ii) ඉහත සමීකරණය විසඳීමෙන් n සඳහා අගයන් දෙකක් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. ඊට හේතු දක්වන්න.

13.3 විසඳුම් දී ඇති විට වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනැගීම

නිදසුන 5.

x හි අගයයන් 2 හා $-\frac{1}{3}$ වශයෙන් ඇති x හි වර්ගජ සමීකරණය $ax^2+bx+c=0$ යන ආකාරයෙන් දක්වන්න.

$$x=2 \quad \text{හෝ} \quad x=-\frac{1}{3}$$

$$x-2=0 \quad \text{හෝ} \quad 3x=-1$$

$$3x+1=0$$

$$\therefore (x-2)(3x+1)=0$$

$$3x^2+x-6x-2=0$$

$$\underline{\underline{3x^2-5x-2=0}}$$

නිදසුන 6.

$(2x+1)^2=25$

(i) ප්‍රසාරණය නොකර ඉහත සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) ඔබ (i) හි ලබාගත් පිළිතුරු අනුව x හි වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගන්න.

(i) $(2x+1)^2 = 25$

දෙපසෙහි ම වර්ගමූලය ගැනීමෙන්

$$2x+1 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$\therefore\ 2x+1 = 5$ හෝ $2x+1 = -5$

$2x = 5-1$ හෝ $2x = -5-1$

$x = \frac{4}{2}$ හෝ $x = \frac{-6}{2}$

$\underline{\underline{x = 2}}$ හෝ $\underline{\underline{x = -3}}$

හෝ

$(2x+1)^2 - 25 = 0$

$(2x+1)^2 - 5^2 = 0$

$(2x+1-5)(2x+1+5) = 0$

$(2x-4)(2x+6) = 0$

$2x-4 = 0$ හෝ $2x+6 = 0$

$x = \frac{4}{2}$ හෝ $x = \frac{-6}{2}$

$x = 2$ හෝ $x = -3$

(ii) $x = 2$ හෝ $x = -3$

$x-2 = 0$ හෝ $x+3 = 0$

$\therefore\ (x-2)(x+3) = 0$

$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$

$\underline{\underline{x^2 + x - 6 = 0}}$

13.3 අභ්‍යාසය

(1) වර්ගජ සමීකරණ කිහිපයක විසඳුම් පහත දක්වා ඇත. දී ඇති විසඳුම් භාවිතයට ගනිමින් x හි වර්ගජ සමීකරණය $ax^2+bx+c=0$ ආකාරයෙන් දක්වන්න.

(1) -3 හා 1　　(2) 4 හා 3　　(3) -5 හා -1

(4) $\frac{1}{2}$ හා -1　　(5) $\frac{-2}{5}$ හා $\frac{1}{2}$　　(6) $\frac{-2}{3}$ හා $-1\frac{1}{2}$

(2) $(x-3)^2 = 16$ යන සමීකරණය විසඳන්න. විසඳුම් සඳහා ගැළපෙන x හි වර්ගජ සමීකරණය ගොඩනගන්න.

13.4 පරිපූර්ණ වර්ගජ ප්‍රකාශන හා වර්ගපූරණය කිරීම

පහත සඳහන් වගුව ඔබගේ අභ්‍යාස පොතෙහි පිටපත් කර හිස්තැන් පුරවන්න. මේ සඳහා ඉදිරිපත් කළ නිදසුන් හා 10 ශ්‍රේණියේ ද්විපද ප්‍රකාශන පාඩමෙහි උගත් කරුණු භාවිතයට ගන්න.

$(x+1)^2$	x^2+2x+1	$(x-3)^2$	x^2-6x-9
$(x+2)^2$	....	$(x-4)^2$	....
$(x+3)^2$	....	$(x-5)^2$	....
$(x+5)^2$	....	$(x-6)^2$	....

ඔබ ලබාගත් ත්‍රි පද වර්ගජ ප්‍රකාශන සියල්ල **පරිපූර්ණ වර්ගජ ප්‍රකාශන** නමින් හැඳින්වේ.

මෙම විශේෂිත ප්‍රකාශනවල ඒකජ පදයේ සංගුණකයේ හරි අඩක වර්ගය තුන්වැනි පදයට සමාන වන බව ඔබ සම්පූර්ණ කරන ලද වගුව ඇසුරෙන් නිරීක්ෂණය කරන්න.

ඒ අනුව, x^2+6x පරිපූර්ණ වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් වීම සඳහා එකතු කළ යුතු නියත අගය වන්නේ කුමක් ද?

එය $\left(\frac{6}{2}\right)^2=3^2=9$ වන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

මෙහි 9, ඒකජ පදයේ සංගුණකය වන 6 හි හරි අඩක වර්ගය වේ.

එවිට ප්‍රකාශනය x^2+6x+9

එනම් $(x+3)^2$

නිදසුන 7.

x^2-5x පූර්ණ වර්ගයක් වීම සඳහා එකතු කළ යුතු නියත පදය සොයා පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

එකතු කළ යුතු අගය $=\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

$$=\frac{25}{4}$$

අගය එකතු කළ විට ප්‍රකාශනය $=x^2-5x+\frac{25}{4}$

$$\underline{\underline{=\left[x-\frac{5}{2}\right]^2}}$$

නිදසුන 8.

$x^2 - kx + p = (x+q)^2$ වේ නම් p හා q හි අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

$x^2 - kx + p$ පූර්ණ වර්ගයක් වීම සඳහා

$p = \left(\frac{-k}{2}\right)^2$ විය යුතු යි.

එවිට $(x^2 - kx + p) = x^2 - kx + \left(\frac{-k}{2}\right)^2$

$= \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$

එවිට $q = \frac{-k}{2}$, $p = \left(\frac{-k}{2}\right)^2$

එනම් $\underline{\underline{p = \frac{k^2}{4}}}$ ද $\underline{\underline{q = \frac{-k}{2}}}$

13.4 අභ්‍යාසය

(1) පරිපූර්ණ වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් වීම සඳහා එකතු කළ යුතු අගය සොයන්න. එම අගය එකතු කොට ප්‍රකාශනය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියන්න.

(i) $x^2 + 14x$ (ii) $x^2 - 5x$ (iii) $x^2 + 2ax$

(2) පහත දී ඇති සමීකරණ පරීක්ෂාකර p හි හා q හි අගයයන් සොයන්න.

(i) $x^2 + 5x + p = (x+q)^2$ (ii) $x^2 - 7x + p = (x-q)^2$

(iii) $x^2 + 18x + p = (x-q)^2$ (iv) $x^2 - \frac{2}{3}x + p = (x+q)^2$

13.5 වර්ගපූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

සාධක සහිත වර්ගජ සමීකරණ එමඟින් විසඳිය හැකි වුවත් $x^2 - 4x - 8 = 0$ වැනි සාධකවලට වෙන් කළ නොහැකි වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම සඳහා වර්ගපූරණය වැනි වෙනත් ක්‍රමයක් භාවිත කළ යුතු වේ.

නිදසුන 9.

$x^2 = 4(x+2)$ විසඳන්න. පිළිතුර දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව දෙන්න.

$$x^2 = 4(x+2)$$

වරහන් ඉවත් කිරීමෙන් $x^2 = 4x + 8$

$4x$ පදය වම් පස ලිවීමෙන්

$$x^2 - 4x = 8$$

x හි සංගුණකයේ හරි අඩක වර්ගය දෙපසට එකතු කිරීමෙන්

$$x^2 - 4x + 4 = 8 + 4$$

පූර්ණවර්ගයක් ලෙස ලිවීමෙන්

$$(x-2)^2 = 12$$

වර්ගමූල ගැනීමෙන්

$$x - 2 = \pm\sqrt{12}$$

ලඝු භාවිතයෙන්

$= \sqrt{12}$
$= 3.464$

$x - 2 = 3.464$	හෝ	$x - 2 = -3.464$
$x = 2 + 3.464$	හෝ	$x = 2 - 3.464$
$= 5.464$	හෝ	$= -1.464$
$\underline{\underline{x = 5.46}}$	හෝ	$\underline{\underline{x = -1.46}}$

x^2 හි සංගුණකය 1 නොවන අවස්ථාවේ දී x^2 හි සංගුණකයෙන් වර්ගජ සමීකරණයේ පද බෙදීමෙන් හි සංගුණකය 1 ලෙස ලබා ගන්න.

නිදසුන 10.

$2x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$ විසඳන්න. පිළිතුර දශමස්ථාන එකකට නිවැරදි ව දෙන්න.

$$2x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 + x = \frac{1}{2}$$

වර්ගජ පදයේ සංගුණකය වූ 2 න් සමීකරණය බෙදීමෙන්

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

ඒකජ පදයේ සංගුණකයේ හරි අඩක වර්ගය දෙපසටම එකතු කිරීමෙන්

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

පූර්ණවර්ගයක් සේ ලිවීමෙන්

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\boxed{\sqrt{5} = 2.236}$$

වර්ගමූලය ගැනීමෙන්.

$$x+\frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{5}}{4} = \pm\frac{2.236}{4}$$

$x+\frac{1}{4} = \frac{+2.236}{4}$ හෝ $x+\frac{1}{4} = \frac{-2.236}{4}$

$x = \frac{-1+2.236}{4}$ හෝ $x = \frac{-1-2.236}{4}$

$x = \frac{1.236}{4}$ හෝ $x = \frac{-3.236}{4}$

$x = 0.309$ හෝ $x = -0.809$

$\underline{\underline{x = 0.3}}$ හෝ $\underline{\underline{x = -0.8}}$

නිදසුන 11.

$3x^2 - 21x + 8 = 0$ විසඳන්න. පිළිතුර දෙවන දශම ස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න.

$$3x^2 - 21x + 8 = 0$$

$$3x^2 - 21x = -8$$

වර්ගජ පදයේ සංගුණක වූ 3 න් සමීකරණය බෙදීමෙන්.

$$x^2 - 7x = \frac{-8}{3}$$

ඒකජ පදයේ සංගුණකය වූ 7 හි හරි අඩක වර්ගය දෙපසට ම එකතු කිරීමෙන්

$$x^2 - 7x + \left(\frac{-7}{2}\right)^2 = \frac{-8}{3} + \frac{49}{4}$$

පූර්ණ වර්ගයක් සේ ලිවීමෙන්

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-32+147}{12} = \frac{115}{12}$$

වර්ගමූලය ගැනීමෙන්

$$x-\frac{7}{2}=\pm\sqrt{\frac{115}{12}}=\pm\sqrt{9.583}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sqrt{9.583}\\&=3.095\end{aligned}}$$

$x-3.5=\pm 3.095$

$x-3.5=3.095$ හෝ $x-3.5=-3.095$

$x=3.5+3.095$ හෝ $x=3.5-3.095$

$x=6.595$ හෝ $x=0.405$

$\underline{\underline{x=6.60}}$ හෝ $\underline{\underline{x=0.41}}$

13.5 අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන වර්ගජ සමීකරණ වර්ගපූරණයෙන් විසඳන්න.

(1) $x^2-2x=4$ (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(2) $x^2=-2(4x-5)$ (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(3) $x(4x-5)=3$ (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(4) $2x^2+5x+1=0$ (පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(5) $3x^2-3x=\frac{1}{2}$ (පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(6) $3=x(2x+3)$ (පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(7) $3(x^2+1)=-8x$ (පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(8) $1=2x(3-x)$ (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(9) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x-1=0$ (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(10) $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2x+3}=1$ (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

13.6 සූත්‍ර භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

a, b හා c නියත හා $a\neq 0$ වන, $ax^2+bx+c=0$ වූ වර්ගජ සමීකරණය වර්ගපූරණයෙන් විසඳීම.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$$ ($a\neq o$ නිසා සමීකරණය a වලින් බෙදීම)

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$ (x හි සංගුණකයේ හරි අඩක වර්ගය දෙපසට ම එකතු කිරීම)

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$ (පූර්ණ වර්ගයක් සේ ලිවීම)

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

$ax^2+bx+c=0$ යන වර්ගජ සමීකරණය විසඳීම සඳහා $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ යන සූත්‍රය භාවිතයට ගත හැකි වේ.
මෙහි x^2 හි සංගුණකය a ද, x පදයේ සංගුණකය b ද, නියත අගය c ද වේ.

නිදසුන 12.

$2x^2-6x+1=0$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න. (පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදිව දෙන්න.)

මෙම සමීකරණයේ $a=2,\ \ b=-6,\ \ c=1$ වේ.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{\sqrt{28}=5.291}$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-8}}{4}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{28}}{4}=\frac{6\pm5.291}{4}$$

$$x=\frac{11.291}{4} \quad \text{හෝ} \quad x=\frac{0.709}{4}$$

$$x=2.823 \quad \text{හෝ} \quad x=0.177$$

$$\underline{\underline{x=2.82}} \quad \text{හෝ} \quad \underline{\underline{x=0.18}}$$

නිදසුන 13.

$$\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{2x+3}=1$$

$$\frac{(2x+3)-(3x-2)}{(3x-2)(2x+3)}=1$$

$$2x+3-3x+2=(3x-2)(2x+3)$$

$$(3x-2)(2x+3)=2x+3-3x+2$$

$$6x^2+9x-4x-6=-x+5$$

$$6x^2+5x-6=-x+5$$

$$6x^2+6x-11=0$$

$a=6$, $b=6$, $c=-11$ නිසා

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(6)(-11)}}{2(6)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{300}\\ =17.32\end{array}}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+264}}{12}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{300}}{12}$$

$$x=\frac{-6+17.32}{12} \quad \text{හෝ} \quad x=\frac{-6-17.32}{12}$$

$$=\frac{11.32}{12} \quad \text{හෝ} \quad x=\frac{-23.32}{12}$$

$$=0.943 \quad \text{හෝ} \quad x=-1.94$$

$$x=\underline{\underline{0.9}} \quad \text{හෝ} \quad x=\underline{\underline{-1.9}}$$

13.6 අභ්‍යාසය

සූත්‍රය භාවිතයෙන් පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න

(1) $x^2 - 4x - 1 = 0$
(පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(2) $x(x+1) = 1$
(පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(3) $2x^2 + 7x + 2 = 0$
(පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(4) $3x(x-2) - 2 = 0$
(පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(5) $x + 4 = \dfrac{6}{x}$
(පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(6) $2x = \dfrac{9}{x} - 4$
(පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(7) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{5}{x+1} = 1$
(පිළිතුර පළමු දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

(8) $\dfrac{3}{2x+1} + \dfrac{1}{x+1} = 2$
(පිළිතුර දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව දෙන්න)

14 ප්‍රස්තාර

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් සමගාමී සමීකරණ විසඳීම
- $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර ඇඳීම
- වර්ගජ ශ්‍රිතයක හැසිරීම ප්‍රකාශ කිරීම
- සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය, උපරිම හෝ අවම අගය තීරණය කිරීම
- ප්‍රස්තාරය ඇඳිමෙන් තොර ව දී ඇති වර්ගජ සමීකරණය ඇසුරෙන් සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය, උපරිම හෝ අවම අගය, වර්තන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක ලිවීම.
- ප්‍රස්තාරය ඇසුරින් වර්ගජ සමීකරණයක මූල සෙවීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබාගත හැකි ය.

14.1 සමගාමී සමීකරණ විසඳීම

මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී ප්‍රස්තාර ගැන බොහෝ කරුණු ඔබ උගෙන ඇත. චිත්‍ර ප්‍රස්තාර, ස්තම්භ ප්‍රස්තාර, වට ප්‍රස්තාර, රේඛීය ප්‍රස්තාර, වක්‍ර ප්‍රස්තාර ආදී වශයෙන් ගණිතයෙහි පමණක් නොව විවිධ විෂයන්හි දී ප්‍රස්තාර පිළිබඳ ව කරුණු හඳාරන්නට අවස්ථා සැලසී ඇත.

මීට ඉහත සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සඳහා විවිධ ක්‍රම භාවිත කළ ආකාරය සිහිපත් කරන්න. මේ පාඩම මගින් ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් සමගාමී සමීකරණ විසඳන ආකාරය උගනිමු.

නිදසුන 1.

$$x - y = 5$$
$$5x + 2y = 32$$ විසඳන්න.

$$x - y = 5 \rightarrow (1)$$

$$5x + 2y = 32 \rightarrow (2)$$

$$(1)\times 2 \quad 2x - 2y = 10 \rightarrow (3)$$
$$(2)+(3) \quad 7x = 42$$
$$x = 6$$

$x = 6$ (1) හි ආදේශ කිරීමෙන්,

$$x - y = 5$$
$$6 - y = 5$$
$$y = 1$$

$\therefore$ $\underline{\underline{x = 6}}$ සහ $\underline{\underline{y = 1}}$ වේ.

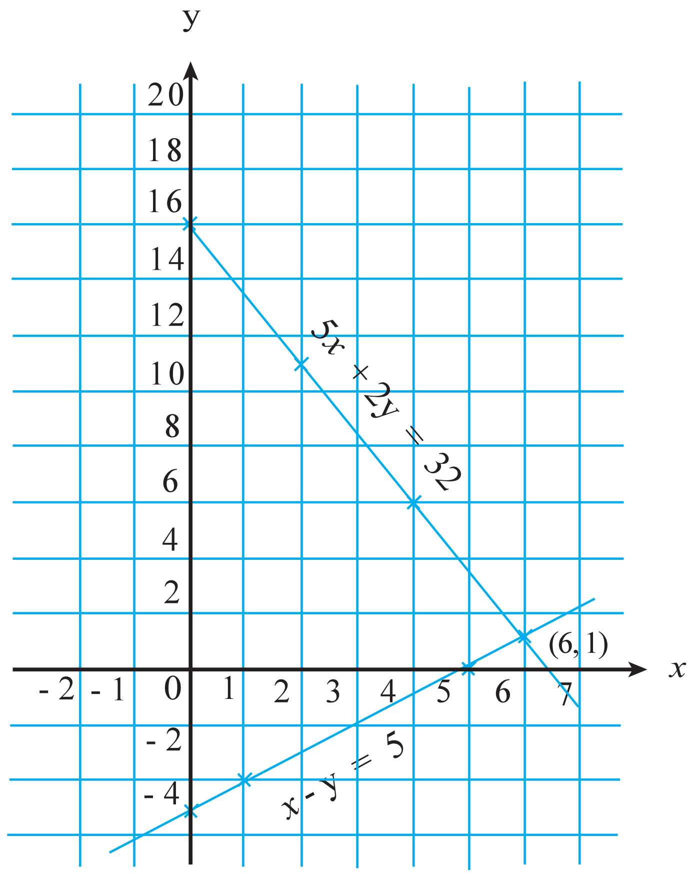
ඉහත ආකාරයට සමගාමී සමීකරණ විසඳීම, වීජීය ක්‍රමයට විසඳීම ලෙස හැඳින්වේ. ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයට ද මෙම සමීකරණ යුගලය විසඳිය හැකි ය. මේ සඳහා එම සමීකරණ දෙකේ සරල රේඛීය ප්‍රස්තාර එක ම ඛණ්ඩාංක තලයක ඇඳිය යුතු ය.

$x - y = 5$

x	0	1	5
y	-5	-4	0

$5x + 2y = 32$

x	0	2	4
y	16	11	6



සරල රේඛා දෙක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක,දී ඇති සමගාමී සමීකරණ දෙකේ විසඳුම් වේ. එනම්, ඡේදන ලක්ෂ්‍යය (6, 1) වන නිසා විසඳුම්, $x = 6$ සහ $y = 1$ වේ. වීජීය ක්‍රමයෙන් ලැබුණේ මෙම විසඳුම ම වේ.

තවත් සමගාමී සමීකරණ දෙකක් ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් විසඳමු.

නිදසුන 2.

$$2x - y = 8 \quad \rightarrow (1)$$
$$4x + 3y = 6 \quad \rightarrow (2)$$

මෙම සමීකරණ දෙකේ ප්‍රස්තාර ඇඳීමට සුදුසු අගය වගු සකස් කරමු.

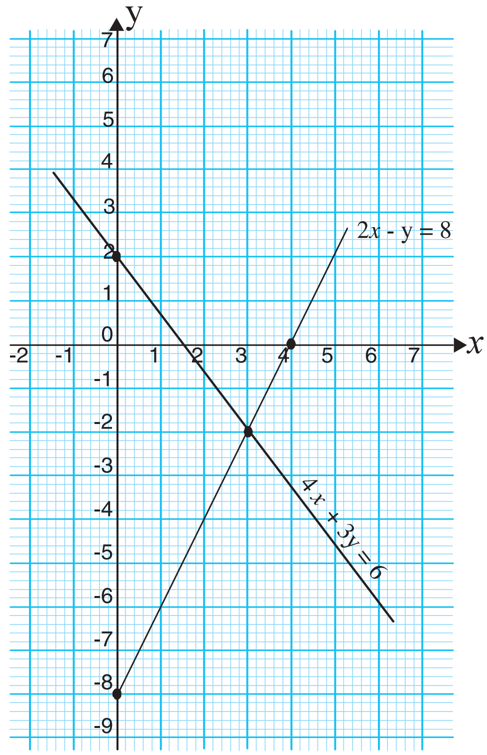
$2x - y = 8$

x	0	4	5
y	-8	0	2

$4x + 3y = 6$

x	0	3	6
y	2	-2	-6

එම සමීකරණ පහත ආකාරයට ප්‍රස්තාරගත කරමු



ප්‍රස්තාර දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක (3,-2) වේ.

∴ ඉහත සමගාමී සමීකරණ දෙකේ විසඳුම

$x = 3$ සහ $y = -2$ වේ.

14.1 අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන සමගාමී සමීකරණ ප්‍රස්තාර මගින් විසඳන්න.

(1) $2x + 3y = 9$
$x - y = 2$

(2) $4x + 3y = 6$
$2x - y = 8$

(3) $x - y = 5$
$2x + 3y = 25$

(4) $y - 2x = 3$
$x + y = 6$

(5) $3x - y = 4$
$y - x = 8$

මෙම සමගාමී සමීකරණ වීජීය ක්‍රමයට ද විසඳා ප්‍රස්තාරික විසඳුම් සමග සසඳන්න.

14.2 $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ සමීකරණයක ප්‍රස්තාරය

$y = ax^2 + b$ ප්‍රස්තාරවල $a > 0$ විට ප්‍රස්තාරයට අවම අගයක් ඇති බවත්, $a < 0$ විට ප්‍රස්තාරයට උපරිම අගයක් ඇති බවත් ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ ප්‍රස්තාර යටතේ උගත්තෙහි ය.

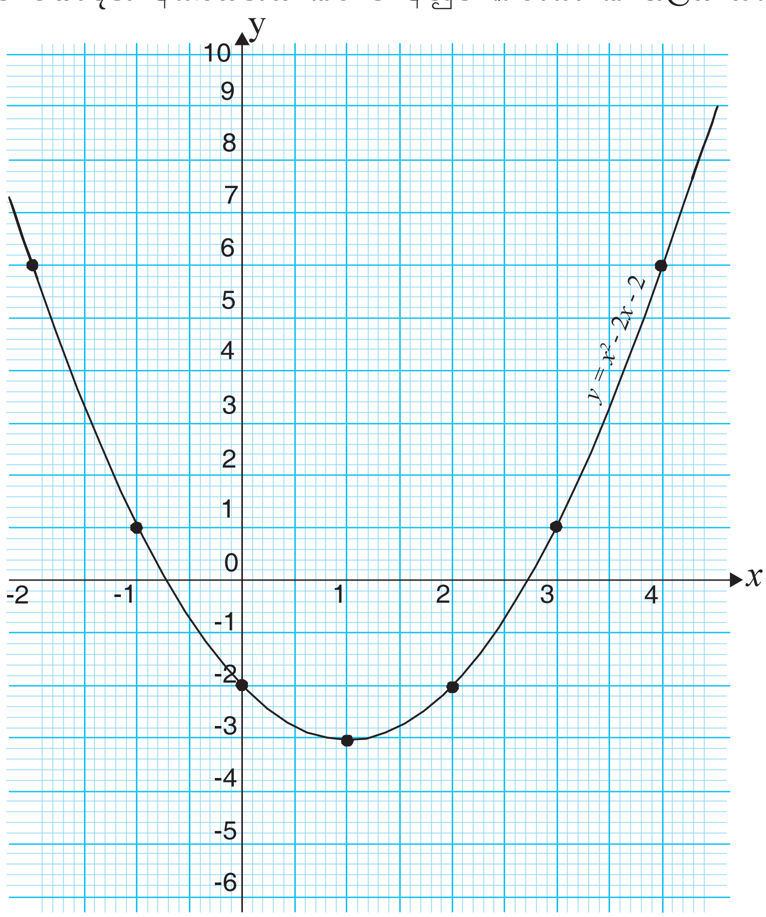
$y = x^2 - 2x - 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු.

මේ සඳහා x හි අගයන් $x = -2$ සිට $x = 4$ තෙක් ගනිමින් වගුවක් පිළියෙල කරන්න.

$$y = x^2 - 2x - 2$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා ඛණ්ඩාංක තලයක් සකස් කරන්න. මෙහි දී x අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10 කින් ඒකක 1 ක් ද y අක්ෂය දිගේ කුඩා කොටු 10 කින් ඒකක 2 ක් ද දැක්වෙන සේ පරිමාණය ගත් විට ප්‍රස්තාරය ඇඳීම පහසු වේ. ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට පෙර x හා y හි විසිරීම හොඳින් අධ්‍යයනය කර ඒ අනුව ඛණ්ඩාංක තලය සකස් කරන්න.



ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් පහත සඳහන් කරුණු නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය.

- මෙම ප්‍රස්තාරය පරාවලයක් වන අතර එය $x = 1$ රේඛාව වටා සමමිතික වේ.
- එබැවින් ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 1$ වේ.
- x හි අගය - 0.7 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය හෙවත් ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව අඩු වේ.
- x හි අගය - 0.7 විට ශ්‍රිතයේ අගය 0 වේ.
- x හි අගය - 0.7 සිට 1 දක්වා වන විට y හි අගය සෘණ ව අඩු වේ.
- x හි අගය 1 සිට 2.7 දක්වා වන විට y හි අගය සෘණ ව වැඩි වේ.
- x හි අගය 2.7 විට y හි අගය 0 වේ.
- x හි අගය 2.7 ට වැඩි වන විට y හි අගය ධන ව වැඩි වේ.
- ප්‍රස්තාරයේ අවම අගය -3 වේ.

x හි අගය - 0.7 ත් 2.7 ත් අතර වන විට y හි අගය සෘණ වේ. එනම් $y < 0$

එනම් ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය පරාසය $-0.7 < x < 2.7$

x හි අගය - 0.7 ට අඩු හා x හි අගය 2.7 ට වැඩි වන විට y හි අගය ධන වේ.
එනම් $y > 0$ වේ. ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාසය $x < -0.7$ හා $x > 2.7$

$x^2 - 2x - 2 = 0$ හි මූල $x = -0.7$ හා $x = 2.7$ වන්නේ ප්‍රස්තාරය
$y = 0$ රේඛාව (x අක්ෂය) $x = -0.7$ දී හා $x = 2.7$ දී ඡේදනය වන නිසා ය.

ප්‍රස්තාරයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් ඇත. එය උපරිම හෝ අවම විය හැකි ය. මෙයට වර්තන ලක්ෂ්‍යය යයි කියනු ලැබේ. ඉහත නිදසුනට අනුව ප්‍රස්තාරයේ වර්තන ලක්ෂ්‍යය අවමයකි. එහි ඛණ්ඩාංක (1, - 3) වේ.

14.2 අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර අඳින්න.

(1) (a) (i) $y = x^2 - 4$ (x හි අගයයන් -3 සිට + 3 දක්වා ගන්න.)

(ii) $y = x^2 + 2x - 3$ $(-4 \leqslant x \leqslant 2)$

(iii) $y = x^2 - 4x + 2$ $(-1 \leqslant x \leqslant 3)$

(iv) $y = x^2 + x - 2$ $(-3 \leqslant x \leqslant 3)$

(v) $y = x^2 + x - 1$ $(-4 \leqslant x \leqslant 3)$

(vi) $y = 2x^2 + 3x - 6$ $(-3 \leqslant x \leqslant 3)$

(b) මේ එක් එක් ප්‍රස්තාරයේ

(i) අවම අගය ලියන්න.

(ii) වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

(iii) සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.

(2) $y = x^2 + 4x - 1$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න. $(-5 \leqslant x \leqslant 1)$

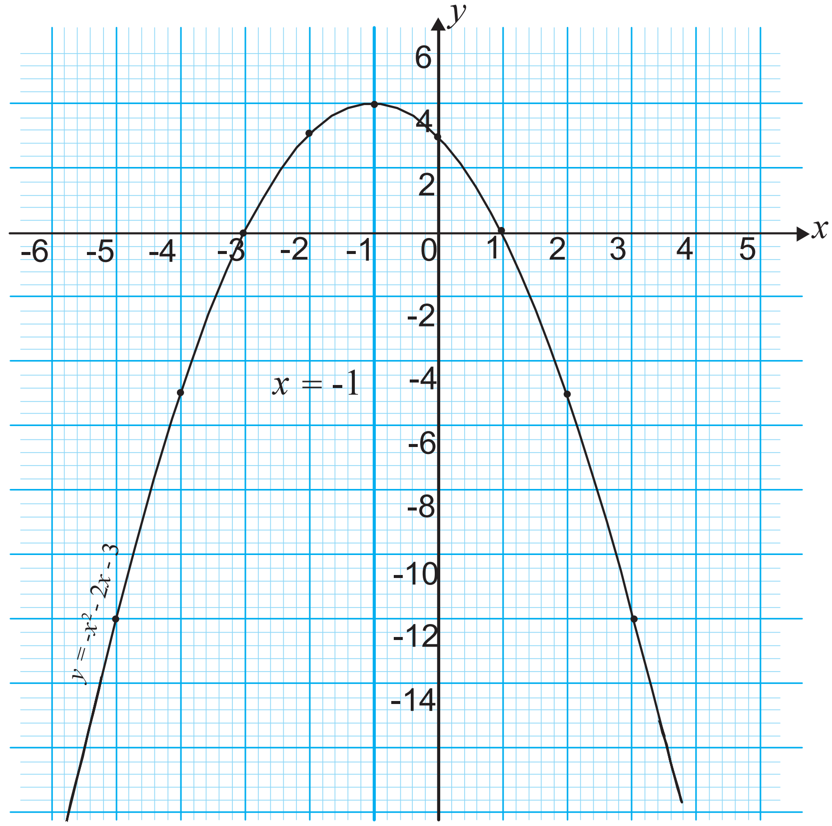
(i) ශ්‍රිතයේ අවම අගය කුමක් ද?
(ii) ශ්‍රිතයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.
(iii) ශ්‍රිතයේ වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.
(iv) ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව වැඩි වන්නේ x හි කවර අගය පරාසයක් තුළ ද?
(v) ශ්‍රිතයේ අගය ඍණ ව අඩු වන්නේ x හි කවර අගය පරාසයක් තුළ ද?
(vi) $x^2 + 4x - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

(2) $y = 2x^2 - x - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න. ඒ ඇසුරින් ඉහත (2) ප්‍රශ්නයේ (i) (ii) (iii) (iv) (v) කොටස් සඳහා පිළිතුරු ලබාගන්න.

$y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක $a < 0$ අවස්ථාවක් නිරූපණය වන ප්‍රස්තාරයක් අඳිමු.

$y = -x^2 - 2x + 3$ සඳහා $x = -5$ සිට $+3$ දක්වා අගයන් සොයමු.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-2x$	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6
+3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
y	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12



- මෙම ප්‍රස්තාරයේ සමමිතික අක්‍ෂයේ සමීකරණය $x = -1$ වේ.
- වර්තන ලක්‍ෂයේ ඛණ්ඩාංක (-1, 4) වේ.
- ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය 4 කි.
- x හි අගය -3 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය සෘණ ව වැඩි වේ.
- x හි අගය -3 දී ශ්‍රිතයේ අගය 0 වේ.
- x හි අගය -3 සිට -1 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය ධන ව වැඩි වේ.
- x හි අගය -1 සිට +1 දක්වා වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව අඩු වේ.
- x හි අගය +1 ට වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය සෘණ ව අඩු වේ.
- x හි අගය -3 හා +1 අතර වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ධන වේ. ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාසය $(-3 < x < 1)$
- x හි අගය -3 ට අඩු වන විට හා +1 ට වැඩි වන විට ශ්‍රිතය සෘණ වේ. ශ්‍රිතය සෘණ වන අගය පරාසය $(x < -3 \ , \ x > 1)$
- ප්‍රස්තාරය $y = 0$ රේඛාව (x - අක්‍ෂය) ඡේදනය වන්නේ $x = -3$ හා $x = 1$ දී ය. $-x^2 - 2x + 3 = 0$ හි මූල $x = -3$ හා $x = 1$ වේ.

14.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන සමීකරණවල ප්‍රස්තාර අඳින්න.

(a) (i) $y = -x^2 + 2x + 8 \ (-3 \leq x \leq +5)$

(ii) $y = -2x^2 + 4 \ (-3 \leq x \leq +5)$

(iii) $y = 3 - 2x^2 \ (-3 \leq x \leq +3)$

(iv) $y = 5 + 2x - x^2 \ (-2 \leq x \leq +4)$

(v) $y = 1 + x - 2x^2 \ (-3 \leq x \leq +4)$

(vi) $y = -(x + 4)(x - 3) \ (-6 \leq x \leq 5)$

(b) (i) එක් එක් ප්‍රස්තාරයේ උපරිම අගය සොයන්න.

(ii) වර්තන ලක්‍ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

(iii) සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය ලියන්න.

(2) $y = +1 - 3x - 2x^2$ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා සුදුසු අගය වගුවක් පිළියෙල කරන්න.

(i) ප්‍රස්තාරය ඛණ්ඩාංක තලයක අඳින්න.

(ii) සමමිතික අක්ෂය ඇඳ එහි සමීකරණය ලියන්න.

(iii) වර්තන ලක්‍ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

(iv) ශ්‍රිතය ධන ව පවතින x හි අගය පරාසය ලියන්න.

(v) $-1 - 3x - 2x^2 = 0$ හි මූල ලියන්න.

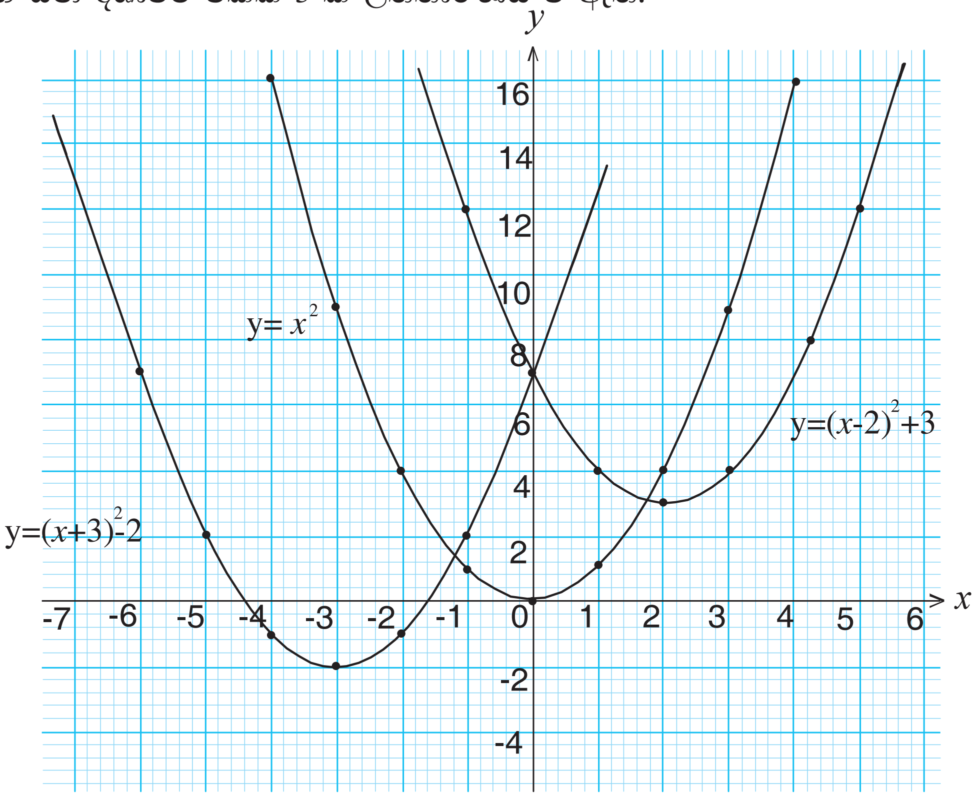
14.3 ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව වර්ගජ සමීකරණයක ප්‍රස්තාරයේ ලක්ෂණ හඳුනාගැනීම.

පළමුව $y = (x \pm a)^2 \pm b$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක ප්‍රස්තාරය සලකා බලමු.

ඛණ්ඩාංක තලයක $y = x^2$ ශ්‍රිතය ඇඳ එම ඛණ්ඩාංක තලයේ ම $y = (x\text{-}2)^2 +3$ හා $y = (x+3)^2 \text{-}2$ ප්‍රස්තාර දෙක ම අඳිමු.

$y = x^2$ ප්‍රස්තාරය සවි කඩදාසියක පිටපත් කර $y = (x\text{-}2)^2 +3$ ප්‍රස්තාරය මත හා $y = (x+3)^2\text{-}2$ ප්‍රස්තාරය මත තබා බලන්න. මේ ප්‍රස්තාර එකිනෙක සම්පාත වන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

$y = (x\text{-}2)^2 +3$ ප්‍රස්තාරය, $y = x^2$ ප්‍රස්තාරය ම x හි ධන දිශාවට ඒකක දෙකක් හා y හි ධන දිශාවට ඒකක 3 ක් උත්තාරණය වී ඇත.



- $y = x^2$ හි අවම අගය 0
  සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 0$
  වර්තන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංකය (0, 0)

- $y = (x\text{-}2)^2 + 3$ හි අවම අගය +3
  සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 2$
  වර්තන ලක්ෂායේ ඛණ්ඩාංකය (2, 3)

- $y = (x+3)^2 - 2$ හි අවම අගය -2
  සමමිතික රේඛාවේ සමීකරණය $x = -3$
  වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය (-3, -2)

නිදසුන 3.

- $y = -(x+4)^2 + 3$ ප්‍රස්තාරය උපරිම අගයක් ලැබෙන ප්‍රස්තාරයකි.

  සමමිතික රේඛාවේ සමීකරණය $x = -4$
  වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක (-4, 3) වේ.

දී ඇති $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයන්,

- $y = (x \pm p)^2 \pm q$ ආකාරයට සකස් කරමු.

$y = x^2 + 6x + 10$ සලකන්න.

මෙය වර්ග පූරණය කිරීමෙන්,

$$y = x^2 + 2\times 3x + 3^2 + 1$$

$$y = -\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 + 1$$

$$y = (x+3)^2 + 1$$

ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මේ අනුව, $y = (x \pm p)^2 \pm q$ සාධාරණ සමීකරණය සමඟ සැසඳීමෙන්
p = 3 හා q = 1 ද වේ.

ඒ අනුව, සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -3$ හා අවම අගය 1 ද වේ.
වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක (-3, 1) ද වේ.

නිදසුන 4.

- $y = \frac{5}{4} - x - x^2$ සමීකරණයේ සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය වර්තන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක, හා උපරිම අගය ද සොයන්න.

$$y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$ (වර්ගජ පදයේ සංගුණකය සෘණ නිසා)

උපරිම අගය $\frac{3}{2}$ හෙවත් 1.5 වේ.

සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -\frac{1}{2}$ හෙවත් $x = -0.5$ වේ.

වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක (- 0.5 , 1.5)

14. 4 අභ්‍යාස

(1). ප්‍රස්තාර නො ඇඳ පහත දැක්වෙන වගුවේ හිස් තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

සමීකරණය	උපරිම අගය	අවම අගය	සමමිතික රේඛාවේ සමීකරණය	වර්තන ලක්ෂයේ ඛාණ්ඩාංක
$y = (x+3)^2 - 2$	.... —	-2	$x = -3$	(-3, - 2)
$y = -(x+5)^2 + 4$	+4	.... —	$x = -5$	(- 5, + 4)
$y = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 3$	....	....	....	....
$y = -(x+6)^2 - \frac{1}{4}$	....	....	....	....
$y = 2\frac{1}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$	....	....	....	....
$y = x^2 - 9$	....	....	....	....
$y = x^2 + 4$	....	....	....	....
....	-3	.... —	$x = +3$	(3, -3)
....	.... —	5	$x = -1$	(-1 , 5)

(2) උපරිම අගය $+3$ වූ ද, සමමිතික රේඛාවේ සමීකරණය $x = -4$ වූ ද වර්ගජ ශ්‍රිතයේ සමීකරණය ලියන්න. එහි වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

15 දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- පන්ති තරම අසමාන වූ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාල රේඛය නිර්මාණය
- ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය ඇඳීම
- සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම
- චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සෙවීම
- ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් දත්ත නිරූපණය කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

15.1 පන්ති තරම සමාන වූ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාල රේඛය

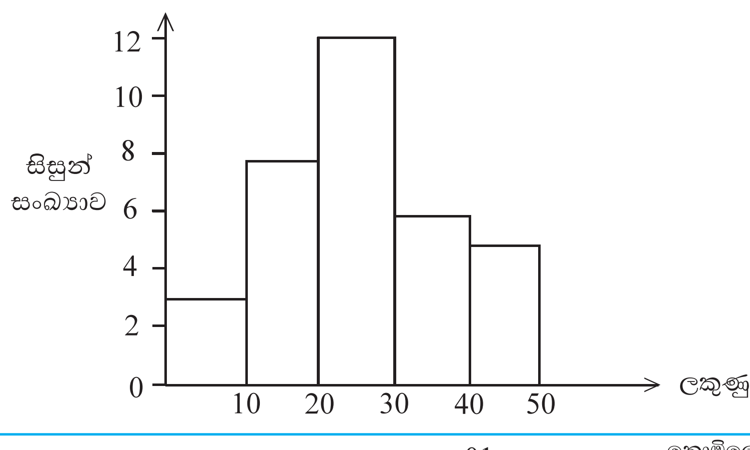
පන්ති ප්‍රාන්තර සමාන වූ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් සඳහා ජාල රේඛය ඇඳීම පිළිබඳ ව ඔබ මීට ඉහත උගෙන ඇති කරුණු මතක් කර ගැනීමට මෙම නිදසුන සලකන්න.

නිදසුන 1.

මුළු ලකුණු සංඛ්‍යාව 50 න් දෙනු ලැබූ පරීක්ෂණයක දී පන්තියක සිසුන් ලබා ගත් ලකුණු පහත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ දක්වේ. ඒ සඳහා ජාල රේඛයක් අඳින්න. මෙහි 0-10 යන්නෙන් 0 හෝ ඊට වැඩි 10 ට අඩු බව අදහස් වේ.

ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
සිසුන් සංඛ්‍යාව (සංඛ්‍යාතය)	3	8	12	6	5

මෙම තොරතුරු නිරූපණය කරන ජාල රේඛය පහත දක්වේ.



- මෙම ජාල රේඛයේ තීරවල පළල සමාන වේ.
- තීරයක උසෙන් එම පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය දැක්වේ.
- එක් එක් පන්ති ප්‍රාන්තරයට අදාළ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය සංඛ්‍යාතයට සමානුපාතික වේ.

15.1 අභ්‍යාසය

(1) ධාවන තරගයකට සහභාගී වූ එක් එක් තරගකරුවා තරගය නිම කිරීමට ගත් කාලය පහත දැක්වෙයි. එම තොරතුරු පදනම් කර ගනිමින් ජාල රේඛයක් අඳින්න. මෙහි 55 - 65 යන්නෙන් 55 හෝ ඊට වැඩි සහ 65 ට අඩු බව අදහස් වේ.

කාලය (ආසන්න මිනිත්තුවට)	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95	95 - 105
සංඛ්‍යාතය (තරගකරුවන් ගණන)	10	18	12	6	4

(2) එක්තරා දිනක දී පන්තියක සිසුන්ගේ ස්කන්ධය මැනීමෙන් ලබාගත් දත්ත පහත ව්‍යාප්තියේ දක්වා ඇත. මෙම තොරතුරු සඳහා ජාල රේඛයක් අඳින්න.

ස්කන්ධය (W) kg	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
සංඛ්‍යාතය (සිසුන් ගණන)	5	7	10	5	3

(3) ක්‍රීඩකයන් පිරිසකගේ ස්කන්ධය පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දැක්වේ. එම තොරතුරු සඳහා ජාල රේඛයක් අඳින්න.

ස්කන්ධය (W) kg	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70
(ක්‍රීඩකයන් ගණන) සංඛ්‍යාතය	5	7	10	16	8	4

(4) වෙළෙඳ පොළට හඳුන්වා දෙන නව අයිස්ක්‍රීම් වර්ගයක ආරම්භක දින 200 තුළ අලෙවි වූ ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වා ඇත. එම තොරතුරු සඳහා ජාල රේඛයක් අඳින්න.

අලෙවි වූ ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව	0 - 50	50 - 100	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300
සංඛ්‍යාතය (දින ගණන)	20	35	60	40	25	20

(5) ලොරියක පටවා තිබූ දැව කඳන්වල වට ප්‍රමාණය සෙවීමෙන් ලබා ගත් තොරතුරු පහත වගුවේ දැක්වේ.

දැව කඳක වට ප්‍රමාණය (cm)	0 - 25	25 - 50	50 - 75	75 - 100	100 - 125
සංඛ්‍යාතය (ගස් ප්‍රමාණය)	8	10	12	20	18

(i) මෙහි මාත පන්තිය සොයන්න.

(ii) මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් නිරූපණය කරන්න.

15.2 පන්ති තරම අසමාන වූ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාලරේඛය

නිදසුන 2.

එක් එක් ප්‍රමාණයේ ලෝහ දඬු නිපදවන සමාගමක එක් දිනක දී නිපදවන ලද ලෝහ දඬු ප්‍රමාණ හා ඒවායේ දිග පහත දැක්වේ.

දිග (cm)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-70	70-100	100-140
දඬු ප්‍රමාණය (සංඛ්‍යාතය)	6	7	8	10	10	9	8

මෙහි පළමු පන්ති ප්‍රාන්තර 4 හි තරම සමාන වුව ද, 5 වෙනි පන්ති ප්‍රාන්තරය 50-70 දක්වා ද, 6 වෙනි පන්ති ප්‍රාන්තරය 70-100 දක්වා ද, 7 වෙනි පන්ති ප්‍රාන්තරය 100-140

දක්වා ද වේ. මේවායේ තරම එක සමාන නො වේ. දැන් 50 - 70 , 70 -100 සහ 100 - 140 වූ ඍජුකෝණාස්‍ර සැලකූ විට, පන්ති ප්‍රාන්තරවල පළල සමාන නොවන අවසථාවල දී ද ඍජුකෝණාස්‍රවල උස සංඛ්‍යාතයට සමානුපාතික වේ. මුල් පන්ති 4හි තරම 10 බැවින් පළමු ඍජුකෝණාස්‍ර 4 හි වර්ගඵල පිළිවෙළින් 60, 70, 80 සහ 100 ක් වේ. එහෙත් 50 සිට 70 දක්වා දිගින් යුත් ලෝහ දඬු දැක්වෙන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 20 ක් වේ . තව ද මෙම ඍජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 100 ක් වන සේ එම ඍජුකෝණාස්‍රයේ උස ගණනය කරමු. එම ඍජුකෝණාස්‍රයේ උස

$\frac{100}{20}=5$ වේ. එක් පන්තියක තරම එනම් 10, ඒකක 1 ක් ලෙස සැලකූ විට 50-70 පන්ති

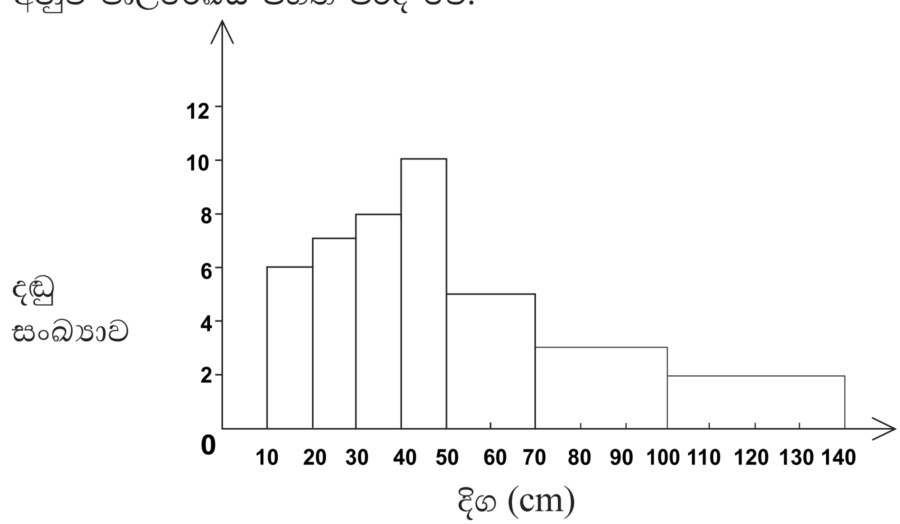
ප්‍රාන්තරයට අනුරූප ව ඍජුකෝණාස්‍රයේ උස සංඛ්‍යාතය 2 න් බෙදීමෙන් එනම් $\frac{10}{2}$ න්

ද ලැබේ.

ඒ අනුව සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත සඳහන් පරිදි ඍජුකෝණාස්‍රවල උස ද සමඟ සකසා ගත හැකි ය.

දිග cm	දඬු ප්‍රමාණය සංඛ්‍යාතය f	ඍජුකෝණාස්‍රවල උස
10 - 20	6	6
20 - 30	7	7
30 - 40	8	8
40 - 50	10	10
50 - 70	10	$10 \div 2 = 5$
70 - 100	9	$9 \div 3 = 3$
100 - 140	8	$8 \div 4 = 2$

ඒ අනුව ජාලරේඛය පහත පරිදි වේ.



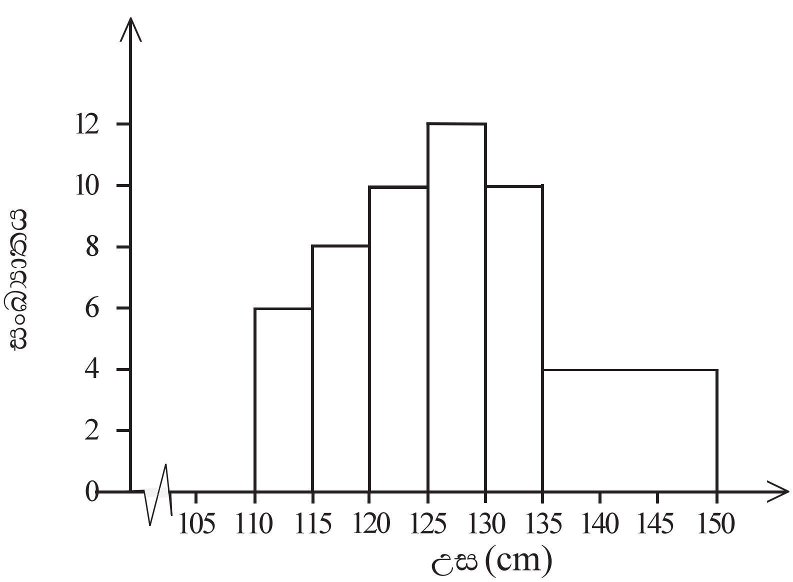
නිදසුන 3.

සිසුන් කණ්ඩායමක උස පිළිබඳ ව පහත දැක්වෙන තොරතුරු සඳහා ජාල රේඛයක් අඳින්න.

උස (cm)	සංඛ්‍යාතය (සිසුන් සංඛ්‍යාව)	සෘජුකෝණාස්‍රවල උස
110 - 115	6	6
115 - 120	8	8
120 - 125	10	10
125 - 130	12	12
130 - 135	10	10
135 - 150	12	$12 \div 3 = 4$

පන්තියක පළල වූ 5 cm ඒකක එකක් ලෙස සලකා සෘජුකෝණාස්‍රවල උස ගණනය කර ඇති ආකාරය බලන්න.

අනුරූප ජාලරේඛය පහත ආකාරයේ වේ.



මෙතෙක් සාකච්ඡා කරන ලද්දේ **සන්තතික දත්ත** ජාලරේඛයකින් නිරූපණය කරන ආකාරයයි.

දැන් පහත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සලකන්න.

නිදසුන 4

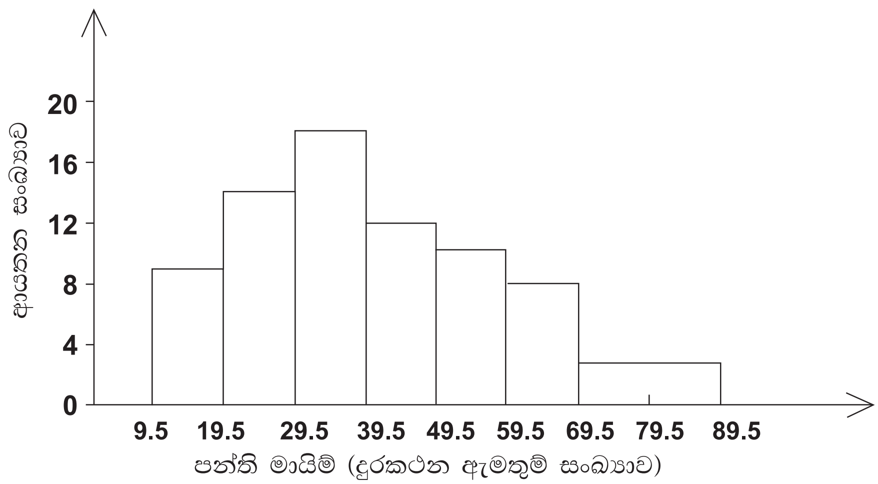
ආයතන 77 ක් දිනකට ලබා ගන්නා ලද දුරකථන ඇමතුම් පිළිබඳ ව්‍යාප්තියක් පහත වගුවේ දැක්වේ.

දුරකථන ඇමතුම් සංඛ්‍යාව	ආයතන සංඛ්‍යාව
10 - 19	9
20 - 29	14
30 - 39	18
40 - 49	12
50 - 59	10
60 - 69	8
70 - 89	6

මේවා **විවික්ත දත්ත** වේ. ඒ නිසා මෙම තොරතුරු සඳහා මුලින් සාකච්ඡා කළ ආකාරයට ජාලරේඛයන් ඇඳිය නොහැකි ය. එබැවින් මෙම දත්ත පන්ති මායිම් ඇසුරෙන් සන්තතික දත්ත ආකාරයට සකස් කර සෘජුකෝණාස්‍රවල උස ද ගණනය කර ජාලරේඛය ඇඳිය හැකි විය යුතුයි.

දුරකතන ඇමතුම් සංඛ්‍යාව	පන්ති මායිම්	ආයතන සංඛ්‍යාව	ස්තම්භවල උස
10 - 19	9.5 - 19.5	9	9
20 - 29	19.5 - 29.5	14	14
30 - 39	29.5 - 39.5	18	18
40 - 49	39.5 - 49.5	12	12
50 - 59	49.5 - 59.5	10	10
60 - 69	59.5 - 69.5	8	8
70 - 89	69.5 - 89.5	6	$6 \div 2 = 3$

ජාලරේඛය



15.2 අභ්‍යාසය

(1) එක්තරා විදුලි බුබුළු වර්ගයක ආයු කාලය සෙවීම සඳහා කරන ලද පරීක්ෂණයක තොරතුරු පහත දැක්වේ.
ඒ සඳහා ජාල රේඛයක් අඳින්න.

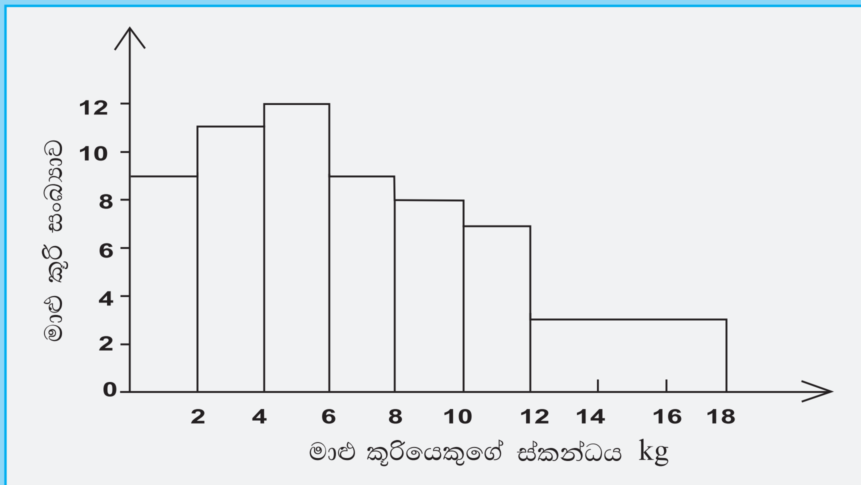
පන්ති ප්‍රාන්තර (ආයු කාලය පැය)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-1000
සංඛ්‍යාතය (විදුලි බුබුළු සංඛ්‍යාව)	10	15	12	10	8	4

(2) විභාගයක දී සිසුන් සමූහයක් ලබා ගත් ලකුණු පිළිබඳ තොරතුරු පහත දැක්වේ.

පන්ති මායිම් සැලකීමෙන් මෙම තොරතුරු සඳහා ජාලරේඛයක් අඳින්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලකුණු)	0 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50	51 - 80
සංඛ්‍යාතය (සිසුන් සංඛ්‍යාව)	6	5	8	7	5	9

(3) මාළු කුරි තොගයක ස්කන්ධය පිළිබඳ ලබාගත් තොරතුරු අනුව සකස් කරන ලද ජාලරේඛයක් පහත දැක්වේ.



(i) කිලෝග්‍රෑම් 6 - 8 දක්වා බර මාළු කුරින් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

(ii) කිලෝග්‍රෑම් 6 - 10 දක්වා බර මාළු කුරින් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

(iii) තොරතුරු ලබා ගැනීමට කිරා බලන ලද මුළු මාළු කුරින් සංඛ්‍යාව කීය ද?

15.3 සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය

දත්ත නිරූපණය සඳහා ජාලරේඛය මෙන් ම සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය ද යොදගත හැකි ය.

සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය නිර්මාණය කළ හැකි ක්‍රම දෙකකි.

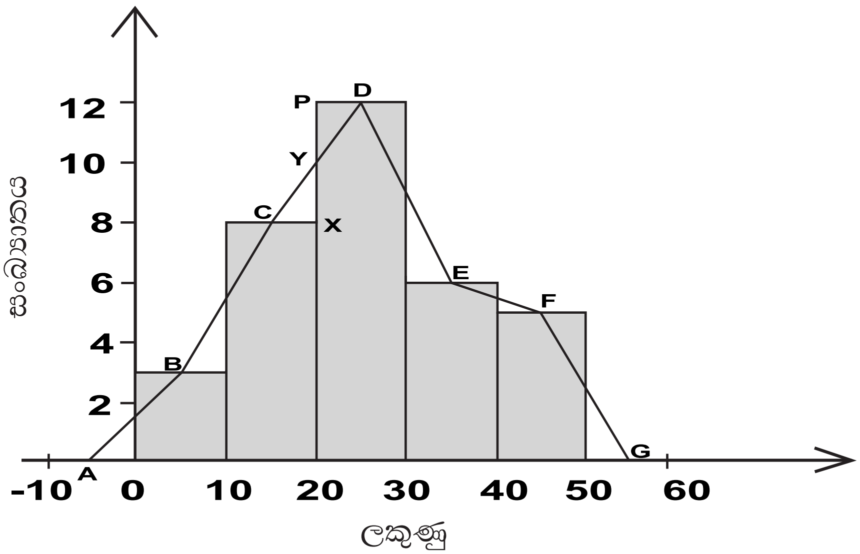
(1) ජාල රේඛය ඇසුරෙන්

(2) පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය හා සංඛ්‍යාතය ඇසුරෙන්

පන්ති ප්‍රාන්තර සමාන අවස්ථාවක ජාල රේඛයේ මුල් පන්තියට ස්තම්භයක පළලින් හරි අඩක් ඈතින් වූ ලක්ෂ්‍යයෙන් පටන් ගෙන ස්තම්භවල ශීර්ෂයන්ගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් හා අවසාන පන්තියට පසු ස්තම්භයක පළලින් හරි අඩක් ඈතින් වූ ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙළින් සරල රේඛා ඛණ්ඩවලින් යා කිරීමෙන් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය ලබා ගත හැකි ය. නිදසුන 1 හි සඳහන් පරීක්ෂණයක ලකුණු පිළිබඳ තොරතුරු නැවත සලකා බලමු.

(ලකුණු) පන්ති ප්‍රාන්තර	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
(සිසුන් සංඛ්‍යාව) සංඛ්‍යාතය	3	8	12	6	5

මෙම තොරතුරු නිරූපණය කිරීමට සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයක් නිර්මාණය කරමු. මේ සඳහා පළමු ව ජාල රේඛය ඇඳගත යුතුයි.



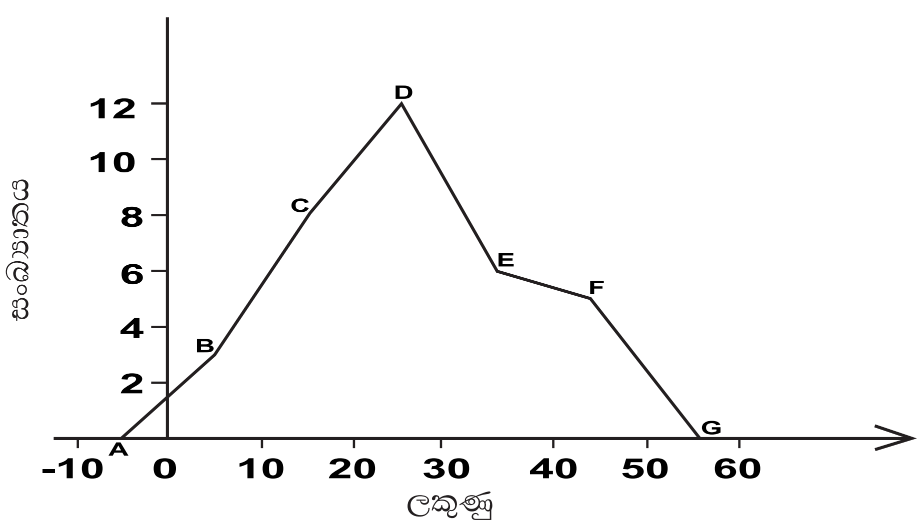
දැන් පළමු පන්තිය, එනම් 0 - 10 ට පෙර ස්තම්භයක පළලින් හරි අඩක් ඇත් ව පිහිටි A පළමු ස්තම්භයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය B ට යා කරන්න. මේ ආකාරයට B, C, D, E, F ලක්ෂ්‍ය යා කර අවසාන පන්තියට ස්ථම්භයක පළලින් හරි අඩක් ඇතින් වන G ට යා කර බහුඅස්‍රය සම්පූර්ණ කරන්න.

දැන් ලැබී ඇත්තේ සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයයි.

සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයක පහත සඳහන් ලක්ෂණ ඇත.

- සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයේ වර්ගඵලය ජාල රේඛයේ වර්ගඵලයට සමාන ය. (ජාල රේඛයෙන් ඉවත් වන වර්ගඵලය සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයට එකතු වන වර්ගඵලයට සමාන බව CXYΔ හා YPDΔ සැලකීමෙන් ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.)
- මෙම බහු අස්‍රයේ එක් පාදයක් AG එනම් x- අක්ෂය වේ.

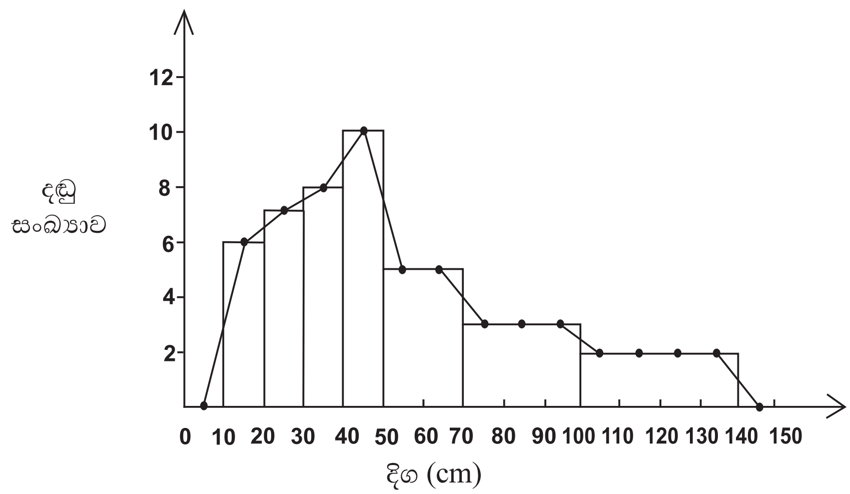
ජාලරේඛය ඇඳීමෙන් තොර ව එක් එක් පන්තියේ මධ්‍ය අගයන් එම පන්තියේ අනුරූප සංඛ්‍යාතය සමග පටිපාටිගත යුගල ලෙස ලකුණු කිරීමෙන් ද සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය නිර්මාණය කළ හැකි ය. එවිට ලැබෙන පටිපාටිගත යුගල වන (5,3) (15,8) (25,12) (35,6) (45,5) ලක්ෂ්‍ය A හා G ට යා කිරීමෙන් සංඛ්‍යාත බහු අස්‍රය ලැබේ.



15.4 තරම සමාන නොවූ පන්ති ප්‍රාන්තර සහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් සඳහා සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය

නිදසුන 5

නිදසුන් 2 හි සඳහන් සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සඳහා වූ ජාලරේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයක් අඳිමු.



සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයේ වර්ගඵලය ජාල රේඛයේ වර්ගඵලයට සමාන වන සේ ඉහත අකාරයට තරම අසමාන පන්ති ද තරම සමාන පන්තිවලට වෙන් කර ගෙන සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය ඇඳිය හැකි ය. මෙය ඉහත රූපයේ දැක්වේ.

15.3 අභ්‍යාසය

(01) ක්‍රිඩා පිට්ටනියක ක්‍රීඩා කරමින් සිටි ළමයින් සමූහයක වයස පිළිබඳ ව තොරතුරු පහත දක් වේ.

වයස (අවුරුදු)	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
ළමයින් සංඛ්‍යාව සංඛ්‍යාතය	2	7	8	10	5	3

(i) මෙම තොරතුරු නිරූපණය කිරීමට ජාලරේඛයක් අඳින්න.
(ii) ජාලරේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය අඳින්න.
(iii) ජාලරේඛයේ සහ සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රයේ වර්ගඵල පිළිබඳ ව කුමක් කිව හැකි ද?

(2) පාසලක සිසුන් 80කගේ උස පිළිබඳ ලබාගත් තොරතුරු පහත දක්වේ.

(උස cm) පන්ති ප්‍රාන්තර	110-115	115-120	120-125	125-130	130-135	135-140	140-145	145-150	150-155	155-165
සංඛ්‍යාතය (සිසුන් ගණන)	5	10	14	16	18	6	5	4	3	4

(i) ඉහත දත්ත නිරූපණය කිරීමට ජාලරේඛයක් ඇඳ ඒ ඇසුරින් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය අඳින්න.

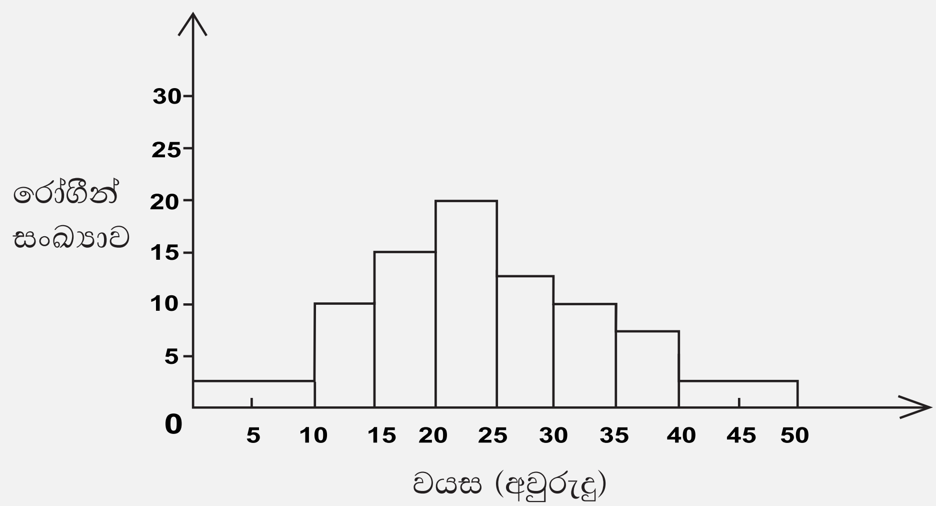
(3) එක්තරා ගමක කෘෂිකර්මාන්තයේ යෙදෙන අය පිළිබඳ ව කළ සමීක්ෂණයකින් ලබාගත් තොරතුරු පහත දක්වේ.

වයස (අවුරුදු)	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49
සංඛ්‍යාතය (නියැලෙන සංඛ්‍යාව)	5	8	10	12	7	4	2

(i) පන්ති මායිම් සැලකීමෙන් මෙම තොරතුරු සඳහා ජාලරේඛයක් අඳින්න.

(ii) ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය අඳින්න.

(4) රෝහලක සායනයකින් බෙහෙත් ගැනීමට පැමිණ සිටි රෝගීන් සමූහයක වයස පිළිබඳ ව තොරතුරු ලබාගෙන ඒවා නිරූපණය සඳහා ඇඳි ජාල රේඛයක් පහත දැක්වේ.



(i) වයස අවුරුදු 15 - 20 අතර රෝගීන් 15ක් සිටියේ නම් ජාලරේඛයට අනුව එක් එක් වයසට අදාළ ව සිටි රෝගීන් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(ii) ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය අඳින්න.

15.5 සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය හා චතුර්ථක

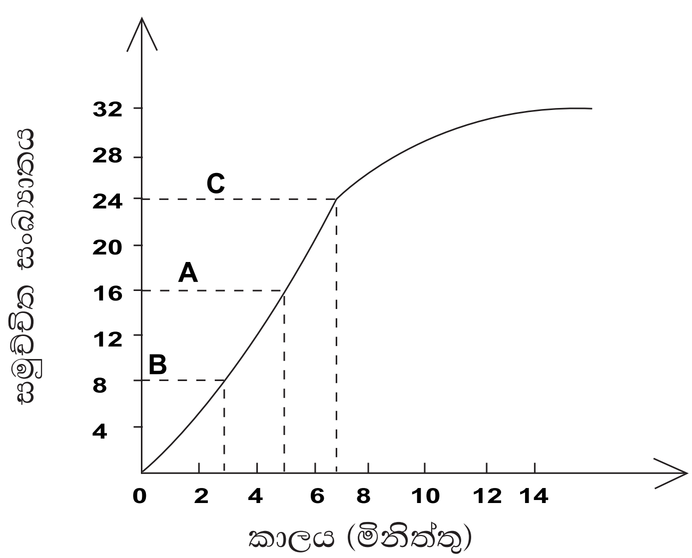
පහත දැක්වෙන වගුව බලන්න. එහි දැක්වෙන්නේ එක් දිනක දී තැපැල් කාර්යාලයකින් ලබාගත් දුරකථන ඇමතුම් සඳහා ග්‍රාහකයන් ගත කළ කාලය පිළිබඳ තොරතුරුයි.

(1) pන්ති ප්‍රාන්තරය කාලය (මිනිත්තු)	(2) සංඛ්‍යාතය (ග්‍රාහකයන් සංඛ්‍යාව)	(3) සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
0 - 2	4	4
2 - 4	6	10
4 - 6	10	20
6 - 8	8	28
8 - 10	3	31
10 - 12	1	32

සමුච්චිත සංඛ්‍යාත තීරයේ සෑම සංඛ්‍යාතයක් ම ලබා ගෙන ඇත්තේ ඒ ඒ සංඛ්‍යාතය පිහිටි පේළියේ හා ඊට ඉහළින් ඇති පේළිවල (2) තීරුවේ වූ සංඛ්‍යාත එකතු කිරීමෙනි. මෙසේ ලබා ගත් සංඛ්‍යාත , **සමුච්චිත** සංඛ්‍යාත ලෙස හැඳින්වේ. මෙවැනි වගුවකට **සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක්** යැයි කියනු ලැබේ.

වගුවේ පළමු තීරය සහ 3 වැනි තීරය සැලකීමෙන් මිනිත්තු 2 ට අඩු කාලයක් ගත් සංඛ්‍යාව 4 කි. මිනිත්තු 4 ට අඩු කාලයක් ගත් සංඛ්‍යාව 10 කි.

මේවා පටිපාටිගත යුගල ආකාරයට ලියූ විට (2 , 4) (4 , 10) (6 , 20) (8 , 28) (10 , 31) (12 , 32) ලැබේ.
මෙම ලක්ෂ්‍ය ඛණ්ඩාංක තලයක ලකුණු කර යා කිරීමෙන් පහත ආකාරයේ සුමට වක්‍රයක් ලැබේ.



මෙය **සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය** ලෙස හැඳින්වේ.

මෙම ප්‍රස්තාරයේ A ලෙස ලකුණු කර ඇති තිරස් රේඛාව බලන්න. එය ඇඳ ඇත්තේ මුළු ග්‍රාහකයන් සංඛ්‍යාව වන 32 න් හරි අඩක් වන 16 දක්වන ලක්ෂ්‍යය හරහා ය. එම 16 හරහා ඇඳි තිරස් රේඛාවට වක්‍රය හමු වන ලකෂ්‍යයේ x ඛණ්ඩාංකය 5 වේ. මෙම අගය කුමක් ද?

මැද අය ගණනට අදාළ අගය මධ්‍යස්ථය බව ඔබ දැනටමත් දන්නෙහි ය. මෙම තොරතුරුවලට අනුව මධ්‍යස්ථය මිනිත්තු 5 වේ. දැන් B හා C තිරස් රේඛා දෙක බලන්න.

B රේඛාව ඇඳ ඇත්තේ මධ්‍යස්ථයෙන් දෙකට බෙදුණු මුල් අය ගණන්වල මැද අගය හරහා ය. එනම් මුළු සංඛ්‍යාත සියල්ලේ ම එකතුව වන 32 න් $\frac{1}{4}$ වන 8 හරහා ය. මෙම රේඛාවට ප්‍රස්තාරය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයේ x ඛණ්ඩාංකය 3 වේ. මෙයට **පළමුවැනි චතුර්ථකය** යයි කියනු ලැබේ. එය Q_1 මගින් අංකනය කරමු.
ඒ අනුව $Q_1 = 3$

C රේඛාව ඇඳ ඇත්තේ මධ්‍යස්ථයෙන් දෙකට බෙදුණු අග අය ගණන්වල මැද අගය හරහා ය. එනම් මුළු සංඛ්‍යාතයෙන් $\frac{3}{4}$ වන 24 හරහා ය. මෙම රේඛාවට ප්‍රස්තාරය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයේ x ඛණ්ඩාංකය 7 කි. මෙයට **තුන්වැනි චතුර්ථකය** යැයි කියනු ලැබේ. එය Q_3 මගින් අංකනය කරමු.
ඒ අනුව $Q_3 = 7$ කි.

$(Q_3 - Q_1)$ අගය අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය ලෙස හැඳින්වේ.

මෙහි $(Q_3 - Q_1) = 7 - 3$
$= 4$
$\therefore$ අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය $= \underline{\underline{4}}$

නිදසුන 6.
ගෙයින් ගෙට ඇවිද වෙළෙඳාම් කළ තැනැත්තෙකු දින 30 ක් තුළ තම දෛනික ආදායම සටහන් කර තිබුණි. එම සටහන් අනුව සකස් කරන ලද වගුවක් පහත දැක්වේ.

ආදයම (රුපියල්)	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700
දින ගණන	2	4	5	8	6	3	2

(i) මෙම තොරතුරු නිරූපණය කරන සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.

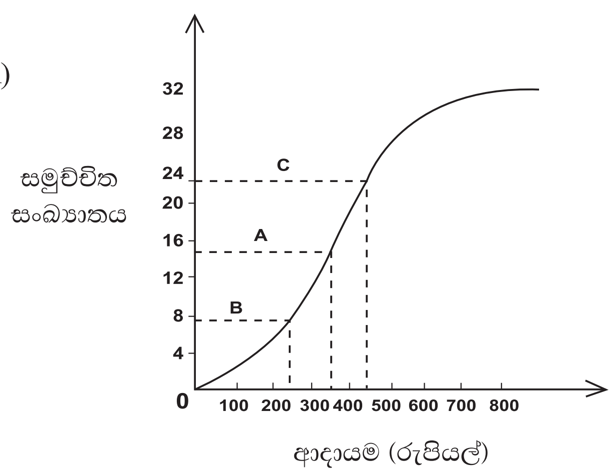
(ii) මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

(iii) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ආදයම රුපියල්)	සංඛ්‍යාතය (දින)	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
0 - 100	2	2
100 - 200	4	6
200 - 300	5	11
300 - 400	8	19
400 - 500	6	25
500 - 600	3	28
600 - 700	2	30

ඉහත වගුවට අනුව සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වක්‍රය මෙසේ ඇඳිය හැකි ය.

(i)



(ii) දිනක ලැබූ ආදයමේ මධ්‍යස්ථය
ප්‍රස්තාරයට අනුව රුපියල් 350

(iii) Q_1 පළමු චතුර්ථකය = 220

Q_3 තුන්වැනි චතුර්ථකය = 450

අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය $(Q_3 - Q_1)$ = (450 - 220)

= 230

15.4 අභ්‍යාසය

(1) ඇඟලුම් කම්හලක සේවිකාවන් පිරිසක් සතියක් තුළ නිම කරන ලද කමිස සංඛ්‍යා දැක්වීමට සකස් කළ වගුවක් පහත දැක්වේ.

කමිස සංඛ්‍යාව	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
සංඛ්‍යාතය (සේවිකාවන් ගණන)	2	4	3	3	4	6	5	4	2	4	3	4

(i) සතියක් තුළ නිම කළ කමිස සංඛ්‍යාවේ පළමු , දෙවැනි හා තුන්වැනි චතුර්ථක සොයන්න.

(ii) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

(2) පන්තියක සිසුන් 40 ක් එක්තරා වර්ෂයක් තුළ පාසලට නොපැමිණි දින ගණන් අනුව සකස් කළ වගුවක් පහත දැක්වේ.

දින ගණන	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15	16 - 18
සිසුන් සංඛ්‍යාව	3	5	8	14	7	5

(i) මෙම තොරතුරු දැක්වීමට සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් අඳින්න.

(ii) පළමුවැනි චතුර්ථකය සොයන්න.

(iii) තුන්වැනි චතුර්ථකය සොයන්න.

(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

(3) සමාන්තර පන්ති ඇති පාසලක 11 ශ්‍රේණිවල සිසුන් 240 ක් ප්‍රශ්න පත්‍රයක් සඳහා ලබාගත් ලකුණු ඇතුළත් ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

ලකුණු පන්තිය	0 - 8	9 - 17	18 - 26	27 - 35	36 - 44	45 - 53	54 - 62	63 - 71	72 - 80
සංඛ්‍යාතය	15	18	38	40	48	30	26	14	11

(i) අඩු ම ලකුණු ලබාගත් සිසුන් 25% ක් වෙන් කිරීමට අවශ්‍ය නම් ඒ සඳහා පදනම් කරගත යුතු ලකුණ කුමක් ද?

(ii) ඉහළ ම ලකුණු ලබාගත් සිසුන් 25% වෙන් කිරීම සඳහා පදනම් කරගත යුතු ලකුණ කුමක් ද?

(4) වයස අවුරුදු 2 ත් 34 ත් අතර පුද්ගලයන් නියැදියක් සලකමින් රෝගයක් පිළිබඳ ව කරන ලද අධ්‍යයනයක දී ලබාගත් තොරතුරු පහත දැක්වේ.

රෝගීන්ගේ වයස (අවු)	2- 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30 - 34
රෝගීන් ගණන	8	12	20	40	55	38	20	7

(i) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.

(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් ඇඳ පළමු චතුර්ථකය, දෙවැනි චතුර්ථකය, තුන්වැනි චතුර්ථකය හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

(5) පහත සඳහන් වන්නේ ඉවත දමන ලද පීත්ත පටි කැබලි තොගයක දිග පිළිබඳ තොරතුරුයි.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (පීත්ත පටි කැබැල්ලක දිග cm)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
සංඛ්‍යාතය (කැබලි ගණන)	8	11	15	22	27	25	20	16	10

(i) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.

(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් ඇඳ ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

(6) තැපැල් කාර්යාලයකින් බාහිර ග්‍රාහකයන් ලබාගත් දුරකථන පණිවිඩ සඳහා ගත කළ කාලය පිළිබඳව පහත සඳහන් තොරතුරු ලැබිණි.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (කාලය තත්පර)	0 - 60	60 - 120	120 - 180	180 - 240	240 - 300	300 - 360	360 - 420	420 - 480	480 - 540	540 - 600
සංඛ්‍යාතය (පණිවුඩ සංඛ්‍යාව)	6	16	19	23	29	33	22	20	19	13

(i) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.

(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් ඇඳ

(a) මධ්‍යස්ථය
(b) පළමුවන හා තුන්වැනි චතුර්ථක
(c) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය
සොයන්න

(7) එක්තරා විදුහලක 6 වන ශ්‍රේණියට ඇතුළත් වීමේ පරීක්ෂණයකට ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යාවෝ 150 දෙනෙක් පෙනී සිටියහ ඔවුන් ලද ලකුණු පිළිබඳ ව තොරතුරු පහත වගුවේ දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
සංඛ්‍යාතය (සිසුන් ගණන)	12	15	17	18	21	19	16	13	11	8

(i) මෙම තොරතුරු සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.

(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් ඇඳ ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය, පළමුවැනි චතුර්ථකය, තුන්වැනි චතුර්ථකය හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න .

(8) පහත දැක්වෙන්නේ එක්තරා ආයතනයක සේවකයන් ලබන මාසික වැටුප් පිළිබඳ තොරතුරුයි. එම තොරතුරු නිරූපණය කරන සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් ඇඳ මධ්‍යස්ථය හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (වැටුප රුපියල්)	5000 - 10000	10000 - 15000	15000 - 20000	20000 - 25000	25000 - 30000	30000 - 35000	35000 - 40000
සංඛ්‍යාතය (සේවක සංඛ්‍යාව)	8	16	25	38	25	14	5

(9) දින 90 ක් තුළ බෝංචි කිලෝග්‍රෑමයක මිල පිළිබඳ කරන ලද සමීක්ෂණයක දී ලද තොරතුරු මෙසේ ය.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (මිල රුපියල්)	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
සංඛ්‍යාතය (දින ගණන)	7	13	28	17	14	8	3

ඉහත තොරතුරු නිරූපණය කෙරෙන සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රයක් ඇඳ අදාළ කාලය සඳහා මධ්‍යස්ථය හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

16 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි සංකල්පය
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය සෙවීම
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද nවල ඓක්‍යය සෙවීම
- ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය සෙවීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

16.1 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි හැඳින්වීම

අනුක්‍රමයක් යනු යම්කිසි නිශ්චිත පිළිවෙළකට සකස් කරන ලද සංඛ්‍යා කුලකයකි. මෙම සංඛ්‍යාවලට අනුක්‍රමයේ පද යයි කියනු ලබන අතර එක් පදයකට පසුව ඊළඟ පදය ලැබෙන්නේ යම් රීතියකට අනුවයි.

නිදසුන 1.

3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 ... යන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය සලකන්න.
මෙය පද හයකින් සමන්විත වේ. මුල් පදය 3 වන අතර හයවැනි පදය 96 වේ. තව ද සෑම පදයක් ම ඊට පෙර පදය 2 න් ගුණකිරීමෙන් ලැබෙන බව පැහැදිලි ය. එනම් අනුක්‍රමයේ සෑම පදයක් ම ඊට පෙර පදයෙන් බෙදීමෙන් 2 ලැබේ.

පහත සඳහන් සංඛ්‍යා අනුක්‍රම සලකන්න.

(i) 2, 4, 8, 16, ...
(ii) 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , ...
(iii) 64 , 32 , 16 , 8 , 4 , ...
(iv) 100 , 10 , 1 , 0.1 , 0.01 , 0.001 , ...
(v) 81 , -27 , 9 , -3 , 1 , ...

අනුක්‍රමය	මුල් පදය	ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදීමෙන් ලැබෙන නියත අගය
(i)	2	$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=2$
(ii)	1	$\frac{3}{1}=\frac{27}{9}=3$
(iii)	64	$\frac{32}{64}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$
(iv)	100	$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0.1$
(v)	81	$\frac{-27}{81}=\frac{9}{-27}=-\frac{1}{3}$

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදූ විට නියත අගයක් ලැබේ නම් එවැනි අනුක්‍රමයකට **ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක්** යැයි කියනු ලැබේ. මෙම නියත අගයට ශ්‍රේඪියේ **පොදු අනුපාතය** යයි කියනු ලැබේ.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය " a " ද පොදු අනුපාතය " r " ද ලෙස දැක්වේ.

> මුල් පදය a ද, පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක්
>
> $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$ ලෙස ලියා දැක්විය හැකි ය.

නිදසුන 2.

පහත දැක්වෙන එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(i) 4 , 8 , 16 , 32 ,.....

(ii) 64 , 32 , 16 , 8,.....

(iii) 3 , -9 , 27 , -81,.....

(iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots\ldots$

විසඳුම

(i) $r = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

(iii) $r = \frac{-9}{3} = \frac{27}{-9} = -3$

(ii) $r = \frac{32}{64} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

(iv) $r = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

16.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(i) $4, 12, 36, 108, \ldots$

(ii) $-3, -9, -27, -81, \ldots$

(iii) $27, -18, 12, -8, \ldots$

(iv) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

(v) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \ldots$

(vi) $x^2, -x, 1, -\frac{1}{x}, \ldots$

(vii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

(viii) $b^2c^3, b^3c^2, b^4c, b^5, \ldots$

(2) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර ලියන්න.

(i) $a = 2$, $r = 7$

(ii) $a = 7$, $r = 2$

(iii) $a = 16$, $r = \frac{1}{2}$

(iv) $a = s$, $r = s$

16.2 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය T_n මඟින් අංකනය කරමු.

3 , 6 , 12 , 24 , ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය නිරික්ෂණය කරන්න.

ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය 2 ද මුල් පදය 3 ද වේ. එනම් $r=2$ ද $a=3$ ද වේ.

පළමු පදය	=	$T_1 = 3 = 3\times 1$	$= 3\times 2^0$
දෙවැනි පදය	=	$T_2 = 6 = 3\times 2$	$= 3\times 2^1$
තුන්වැනි පදය	=	$T_3 = 12 = 3\times 4$	$= 3\times 2^2$
හතරවැනි පදය	=	$T_4 = 24 = 3\times 8$	$= 3\times 2^3$

මේ අනුව පළමු පදය a හා පොදු අනුපාතය r වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සැලකූ විට,

$T_1 = a = ar^0 = ar^{1-1}$

$T_2 = ar = ar^1 = ar^{2-1}$

$T_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

....

....

....

....

....

$T_{10} = ar^9 = ar^{10-1}$

ඉහත පැහැදිලි කිරීමට අනුව ශ්‍රේඪියේ n වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ බව පෙනේ.

> මුල් පදය a ද, පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ වේ.

නිදසුන 3.

පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 8 වැනි පදය සොයන්න.

(i) 3 , 6 , 12 , 24 , ...

(ii) 8 , 4 , 2 , 1 , ...

විසඳුම

(i) ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය $a=3$ ද , පොදු අනුපාතය $r=\frac{6}{3}=2$ ද වේ.

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ n වැනි පදය $T_n = ar^{n-1}$ වේ.

$\therefore T_8 = 3\times 2^{8-1} = 3\times 2^7 = 3\times 128 = 384$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ අට වැනි පදය $\underline{\underline{384}}$ වේ.

(ii) පළමු පදය $a=8$, පොදු අනුපාතය $r=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ වේ.

ශ්‍රේඪියේ n වන පදය, $T_n = ar^{n-1}$ නිසා

$$T_8 = 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$$

$$= 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$$

$$= 8\times\frac{1}{128} = \frac{1}{16}$$

ශ්‍රේඪියේ අටවැනි පදය $\frac{1}{16}$ වේ.

නිදසුන 4.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 3 ද හතරවන පදය 81 ද නම් පොදු අනුපාතය සොයන්න.

$a = 3,\ T_4 = 81$

$T_4 = ar^3$

අගය ආදේශයෙන්

$81 = 3\times r^3$

එනම් $r^3 = \frac{81}{3} = 27$

$r^3 = 3^3$

$\underline{\underline{\therefore r = 3}}$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය 3 වේ.

නිදසුන 5.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 3 වන පදය 360 ද 6 වන පදය 1215 ද නම් ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය ද මුල්පදය ද සොයන්න.

$$T_3 = ar^2 = 360 \text{———} (1)$$

$$T_6 = ar^5 = 1215 \text{———} (2)$$

$\dfrac{(2)}{(1)}$ න් $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{1215}{360}$ ලැබේ.

$$r^3 = \frac{27}{8}$$

$$r^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\underline{\underline{r = \frac{3}{2}}} \text{ වේ.}$$

r හි අගය (1) සමීකරණයේ ආදේශයෙන්,

$$a\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 360$$

$$a \times \frac{3^2}{2^2} = 360$$

$$a \times \frac{9}{4} = 360$$

$$\therefore a = \frac{360 \times 4}{9}$$

$$\underline{\underline{a = 160}}$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය 160 ද පොදු අනුපාතය $\dfrac{3}{2}$ ද වේ.

නිදසුන 6.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 4 ද මුල් පද තුනෙහි ඓක්‍යය 28 ක් ද නම් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද තුන ලියන්න.

මෙම ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද නම්

$$a = 4 \text{———} (1)$$

$$a + ar + ar^2 = 28 \text{———} (2)$$

(2) න් $a(1 + r + r^2) = 28$

(1) න් a හි අගය ආදේශයෙන්

$$4(1 + r + r^2) = 28$$

$$1 + r + r^2 = \frac{28}{4}$$

$$1 + r + r^2 = 7$$

$$\therefore r^2 + r + 1 - 7 = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$(r + 3)(r - 2) = 0$$

$\therefore r = -3$ හෝ $r = 2$ වේ.

r සඳහා අගය දෙකක් ලැබෙන නිසා අපට ශ්‍රේඪි දෙකක් ලැබේ.

$a = 4$ හා $r = -3$ විට ශ්‍රේඪිය මෙසේ ය.

$$\underline{\underline{4, -12, 36, \ldots}}$$

$a = 4$ හා $r = 2$ විට ශ්‍රේඪිය මෙසේ ය.

$$\underline{\underline{4, 8, 16, \ldots}}$$

16.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත සඳහන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි නිරීක්ෂණය කර දී ඇති වගුව පිටපත් කර සම්පූර්ණ කරන්න.

(i). 5, 15 , 45, 135, 405, 1215, 3645

(ii) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

(iii) 96, 48, 24, 12, 6, 3, 1.5

(iv) 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001

(v) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \frac{64}{729}$

ශ්‍රේඪිය	a	r	T_1	n	l	T_5
(i)						
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						

මෙහි n සහ l මගින් පිළිවෙළින් පද ගණන සහ අවසාන පදය නිරූපණය වේ.

(2) පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ සඳහන් කර ඇති පදය සොයන්න.

(i) 12, 6, 3, ... ශ්‍රේඪියේ T_5

(ii) 1, 2, 4, 8, ... ශ්‍රේඪියේ T_7

(iii) 9, 3, 1, ... ශ්‍රේඪියේ T_6

(iv) 27, 18, 12, ... ශ්‍රේඪියේ T_6

(v) 4, -12, 36, ... ශ්‍රේඪියේ T_7

(3) පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(i) $T_2 = 4$, $T_5 = 108$

(ii) $T_3 = 6$, $T_7 = 96$

(iii) $T_6 = 8$, $T_9 = 64$

(iv) $T_2 = 6$, $T_5 = 48$

(v) $T_3 = 40$, $T_6 = 625$

(4) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමුවැනි හා දෙවැනි පදවල ඓක්‍යය $\frac{3}{4}$ ද, තුන්වැනි පදය හා හතරවැනි පදවල ඓක්‍යය $\frac{3}{16}$ ද වේ. පොදු අනුපාතය සොයන්න. මෙවැනි ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා පොදු අනුපාතය ධන වන ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර ලියන්න.

(5) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක පළමු වැනි පදයේ හා තුන්වැනි පදයේ ඓක්‍යය 20 කි.දෙවන පදය පළමුවැනි පදයට වඩා 4 කින් විශාල වේ.ශ්‍රේඩියේ මුල් පද හතර ලියා දක්වන්න.

(6) පද 4 කින් සමන්විත ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක මුල් පද දෙකේ ඓක්‍යය 8 ද ඉතිරි පද දෙකේ ඓක්‍යය 72 වේ. මේ ආකාරයේ ශ්‍රේඩි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම ශ්‍රේඩි දෙක ලියා දක්වන්න.

(7) n වන පදය හා (n - 1) වන පදය පිළිවෙළින් 640 සහ 320 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක මුල් පදය 10 වේ නම් n හි අගය සොයන්න.

16.3 ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය

ධන සංඛ්‍යා දෙකක ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය අපට මෙසේ අර්ථ දැක්විය හැකිය a, b යනු ඕනෑ ම ධන සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි සලකමු. එවිට a හා b අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $\sqrt{ab}$

නිදසුන 7.

3 , 6 , 12 , 24 , 48 , ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩිය සලකමු.
ඉහත අර්ථ දැක්වීමට අනුව 3 සහ 12 යන ධන සංඛ්‍යා අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය

$\sqrt{3\times 12}$ වේ.

එනම්,

$$\begin{aligned}
\text{3 හා 12 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය } &= \sqrt{3\times 12} \\
&= \sqrt{36} \\
&= 6
\end{aligned}$$

ඉහත ශ්‍රේඩිය නිරීක්ෂණය කිරීමේදී 6 , 3 සහ 12 අතර පිහිටන බව පැහැදිලි වනු ඇත. එනම් සලකන සංඛ්‍යා දෙක ද , ඒවායෙහි ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය ද , ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටයි.

a හා b ඕනෑම ධන සංඛ්‍යා දෙකක්ද c යනු a හා b අතර වූ ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය ද නම් a, c හා b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටයි.

125 , 25 , 5 , 1 යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකමු.

125 සහ 5 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $=\sqrt{125\times 5}$

$$=\sqrt{625}$$
$$=\sqrt{25^2}$$
$$=25$$

තවද 125 , 25 හා 5 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ අනුයාත පද තුනකි.

$12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකමු.

6 සහ $\frac{3}{2}$ අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $=\sqrt{6\times\frac{3}{2}}$

$$=\sqrt{3\times 3}$$
$$=\sqrt{9}$$
$$=3$$

තවද 6 , 3 හා $\frac{3}{2}$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ අනුයාත පද තුනකි.

දැන් a හා b යනු ඕනෑ ම දී ඇති සංඛ්‍යා දෙකක් වන විට a, x, b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටන පරිදි x ට ගැළපෙන අගයයන් සොයමු.

a, x, b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද නම් පොදු අනුපාතය සැලකීමෙන් ,

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$$

එනම් $x^2=ab$

$$x=\pm\sqrt{ab}$$

$\therefore$ x හි අගයයන් වනුයේ $+\sqrt{ab}$ හා $-\sqrt{ab}$

$a, \sqrt{ab}, b, ...$ ආකාර එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ද

$a, -\sqrt{ab}, b, ...$ ආකාර තවත් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ද යනුවෙන් අපට ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ලැබේ.

සැලකිය යුතුයි.

$\sqrt{ab}$ සෙවීමේ දී, වර්ගමූල ලකුණ තුළ වූ සංඛ්‍යාව ධන සංඛ්‍යාවක් වීම අනිවාර්ය වේ. මේ සඳහා a සහ b සංඛ්‍යා දෙක ම ධන සංඛ්‍යා හෝ එසේ නැතිනම් දෙක ම සෘණ සංඛ්‍යා හෝ විය යුතු ය.

නිදසුන 8.

4, x, 16 යන පද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටන පරිදි x හි අගය විය හැකි අගයයන් ලබා ගන්න.

ඒ අනුව $\dfrac{x}{4} = \dfrac{16}{x}$ වේ.

$$x^2 = 64$$

$$x^2 = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

$\therefore$ x හි අගය විය හැකි අගයයන් වනුයේ $+8$ හෝ -8 වේ.

මේ අනුව

4 , 8 , 16 , ... හා $4, -8, 16, ...$ ලෙස ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ලැබේ.

නිදසුන 9.

2 හා 8 යන සංඛ්‍යා දෙක අතරට සංඛ්‍යාවක් යෙදීමෙන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද තුනක් ලබා ගන්න.

එම සංඛ්‍යාව x යයි සිතමු එවිට 2, x, 8 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද නිසා ,

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{8}{x}$ වේ.

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$\therefore$ එම සංඛ්‍යාව ± 4 වේ.

$\therefore$ ශ්‍රේඪිය 2, 4, 8, හෝ 2, -4, 8 වේ.

නිදසුන 10.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද පහක් වන සේ 2, 32 අතර සංඛ්‍යා 3 ක් ලබා ගන්න.

$2, -, -, -, 32$ වේ.

$\therefore T_1 = a = 2 \qquad T_5 = ar^4 = 32$

$$\frac{ar^4}{a} = \frac{32}{2} = 16$$

$$r^4 = 16$$

$$r = \pm 2$$

$\therefore r = +2$ හා $r = -2$ යනුවෙන් පොදු අනුපාතය සඳහා අගයයන් දෙකක් ඇත.

$\therefore r = 2$ විට අදාළ සංඛ්‍යා තුන 4, 8, 16, ... ද

$r = -2$ විට අදාළ සංඛ්‍යා තුන -4, 8, -16, ... ද වේ.

නිදසුන 11.

$-\frac{1}{4}$ සහ 2 සමග ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සෑදෙන සේ ඒවා අතර සංඛ්‍යා දෙකක් සොයන්න.

මෙහි දී $-\frac{1}{4}, \ldots, \ldots, 2$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වන සේ හිස්තැනට අදළ සංඛ්‍යා සෙවිය යුතු ය.

$$T_1 = a = -\frac{1}{4} \text{———} (1)$$

$$T_4 = ar^3 = 2 \text{———} (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \text{ න් } \frac{ar^3}{a} = \frac{2}{(-\frac{1}{4})}$$

$$r^3 = 2 \div \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 2 \times (-4)$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r^3 = (-2)^3$$

$$r = -2$$

$$\therefore T_2 = ar = -\frac{1}{4}\times(-2) = \frac{1}{2}$$

$$T_3 = ar^2 = -\frac{1}{4}\times(-2)^2 = -\frac{1}{4}\times 4$$
$$= -1$$

$\therefore$ අදාළ සංඛ්‍යා දෙක $\frac{1}{2}$ හා -1 වන අතර එවිට ශ්‍රේඪීය

$-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$ වේ.

16.3 අභ්‍යාසය

(1) 1 හා 64 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යයක් සොයන්න.

(2) $\frac{1}{x^2y^2}$ හා x^2y^2 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යයක් සොයන්න.

(3) $\frac{1}{8}$ හා 128 අතර පද හතරක් ඇතුළත් කිරීමෙන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක් ලැබේ නම් එම පද හතර සොයන්න.

(4) සංඛ්‍යා දෙකක ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය 12 වේ. එක් සංඛ්‍යාවක් 6 නම් අනිත් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(5) 0.3 සහ 8.1 අතරට තවත් පද දෙකක් ඇතුළත් කිරීමෙන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක් ලැබේනම් එම පද දෙක සොයන්න.

(6) $3\frac{3}{4}$ හා 60 අතර පිහිටියාවූ ද එම සංඛ්‍යා දෙක සමඟ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක් සාදන්නාවූ සංඛ්‍යා තුනක් සොයන්න.

a සහ b ධන සංඛ්‍යා දෙකක් විට a සහ b අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $\sqrt{ab}$ වේ. තව ද a, x, b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක අනුයාත පද වන පරිදි x ට ගත හැකි අගයයන් වනුයේ $-\sqrt{ab}$ හා $\sqrt{ab}$ වේ. **මෙම අගයයන් දෙකෙන් $\sqrt{ab}$ a හා b අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය වේ.**

16.4 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද n හි ඓක්‍යය (S_n)

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද n හි ඓක්‍යය S_n මගින් දක්වමු.

නිදසුන 12.
පළමු පදය 2 සහ පොදු අනුපාතය 3 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක

(i) පළමු පද 3 හි ඓක්‍යය සොයන්න.
(ii) පළමු පද 5 හි ඓක්‍යය සොයන්න.
(iii) පළමු පද 8 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

එ නයින් ශ්‍රේඪියේ පළමු පද n හි ඓක්‍යය S_n සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගන්න.

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පද දර්ශක ආකාරයට ලියා දක්වමු.

$2, 2\times3, 2\times3^2, \ 2\times3^3 \ \ldots$

(i) ශ්‍රේඪියේ පළමු පද තුනෙහි ඓක්‍යය S_3 නිසා

$$S_3 = 2 + 2(3) + 2(3^2) \text{———} (1)$$

(1) සමීකරණය පොදු අනුපාතයෙන් එනම් 3 න් ගුණ කරමු.

$$3S_3 = 2(3) + 2(3^2) + 2(3^3) \text{———} (2)$$ ලැබේ.

(2) - (1)

$$3S_3 - S_3 = 2(3^3) - 2 \text{———} (3)$$

(මෙහි දී ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය සහ අවසාන පදය පමණක් ඉතිරි වී ඇති බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.)

(3)න්

$$(3-1)S_3 = 2[(3)^3 - 1] = 2(3^3 - 1)$$

$$S_3 = \frac{2(3^3-1)}{(3-1)} \text{———} (A)$$

$$S_3 = 26$$

(ii) මෙසේ ම $S_5 = 2 + 2(3) + 2(3)^2 + 2(3)^3 + (3)^4 \text{———} (1)$

$(1)\times3$ න්

$$3S_5 = 2(3) + 2(3)^2 + 2(3)^3 + 2(3)^4 + 2(3)^5 \text{———} (2)$$

$(2)-(1)$ න්

$$3S_5 - S_5 = 2(3)^5 - 2$$ ලැබේ.

$$S_5(3-1) = 2\left[(3^5)-1\right]$$

$$\therefore S_5 = \frac{2(3^5-1)}{(3-1)} \text{———} (B)$$

$$S_5 = \underline{\underline{242}}$$

(iii) මෙසේ ම $S_8 = 2 + 2(3) + 2(3)^2 + 2(3)^3 + 2(3)^4 + 2(3)^5 + 2(3)^6 + 2(3)^7$

$$3S_8 = 2(3) + 2(3)^2 + 2(3)^3 + 2(3)^4 + 2(3)^5 + 2(3)^6 + 2(3)^7 + 2(3)^8$$

$$S_8 = \frac{2(3^8-1)}{(3-1)} \text{———} (C)$$

$$S_8 = \underline{\underline{6560}}$$

ඉහත (A), (B) හා (C) සඳහා ලබාගත් ප්‍රතිඵලවල රටාව අනුව ශ්‍රේඪියේ පළමු n පදවල ඓක්‍යය,

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1}$$ ආකාරයට ලියා දැක්විය හැකි ය.

දැන් අපි සාධාරණ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සලකමු.

මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු n පදවල ඓක්‍යය S_n නම්

$$S_n = a + ar + ar^2 + - - - - + ar^{n-1} \text{———} (1)$$

$(1)\times r,$

$$rS_n = ar + ar^2 + - - - - ar^{n-1} + ar^n \text{———} (2)$$

(2)-(1) න්

$rs_n - s_n = ar^n - a$ බව ලැබේ.

$$S_n(r-1) = a(r^n-1)$$

$$\therefore S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද n හි ඓක්‍යය S_n නම්

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$$

$r > 1$ වන විට $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ ලෙස ද,

$r < 1$ වන විට $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{(1-r)}$ ලෙස ද භාවිත කිරීම ගණනය කිරීම සඳහා පහසු වේ.

නිදසුන 13.

3, 6, 12, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පද 6 හි ඓක්‍යය සොයන්න

$$a = 3 \ , \ r = \frac{6}{3} = 2 \ , \ n = 6$$

$r > 1$ නිසා ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$ භාවිත කරමු.

$$\therefore S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2-1} = 3(64-1)$$

$$= 3 \times 63$$

$$= \underline{\underline{189}}$$

නිදසුන 14.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වෙනි පදය $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ වේ. මෙම ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය හා පළමු පද 8 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

$$T_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$n = 1$ විට ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය ලැබේ.

$$\therefore T_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

මෙසේ ම $n = 2$ විට දෙවැනි පදය ලැබේ.

$$T_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{-2}{1} = -\frac{1}{2}$$

දැන් ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ භාවිත කරමු. $r < 1$

$$S_8 = \frac{(-\frac{1}{2})\left[1-(-\frac{1}{2})^8\right]}{\left[1-(-\frac{1}{2})\right]}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left[1-(\frac{1}{256})\right]}{(\frac{3}{2})} \qquad = \frac{-\frac{1}{2}\left[\frac{256-1}{256}\right]}{(\frac{3}{2})}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[\frac{255}{256}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{255}{256}\right) \qquad = -\frac{85}{256}$$

නිදසුන 15.

5, 20, 80 ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ ඓක්‍යය 6825 වීමට ගත යුතු පද ගණන සොයන්න

$$a = 5, \ r = 4 \quad S_n = 6825$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} \quad , \ r > 1$$

$$6825 = \frac{5(4^n - 1)}{4-1}$$

$$6825 = \frac{5(4^n - 1)}{3}$$

$$\frac{6825}{5} \times 3 = 4^n - 1$$

$$4^n = 4096 = 4^6$$

$$\therefore n = \underline{\underline{6}}$$

16.4 අභ්‍යාසය

(1) $2, 6, 18, 54, \ldots$ යන ශ්‍රේඪියේ පදවල ඓක්‍යය 728 ක් නම් එහි පද ගණන සොයන්න.

(2) 4, 8 , 16 , ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ
   (i) පොදු අනුපාතය සොයන්න.
   (ii) අට වැනි පදය සොයන්න.
   (iii) පළමු පද අටෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(3) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද දෙකෙහි ඓක්‍යය 15 වේ. එම ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය 2 වේ. එහි
   (i) පළමු පදය සොයන්න
   (ii) හත් වැනි පදය සොයන්න
   (iii) පළමු පද හතේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(4) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 5 වේ. පොදු අනුපාතය 2 වේ. පළමු පද අටේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(5) 2 , 4 , 8 ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පදවල ඓක්‍යය 1022 නම් එම ශ්‍රේඪියේ පද ගණන සොයන්න.

(6) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 5 වැනි පදය 8 වේ. 3 වැනි පදය 4 වේ. පළමු පද දහයේ ඓක්‍යය ධන සංඛ්‍යාවක් වේ. මෙම ශ්‍රේඪියේ
   (i) පළමු පදය සොයන්න.
   (ii) පොදු අනුපාතය සොයන්න.
   (iii) පළමු පද දහයේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(7) $(x+1), (x+3), (x+7) \ldots$ මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද තුනක් නම් x හි අගය සොයන්න.

(8) සමාන්තර ශ්‍රේඪියක 2 වැනි , 4 වැනි හා 8 වැනි පද තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද තුන ලෙස පිහිටයි. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(9) $(n-6), n, (n+9)$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද තුන වේ. n හි අගය සොයා ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 7 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

(10) යන්ත්‍රයක වටිනාකම වසරකට 10% බැගින් ක්ෂය වෙයි. එහි මුල් වටිනාකම රු.3000 කි. අවුරුදු 6 කට පසු එහි වටිනාකම ආසන්න රුපියලට සොයන්න.

(11) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද n වල ඓක්‍යය n හි සෑම අගයන්ට ම $3^n - 1$ වේ. ශ්‍රේඪියේ පළමු පද තුන සොයන්න.

(12) පළමුවැනි පදය 81 වූ ද පොදු අනුපාතය $\frac{2}{3}$ වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 5 හි එකතුව සොයන්න.

(13) පළමුවැනි පදය 36 වූ ද පොදු අනුපාතය $\frac{5}{6}$ වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද 20 ක එකතුව ලඝු ගණක භාවිතයෙන් සොයන්න.

(14) පළමුවැනි පදය 16 වූ ද පොදු අනුපාතය $\frac{4}{3}$ වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 10 හි එකතුව $16x$ බව පෙන්වන්න. මෙහි x යනු $\frac{4^{10}-3^{10}}{3^9}$ වේ.

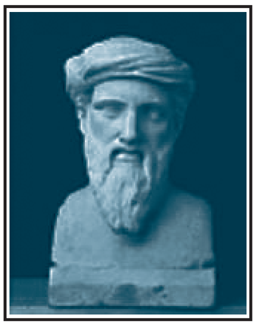
ශූන්‍යය, ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පදයක් ලෙස අන්තර්ගත විය හැකි ද?

17 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

- පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිත වන ගැටලු විසඳීම
- පයිතගරස් සම්බන්ධයේ සත්‍යතාව තහවුරු කර ගැනීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.



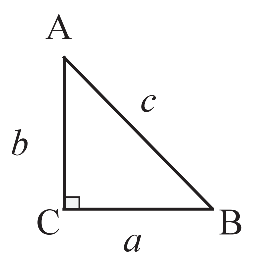
පයිතගරස් ක්‍රි. පූ. 580 ත් 500 ත් අතර ග්‍රීසියේ විසූ ග්‍රීක දාර්ශනිකයෙකි. ඔහු ගණිතඥයෙකි. තාරකා විද්‍යාඥයෙකි. ලොව සියල්ල සංඛ්‍යා තුළින් විග්‍රහ කර දක්විය හැකිය යන මතය තවත් ඔහුගේ සංකල්පයකි. පයිතගරස් සංඛ්‍යා තුළින් සංගීතයේ ඇති ගණිතමය ස්වභාවය අධ්‍යයනය කිරීමට ද උත්සාහ කළ බව පැවසේ.

පයිතගරස් ඉදිරිපත් කළ සම්බන්ධය ප්‍රමේයයක් ලෙසින් විධිමත් ව සාධනය කළේ ඔහුගෙන් අවුරුදු 300 කට පසු යුක්ලිඩ් නම් ගණිතඥයා විසිනි. මෙම සම්බන්ධය ආදර්ශනය කළ හැකි ක්‍රම 400 කට අධික සංඛ්‍යාවක් ලෝකයේ විවිධ ගණිතඥයන් විසින් ඉදිරිපත් කර ඇත.

පයිතගරස් ප්‍රමේයය ගණිතයේ යෙදෙන වැදගත් සම්බන්ධතාවකි. පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ මූලධර්ම ගණිතයේ දී පමණක් නො ව සාමාන්‍ය ජීවිතයේ දී විවිධ ක්ෂේත්‍රයන්හි භාවිත වේ.

පයිතගරස්ගේ ප්‍රමේයය: සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත අඳිය හැකි සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සෘජු කෝණය අඩංගු පාද දෙක මත ඇඳිය හැකි සමචතුරස්‍ර දෙකේ වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන ය.

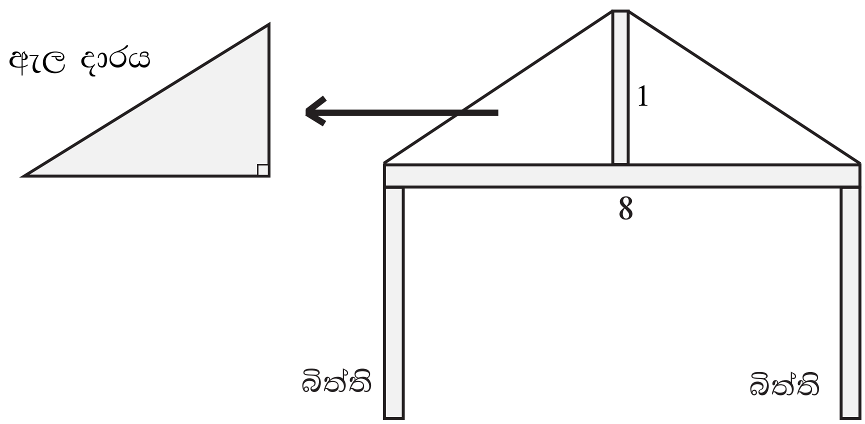
$a^2 + b^2 = c^2$ වේ.



පයිතගරස් සම්බන්ධයේ මූලධර්මය ගෘහ නිර්මාණ ශිල්පීන්, පෙදරේරුවන්, කාර්මික ශිල්පීන්, මිනින්දෝරු ශිල්පීන් ද විවිධ වෘත්තීන් හී දී ද භාවිතයට ගෙන ඇති බව පෙනේ.

මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී මේ සම්බන්ධය පිළිබඳ ඔබ උගත් කරුණු භාවිත කර මේ ගැටලුව විසඳීමට උත්සාහ කරන්න.

- මීටර 8 ක් පළල ගොඩනැගිල්ලක වහලයේ උස මීටර 1 කි. ඇල දාරයේ දිග සොයන්නට අවශ්‍ය යැයි සිතමු.



මෙහි දී සෑදෙන සෘජු කෝණී ත්‍රිකෝණයක් සලකා බලමු. ආධාරකයේ එහි හරි මැද කුරුපාව සවිකර ඇති තැනට දුර මීටර් 4 කි. ආධාරකයට ලම්බ ව එහි මැද සවිකර ඇති කුරුපාවේ උස මීටර් 1 කි. ඇල දාරය සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයයි.

කර්ණයේ දිග මීටර් x යැයි සලකමු.

පයිතගරස් සම්බන්ධ අනුව,

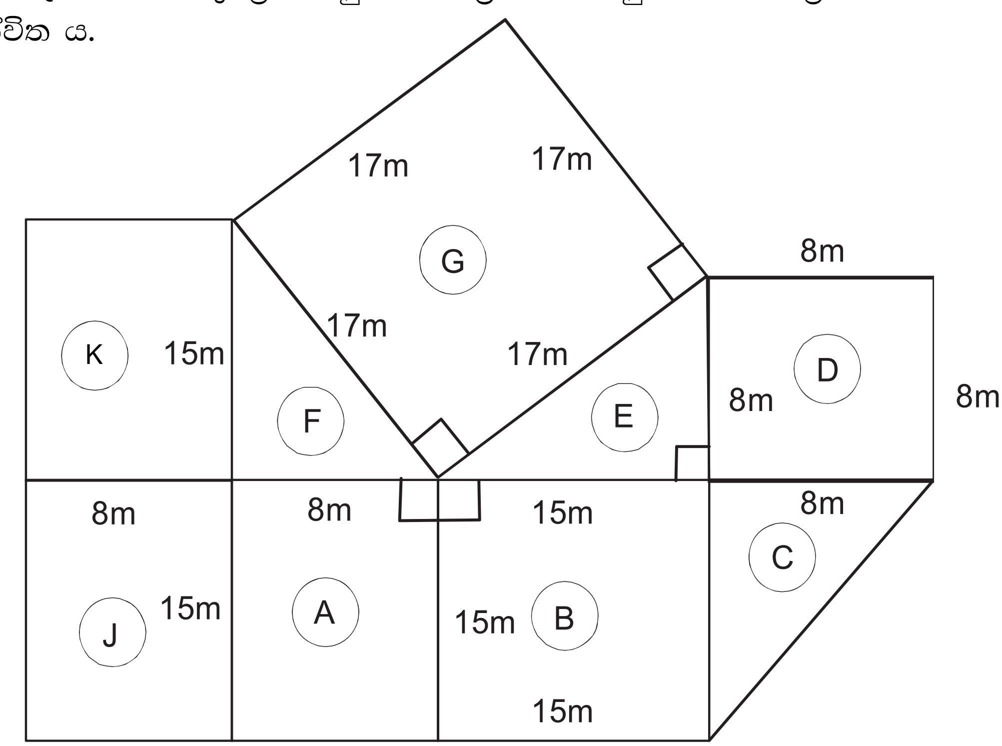
$x^2 = 4^2 + 1^2$ වේ.

එබැවින් $x^2 = 16 + 1$

$x^2 = 17$

$x = \sqrt{17}$ ඇල දාරයේ දිග මීටර් $\sqrt{17}$ වේ.

මෙම රූපය සමචතුරස්‍ර, සෘජුකෝණාස්‍ර හා සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ කීපයකින් සමන්විත ය.



A, B, C, D, E, F, G, J, K රූපවල වර්ගඵල සොයන්න.

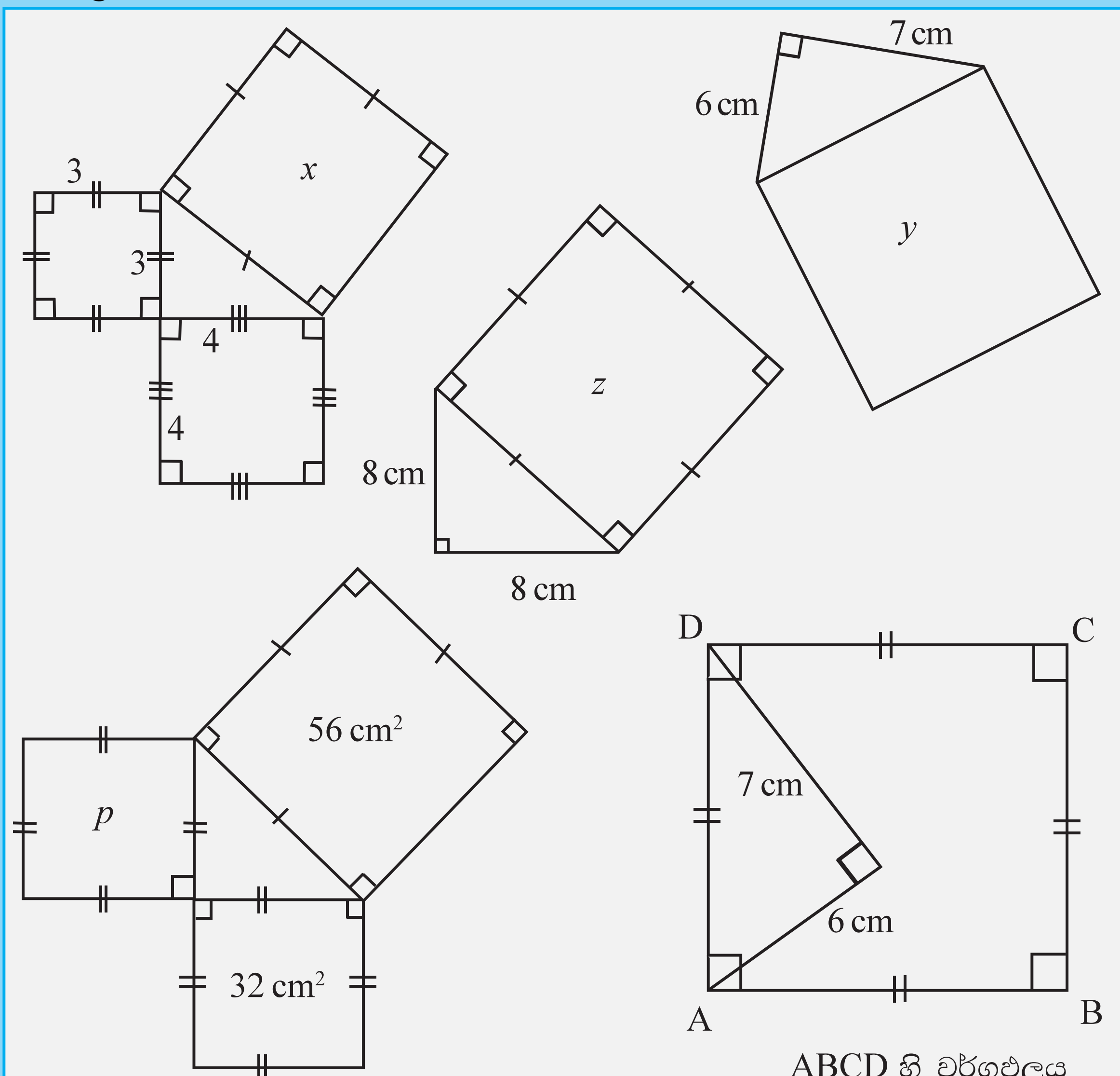
B හි වර්ගඵලයේත්, D හි වර්ගඵලයේත් එකතුව ලියන්න. B හා D වර්ගඵලවල එකතුවත් G හි වර්ගඵලයත් අතර සම්බන්ධයක් ලියන්න.

A හා K හි වර්ගඵලවල එකතුව G හි වර්ගඵලයට සමාන ද? අසමාන ද? එසේ වන්නේ ඇයි ?

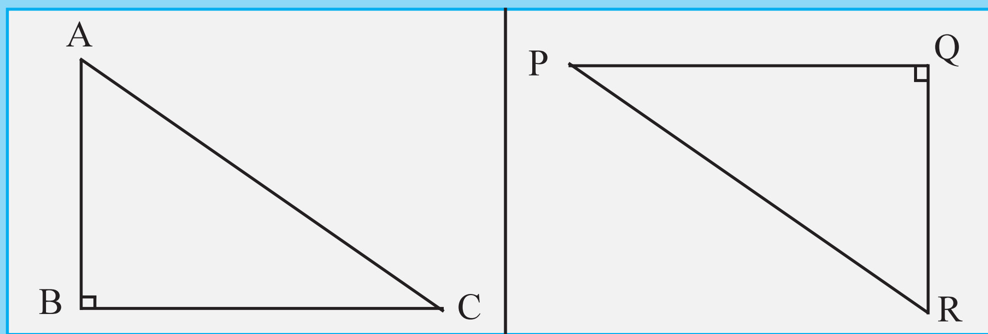
B හා D හි වර්ගඵලවල එකතුව දක්වෙන්නේ සම්පූර්ණ රූපයෙන් කවර කොටස ද?

17.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත දක්වෙන රූපවල ඉංග්‍රීසි අකුරකින් නම් කර ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලය සොයන්න.



(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණය ආශ්‍රිත ව අදාළ ප්‍රකාශනවල හිස් තැන් පුරවන්න.



AB මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= AB^2$
BC මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...
AC මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...

AC^2 = ... + ...
(පයිතගරස් ප්‍රමේයය අනුව)

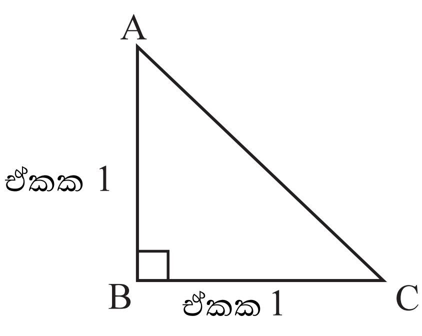
PQ මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...
QR මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...
PR මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...

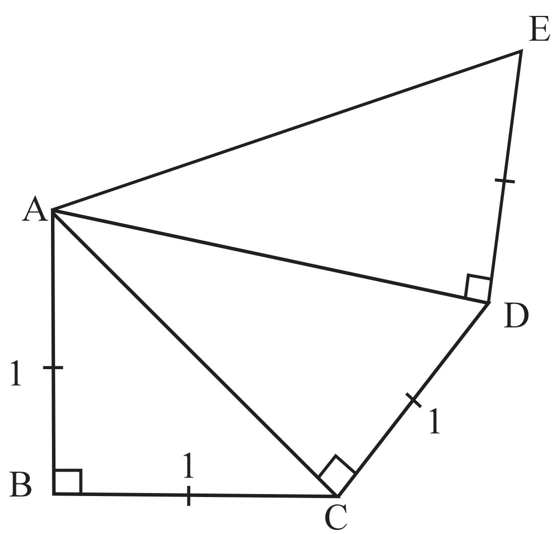
$PQ^2 + QR^2$ = ...

17.1 ක්‍රියාකාරකම

අභ්‍යාස පොතේ පිටුවක මැද තරමක් පහතට වන සේ ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය අඳින්න. එහි සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙකෙහි දිග සමාන ව ගන්න.

ඒ එක් පාදයක දිග ඒකක 1 නිසා AC දිග = ඒකක $\sqrt{1^2+1^2}$ = ඒකක $\sqrt{2}$ වේ.





$AB = BC = 1$

$AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$

$AC = \sqrt{2}$

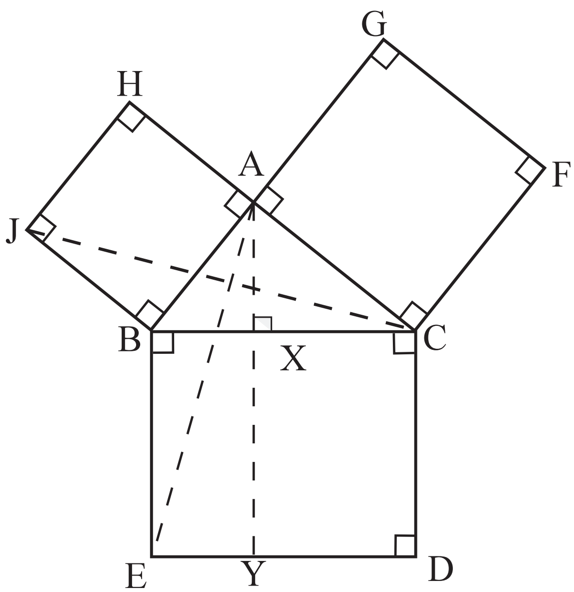
දැන් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි C ලක්ෂ්‍යයේ දී AC ට ලම්බයක් ඇඳ එහි ඒකක 1 ක් දුරින් D ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න. දැන් AD ගණනය කරන්න.

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \text{ එනම් } AD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \quad \therefore \ AD = \sqrt{3}$$

මේ ආකාරයෙන් D ලක්ෂ්‍යයේ දී AD ට ලම්බයක් ඇඳීමෙන් ඉහත ආකාරයට ම E ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කර AE ඇඳ AE හි දිග ලබා ගන්න. මෙම ක්‍රියාවලිය මේ ආකාරයට තව දුරටත් කිරීමෙන්, ලැබෙන සෑම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක ම කර්ණය ඇඳීමට විවිධ වර්ණ පාට පැන්සල් යොදා ගැනීම සුදුසු ය. ඔබට හැකි තාක් මෙසේ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ ඇඳ C, D, E, ... පිහිටීම් පරීක්ෂා කරන්න. මෙය ආකිමිඩීස් සර්පිලය නමින් හැඳින්වේ. AC, AD, AE..... එනම් එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය මගින් 2 සිට ගණින සංඛ්‍යාවල වර්ගමූල දැක්වෙන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

17.1 පයිතගරස් ප්‍රමේයය සාධනය

පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ විධිමත් සාධනය පයිතගරස් ගණිතඥයාගෙන් අවුරුදු 300 කට පමණ පසු යුක්ලිඩ් ගණිතඥයා විසින් ඉදිරිපත් කළ බව පෙර සඳහන් කළෙමු. එය සාධනය කළ හැකි ක්‍රම සලකා බලමු.



දත්තය :- ABC ත්‍රිකෝණයේ A කෝණය සෘජු කෝණයකි.
BC මත සමචතුරස්‍රය BCDE ද, AC මත සමචතුරස්‍ර ACFG ද, AB මත සමචතුරස්‍ර ABJH ද වේ.

සා.ක.යු. :- BCDE වර්ගඵලය = ACFG වර්ගඵලය + ABJH වර්ගඵලය

නිර්මාණය :- BC රේඛාව X හි ද ED රේඛාව Y හි දී ද හමුවන සේ BC ට ලම්බක ව AXY අඳින්න. AE හා JC යා කරන්න.

සාධනය :- $J\hat{B}A = C\hat{B}E = 90^{\circ}$ (දත්තය)

$A\hat{B}C$ දෙපසට ම එකතු කළ විට

$J\hat{B}C = A\hat{B}E$

JBC Δ හා ABE Δ සැලකූ විට

BJ = AB (සමචතුරස්‍රයේ පාද)

BC = BE (සමචතුරස්‍රයේ පාද)

JCB $\Delta \equiv$ ABE Δ (පා.කෝ.පා)

JCB Δ වර්ගඵලය = ABE Δ වර්ගඵලය

HAC සරල රේඛාවකි. (සමචතුරස්‍ර දෙකේ කෝණ එකතුව 180° නිසා) JBC Δ හා JBAH සමචතුරස්‍රය JB ආධාරකයේ පිහිටා JB හා HAC සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටා ඇත.

$$\text{JBC } \Delta \text{ වර්ගඵලය} = \frac{\text{JBAH සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය}}{2}$$

එසේම ABE Δ හා BEYX සෘජුකෝණාස්‍රය BE ආධාරකයෙහි පිහිටා BE හා AXY සමාන්තර රේඛා අතර නිසා.

$$\text{ABE } \Delta \text{ වර්ගඵලය} = \frac{\text{BEYX සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය}}{2}$$

JBC Δ, ABE Δ වර්ගඵලයත් සමාන වේ.

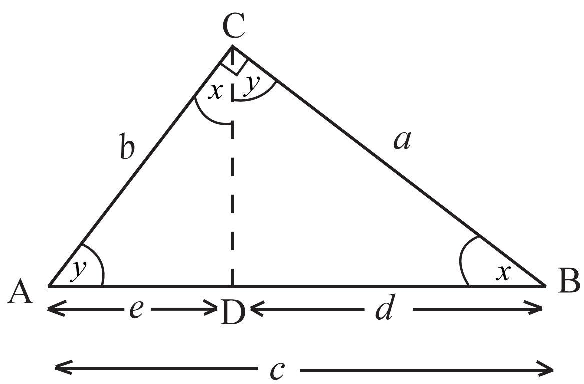
JBAH සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = BEYX සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය.

මේ ආකාරයටම AD හා BF යා කිරීමෙන් CFGA සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය CDYX සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන බව දැක්විය හැකි ය.

$\therefore$ CDYX + BEYX = JBAH + CFGA වර්ගඵලය

BEDC = JBAH + CFGA වර්ගඵලය

11 ක්‍රමය



දත්තය :- ABC Δ C කෝණය සෘජුකෝණයකි. C සිට AB ට ලම්බව CD ඇඳ තිබේ.

AB දිග c ද, AC = b ද

BC දිග a ලෙස නම් කර ඇත.

සා.ක.යු. :- $a^2 + b^2 = c^2$ බව

සාධනය :- ABC Δ හා ACD Δ සමරූපී වේ.

(එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන 90^0, x හා y)

$\frac{c}{b} = \frac{b}{e}$ (සමරූපි ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.)

එවිට $b^2 = ce$ වේ. $\longrightarrow$ (1)

ABC Δ හා BCD Δ සමරූපී නිසා

$\frac{c}{a} = \frac{a}{d}$ (සමරූපි ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.)

$a^2 = cd \longrightarrow$ (2)

(1) + (2) $a^2 + b^2 = ce + cd$

$a^2 + b^2 = c(e + d)$

නමුත් $(e + d) = c$

$\therefore$ $a^2 + b^2 = c \times c$

$\underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$

17.2 අභ්‍යාසය

(1) සිරස් බිත්තියකට හේත්තු කර ඇති ඉණිමගක් බිත්තිය පාමුල සිට 4 m ක් උසින් ද පහළ කෙළවර බිත්තියේ පාමුල සිට 3 m ඈතින් ද පිහිටයි. ඉණිමගේ දිග සොයන්න.

(2) සිරස් විදුලි රැහැන් කණුවක උස 10 m කි. එහි මුදුනට 2 m පහළින් රැකුල් කම්බියක් සවිකර ඇත. රැකුල් කම්බිය කණුවේ පාමුල සිට සම මට්ටමේ 6 m ඈතින් කුඤ්ඤයකට සවිකර ඇත. කම්බියේ දිග සොයන්න. (ගැට ගැසීමට වැය වන කොටස නොසලකන්න)

(3) රොම්බසයක විකර්ණ 24 cm හා 10 cm වේ. රොම්බසයේ පාදයක දිග සොයන්න.

(4) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC = 17 cm වේ. A වල සිට BC ට ඇඳි ලම්බකයේ දිග 15 cm වේ. ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(5) ABCD චතුරස්‍රයේ ABC කෝණය = 90^o AB = 12 cm, BC = 9 cm, CD = 8 cm, AD = 17 cm, $A\hat{C}D = 90^o$ බව පෙන්වන්න.

(6) AOB ත්‍රිකෝණයේ AO = OB, $A\hat{O}B = 90^o$. කර්ණය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් 4 ගුණයක් බව පෙන්වන්න.

(7) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB>AC වේ. A සිට BC ට ලම්බව AX ඇඳ ඇත. $AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ බව පෙන්වන්න.

(8) සමචතුරස්‍රයක විකර්ණය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය පළමු චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

(9) XYZ සමපාද ත්‍රිකෝණයේ YZ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ. $3YZ^2 = 4OX^2$ බව පෙන්වන්න.

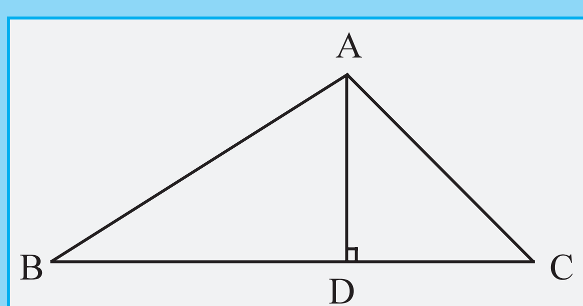
(10) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රය තුළ ඕනෑ ම තැනක X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$ බව පෙන්වන්න.

(11) PQRS චතුරස්‍රයේ විකර්ණ එකිනෙක සෘජුකෝණී ව ඡේදනය වේ. $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + RS^2$ බව පෙන්වන්න.

(12) PQR ත්‍රිකොණයේ $P\hat{Q}R = 90^o$ ක් වේ. QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වන අතර PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ. $4(PX^2 + RY^2) = 5PR^2$ බව පෙන්වන්න.

(13) ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත P පිහිටා ඇත්තේ $BP = \frac{1}{3}BC$ වන සේ ය. $9AP^2 = 7AB^2$ බව සාධනය කරන්න.

(14)



ABC ත්‍රිකෝණයේ $AD \perp BC$
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ බව සාධනය කරන්න.

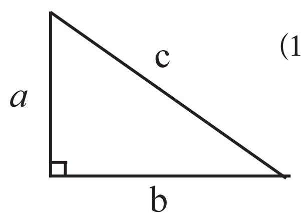
පයිතගරස් ත්‍රිත්ව

ඕනෑ ම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක සෘජු කෝණය අඩංගු පාද දෙක a හා b ද කර්ණය c ලෙස ද නම් කර ඇති විට $a^2 + b^2 = c^2$ තෘප්ත වන a, b හා c අගයයන් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව යනුවෙන් හඳුන්වනු ලැබේ.

- **පූර්ණ සංඛ්‍යාමය වූ සරල ම පයිතගරස් ත්‍රිත්වය (3, 4, 5) වේ. එහි ගුණාකාර (6, 8, 10),(9, 12, 15),(30, 40, 50)** වැනි **ත්‍රිත්වය** ද පයිතගරස් ත්‍රිත්ව වේ. (8, 15, 17) **(7, 24, 25), (9, 40, 41) යනු තවත් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව කීපයකි.**

- **මුලින් සඳහන් කළ ගුණාකාර වන ත්‍රිත්වවල හැර අනෙක් ත්‍රිත්වවල එක් සංඛ්‍යාවක් ඉරට්ට වන අතර ඉතිරි දෙක ම ඔත්තේ බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.**

පයිතගරස් ත්‍රිත්ව ලබාගැනීම සඳහා යොදාගත හැකි සමීකරණ තුනක් යුක්ලීඩ් නම් ගණිතඥයා විසින් ඉදිරිපත් කර ඇත. පළමු සඳහන් කළ ආකාරයට සෘජුකෝණය අඩංගු පාද a හා b ද කර්ණය c ද ලෙස ගත් විට එම සමීකරණ තුන නම්



(1) $a = x^2 - y^2$ (2) $b = 2xy$ (3) $c = x^2 + y^2$

පහත දැක්වෙන x හා y අගයයන් අනුව a හා b හා c හි අගය සොයා ඒවා පයිතගරස් ත්‍රිත්වයක් වන්නේ දැයි බලන්න.

x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	....	....	....
3	1	....	....	....
4	1	....	....	....
4	3	....	....	....
5	4	....	....	....
5	2	....	....	....
6	1	....	....	....
6	5	....	....	....
7	2	....	....	....

x හා y හි තවත් කවර අගයයන් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව සාදන්නේ දැයි සොයන්න.

18 ත්‍රිකෝණමිතිය

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ත්‍රිකෝණමිතික වගු භාවිතයෙන් කෝණයක ත්‍රිකෝණමිතික අගයන් සෙවීම
- ආරෝහණ, අවරෝහණ කෝණ හා දිගංශ ඇසුරෙන් උස දුර ගණනය කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

'ත්‍රිකෝණය' සහ **'මැනීම'** යන අරුත් දෙන ග්‍රීක වචන බිඳීමෙන් **"Trigonometry"** **(ත්‍රිකෝණමිතිය)** යන ඉංග්‍රීසි වචනය සෑදී ඇතැයි සැලකේ. අද මෙම විෂය කොටස භෞතික විද්‍යාව, තාරකා විද්‍යාව, මැනුම් ශිල්පය හා ඉංජිනේරු විද්‍යාව ආදි පුළුල් විෂය ක්ෂේත්‍ර පුරා විහිදී ඇත.

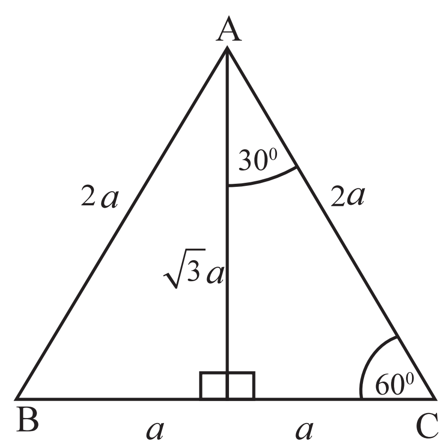
18.1 30^0, 45^0 හා 60^0 හි ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

ඉහත කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අගය පිළිබඳ ව 10 ශ්‍රේණියේ දී ලත් දැනුම මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකම්වල යෙදෙන්න.

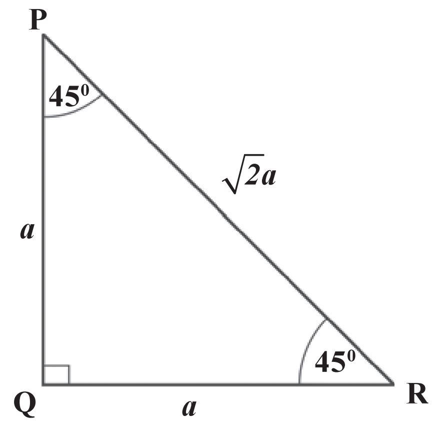
18.1 ක්‍රියාකාරකම

(i) රූපය ඇසුරින් පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

කෝණය (θ)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\theta = 30^0$			
$\theta = 45^0$			
$\theta = 60^0$			



(ii) සම්පූර්ණ කරන ලද වගුව ඇසුරින් පහත සඳහන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත පිළිබඳව ඔබගේ නිරීක්ෂණ සටහන් කරන්න.



(a) $\sin 45^0$ හා $\cos 45^0$

(b) $\sin 30^0$ හා $\cos 60^0$

(c) $\cos 30^0$ හා $\sin 60^0$

(iii) වගුවේ දැක්වෙන අගය භාවිත කරමින් පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශනවල අගය සොයන්න.

(a) $\sin 60^0 \cos 30^0$

(b) $\cos 60^0 \sin 30^0$

(c) $\sin 30^0 \cos 60^0 + \cos 60^0 \sin 30^0$

කඳු බෑවුමක් මතින් දිවෙන ඍජු මාර්ගයක් තිරසට 30^0 ක් ආනත වෙයි. කඳු පාමුල සිට මාර්ගය ඔස්සේ 20 m ක් ඇවිද ගිය ළමයෙකු කඳු පාමුල සිට කොපමණ සිරස් උසක් නැග ඇත් දැයි සොයන්න.

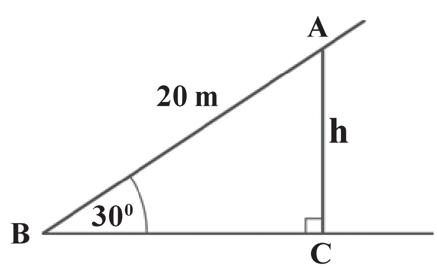
මාර්ගය ඔස්සේ 20 m ක් ගමන් කළ විට නැගි උස h නම් , $ABC\Delta$ න්

$$\frac{AC}{AB} = \sin 30^0$$

$$\frac{h}{20} = \sin 30^0$$

$$h = 20 \times \frac{1}{2}$$

$$h = 10\,m$$



නැගි උස = $\underline{\underline{10\ m}}$

18.1 අභ්‍යාසය

(මෙම අභ්‍යාසවල පිළිතුරු සුළු කිරීම අවශ්‍ය නො වේ.)

පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශනවල අගය සොයන්න.

(1) $\cos 45^0 \sin 45^0 + \sin 30^0$

(2) $\sin 30^0 \cos 30^0 + \sin 60^0 \cos 60^0$

(3) $\sin 30^0 \cos 60^0 + \cos 30^0 \sin 60^0$

(4) $\tan 45^0 \cos 45^0 + \tan 45^0 \sin 45^0$

(5) $\cos 45^0 \tan 30^0 + \sin 45^0 \tan 30^0$

සත්‍යාපනය කරන්න.

(6) $\sin 60^0 = 2\sin 30^0 \cos 30^0$

(7) $\cos 30^0 \sin 60^0 + \tan 30^0 \tan 60^0 = \frac{7}{4}$

(8) $\cos 30^0 \cos 60^0 - \sin 30^0 \sin 60^0 = 0$

18.2 ක්‍රියාකාරකම

$\sin^2 \theta = \sin\theta \sin\theta$ වේ.

$\sin^2 60^0 + \cos^2 60^0 = 1$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$0^0, 30^0, 45^0$ අගයයන් සඳහා ද එය සත්‍ය වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

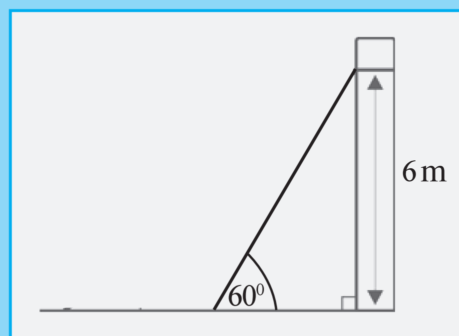
(9) ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B} = 90^0$, $AB = 6\text{ cm}$ හා $BC = 8\text{cm}$ ද වේ. AC දිග සොයා පහත සඳහන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සොයන්න.

(i) $\sin A$ (ii) $\cos A$ (iii) $\tan A$ (iv) $\sin C$ (v) $\cos C$ (vi) $\tan C$

(10) තාප්පයකට ඉණිමගක් හේත්තු කොට ඇත්තේ රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ය.

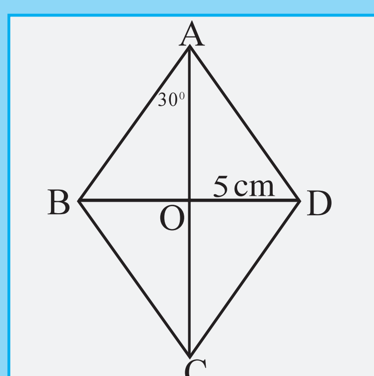
(a) ඉණිමගේ දිග සොයන්න.

(b) ඉණිමග පාමුල සිට තාප්පයේ පාමුලට දුර සොයන්න.



(11) ABCD රොම්බසයකි. AC හා BD විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ.

$OD = 5\text{ cm}$, $B\hat{A}C = 30^0$ පාදයක දිග සොයන්න. එක් එක් විකර්ණයේ දිග සොයන්න.

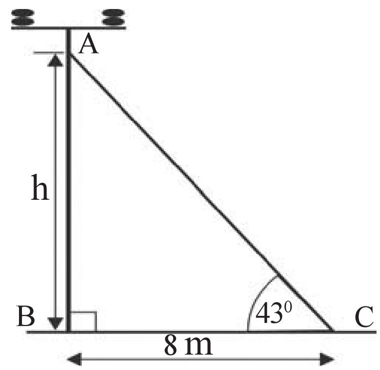


18.2 ත්‍රිකෝණමිතික වගු

මේ දක්වා $30^0, 45^0$ හා 60^0 කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිත කරමින් නොයෙකුත් ගණනය කිරීම්වල යෙදුණෙමු. දැන් පහත සඳහන් ගැටලුව සලකා බලමු.

විදුලි රැහැන් කණුවක් සිරස්ව සිටුවා ආධාරක කම්බියක් මගින් පොළොවට ඇද තබා ඇත්තේ රූපයේ දැක්වෙන පරිද්දෙනි. එහි දැක්වෙන තොරතුරු අනුව කණුවේ B සිට A තෙක් උස සොයන්න.

AB = h යැයි සිතමු.



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරුවලට අදාළව අඳිනු ලබන පරිමාණ රූපයක් මගින් h හි අගය ලබා ගත හැකි ය. ඒ සඳහා නිවැරදි ව ඇඳීම්, මැනීම් හා ගණනය කිරීම් කළ යුතු වේ. අප සතු ජ්‍යාමිතික උපකරණ කට්ටලය ඒ සඳහා එතරම් සුදුසු නො වේ. පරිමාණ රූප ඇඳීම වෙනුවට ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිත කළ හැකි ය.

- ABCΔ න් $\dfrac{AB}{BC} = \tan 43^0$

  එනම් $\dfrac{AB}{8} = \tan 43^0$

  $\therefore AB = h = 8 \tan 43^0$

- ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිතයෙන් h සොයා ගැනීම සඳහා $\tan 43^0$ හි අගය සොයාගත යුතු වේ.
- ඒ සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වගු භාවිත කළ හැකි ය.
- ලඝු ගණක වගු මගින් අගයයන් ලබාගන්නා ආකාරයට ම ත්‍රිකෝණමිතික වගු මගින්ද 0^0 සිට 90^0 දක්වා වූ කෝණවලට අනුරූප ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබාගත හැකි ය.

18.3 කෝණ සඳහා අංශක මිනුම

කෝණ මිනුම ලබන ඒකකය අංශකය බව දන්නෙමු. අංශකයක් ද සමාන කොටස් 60 කට බෙදූ විට ලැබෙන මිනුම " කලා 1 ක් ලෙස හැඳින්වේ. $(1')$

ඒ අනුව

$$60' = 1^0$$

0^0 සිට 90^0 දක්වා වූ සියලු ම කෝණ සඳහා සයින,කෝසයින හා ටැංජන වගු පිළියෙල කොට ඇත.

18.4 ටැංජන වගුව

ටැංජන වගුව මෙම පොතේ අග, 169 හා 170 පිටුවල දැක්වේ.

- එම වගුව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.
  tan 43^0 හි අගය 0.9325 වේ.
  ඒ අනුව රූපයෙහි

$$\frac{h}{8} = \tan 43^0$$

$$\frac{h}{8} = 0.9325$$

$$h = 8 \times 0.9325 \text{ m}$$

$$h = 7.4600 \text{ m}$$

$\underline{\underline{h = 7.5 \text{ m}}}$ (ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට)

ටැංජන වගුව හොඳින් නිරීක්ෂණය කර පහත සඳහන් ප්‍රකාශන ඔබගේ නිරීක්ෂණ හා සසඳන්න.

- tan 0^0 හි අගය 0 වේ.
- tan 45^0 හි අගය 1 වේ.
- කෝණයෙහි අගය 0^0 සිට 90^0 තෙක් වැඩි වත් වත් ම එහි tan අගය ද වැඩිවේ.
- 45^0 ට අඩු කෝණවල tan අගයයන් 0 සිට 1 තෙක් ක්‍රමයෙන් වැඩි වේ.
- 45^0 ට වැඩි කෝණවල tan අගයයන් 1 ට වැඩි වේ.
- tan 90^0 හි අගය ලබා ගත නොහැකි ය.(ඉතා ඉහළ අගයක් ගනී.)

කෝණ කීපයක ටැංජන අගයයන් ලබා ගනිමු.

නිදසුන 2.

(i) $22^0 30'$ හි tan අගය සොයන්න.

(ii) $54^0\ 27'$ හි tan අගය සොයන්න.

සටහන

- වගුවේ අදාළ කොටස මෙහි දැක්වේ.
- සම්පූර්ණ වගුව නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මධ්‍යන්‍ය අන්තර එකතු කරන්න.

ප්‍රකෘති ටැංජන

இயற்கைத் தான்கன்கள்

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	3939	.3973	.4006	.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32
50	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39	7	14	22	29	36	43	50	58	65
51	.2349	.2423	.2407	.2572	.2647	.2723	.2799	38	8	15	23	30	38	45	58	60	68
52	.2799	.2876	.2954	.3032	.3111	.3190	.3270	37	8	16	24	31	39	47	55	63	71
53	.3270	.3351	.3432	.3514	.3597	.3680	.3764	36	8	16	25	33	41	49	58	66	74
54	.3764	.3848	.3934	.4019	.4106	4193	.4284	35 +	0	17	26	35	43	52	60	69	78

(i) $\tan 22^0 30^/ = 0.4142$

(ii) $\tan 54^0\, 27^/$ හි අගය $\tan 54^0\, 20^/$ හි අගයට වඩා වැඩි අගයක් විය යුතුයි.

නමුත් $\tan 54^0\, 20^/ = 1.3934$ වේ.

$54^0 27^/ = 54^0\, 20^/ + 7^/$

$\therefore \tan 54^0 27^/ \rightarrow 1.3934 + 0.0060$ (මෙය මධ්‍යන්‍ය අන්තරවලින් ලබාගෙන ඇත.)

$\therefore \tan 54^0 27^/ = \underline{\underline{1.3994}}$

ටැංජන අගය දී ඇති විට අදාළ කෝණය සෙවීම

නිදසුන 3.

(iii) tan අගය 0.4568 වූ කෝණය සොයන්න.

සටහන

- වගුවේ අදාළ කොටස මෙහි දැක්වේ.
- සම්පූර්ණ වගුව නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මධ්‍යන්‍ය අන්තර එකතු කරන්න.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006	.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32

මෙහි 0.4568 යනු 0.557 + 0.0011 වේ.

$$\begin{array}{r} 24^0\ 30^{\prime} \\ 3^{\prime} \\ \hline 24^0\ 33^{\prime} \end{array}$$

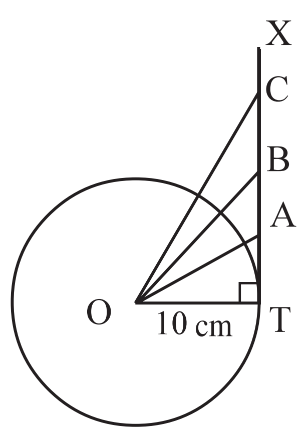
tan අගය 0.4568 වන කෝණය $24^0 33^{\prime}$ වේ.
(ඉහත නිදසුන්වල අගය ලබාගෙන ඇති ආකාරය ලඝුගණක වගුවකින් අගය ලබාගන්නා ආකාරය හා සසඳන්න.)

18.3 ක්‍රියාකාරකම

- අරය 10 cm වන වෘත්තයක් අඳින්න.

- OT අරයයක් අඳින්න. OT ට ලම්බක ව TX අඳින්න.

- A, B හා C ලක්ෂ්‍ය TX මත වන පරිදි $A\hat{O}T = 20^0$, $B\hat{O}T = 40^0$, $C\hat{O}T = 50^0$ වන පරිදි OA, OB, OC අඳින්න.



- AT දුර මැන එම අගය 10 න් බෙදීමෙන් ලැබෙන අගය ටැංජන වගුවේ $\tan 20^0$ හා සසඳන්න.

- BT හා CT සඳහා ද එම ක්‍රියාවලියෙහි යෙදෙන්න.

- තවත් කෝණ කීපයක් සඳහා ද මෙම ක්‍රියාවලියෙහි යෙදෙන්න.

18.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත දක්වෙන එක් එක් කෝණයේ tan අගය සොයන්න.

(i) $25^0 30^/$ (ii) $23^0 40^/$ (iii) $30^0 30^/$ (iv) $42^0 58^/$

(v) $45^0 58^/$ (vi) $60^0 27^/$ (vii) $46^0 36^/$ (viii) $70^0 50^/$

(ix) $10^0 54^/$ (x) $40^0 47^/$

(2) පහත දක්වෙන එක් එක් tan අගයට අනුරූප කෝණය සොයන්න.

(i) 0.5216 (ii) 1.7321 (iii) 1.1785 (iv) 7.3000

(v) 0.5116 (vi) 8.0281 (vii) 57.29 (viii) 20.45

(ix) 2.0794 (x) 2.1759

18.5 සයින වගුව

ප්‍රකෘති සයින

සයින වගුව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.
පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශන ඔබගේ නිරීක්ෂණ හා සසඳන්න.

- $\sin 0^0$ හි අගය 0 වේ.
- $\sin 45^0$ හි අගය 0.7071 වේ.
- $\sin 90^0$ හි අගය 1.0000 වේ.
- 0^0 සිට 90^0 දක්වා කෝණවල sin අගයයන් 0 සිට 1.0000 දක්වා ක්‍රමයෙන් වැඩි වේ.

කෝණ කීපයක සයින අගයයන් ලබා ගනිමු.

නිදසුන 4.

(i) $\sin 25^0 40^/$ සොයන්න.

(ii) $\sin 55^0 56^/$ සොයන්න.

සටහන

- වගුවේ අදාළ කොටස මෙහි දක්වේ.
- සම්පූර්ණ වගුව නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මධ්‍යන්‍ය අන්තර එකතු කරන්න.

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14

(i) $\sin 25^0 40^/ = 0.4321$

(ii) $\sin 55^0 56^/ = 0.8274 + 0.0010$

$\therefore \sin 55^0 56^/ = \underline{\underline{0.8284}}$

සයින අගය දී ඇති විට අදාළ කෝණය සෙවීම

නිදසුන 5.

සයින අගය 0.8864 වූ කෝණය සොයන්න.

සටහන

- අදාළ කොටස මෙහි දැක්වේ.
- සම්පූර්ණ වගුව නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මධ්‍යන්‍ය අන්තරයට අදාල තීරයේ උඩින් දැක්වෙන කලා සංඛ්‍යාව එකතු කරන්න.

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
57	0.8387	0.8403	0.8418	0.8434	0.8450	0.8465	0.8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557	.8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646	.8660	30	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	.8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11

$$\begin{aligned} 0.8864 &= 0.8857 + 0.0007 \\ &= 62^0\,20' + 5' \\ &= 62^0\,25' \end{aligned}$$

$\therefore$ සයින අගය 0.8864 වන කෝණය $62^0 25'$ වේ.
(කෝණය ලබා ගත් ආකාරය ලඝුගණක වගුවකින් ප්‍රතිලඝුගණක ලබා ගන්නා ආකාරය හා සසඳන්න.)

18.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත දක්වෙන එක් එක් කෝණයේ sin අගය සොයන්න.

(i) $26^0 36'$	(ii) $42^0 23'$	(iii) $30^0 54'$	(iv) $52^0 42'$	(v) $58^0 45'$
(vi) $62^0 7'$	(vii) $42^0 37'$	(viii) $72^0 50'$	(ix) $12^0 55'$	(x) $80^0 11'$

(2) පහත දක්වෙන එක් එක් සයින අගයට අනුරූප කෝණ සොයන්න.

(i) 0.3717	(ii) 0.9643	(iii) 0.8225	(iv) 0.5555	(v) 0.2372
(vi) 0.7232	(vii) 0.5897	(viii) 0.3227	(ix) 0.4325	(x) 0.6767

18.6 කෝසයින වගුව

ප්‍රකෘති කෝසයින

සම්පූර්ණ කෝසයින වගුව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.
පහත දක්වෙන ප්‍රකාශන හා ඔබගේ නිරීක්ෂණ සසඳන්න.

- $\cos 0^0$ හි අගය 1.0000 වේ.
- $\cos 45^0$ හි අගය 0.7071 වේ. ($\sin 45^0$ හි අගය හා සසඳන්න.)
- $\cos 90^0$ හි අගය 0.0000 වේ.
- 0^0 සිට 90^0 තෙක් කෝණය ක්‍රමයෙන් වැඩි වත් ම කොසයින අගය 1.0000 සිට 0 දක්වා ක්‍රමයෙන් අඩුවේ.
- කෝණය වැඩි වන විට කෝසයින අගයන් අඩු වන නිසා කෝසයින් අගයයන් ලබා ගැනීමේ දී වගුවේ අදාළ මධ්‍යන්‍ය අන්තර අගය අඩු කළ යුතු වේ. කෝණ කීපයක කෝසයින අගය ලබා ගනිමු.

නිදසුන 6.

(i) $28^0 20'$ හි කෝසයින අගය සොයන්න.
(ii) $63^0 45'$ හි කෝසයින අගය සොයන්න.

සටහන

- වගුවේ අදාළ කොටස මෙහි දක්වේ.
- සම්පූර්ණ වගුව නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මධ්‍යන්‍ය අන්තර අඩු කරන්න.

25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60	3	5	8	10	13	15	18	20	23
60	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	.8810	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින

இயற்கைக் கோசைன்கள்

NATURAL COSINES

(i) $\cos 28^0 20^{/} = 0.8802$

(ii) $\cos 63^0 45^{/} = 0.4436 - 0.0013$

$\therefore \cos 63^0 45^{/} = \underline{\underline{0.4423}}$

කෝසයින අගය දී ඇති විට අදාළ කෝණය සෙවීම

නිදසුන 7.

cos අගය 0.5698 වූ කෝණය සොයන්න.

- අදාළ කොටස මෙහි දක්වේ.
- සම්පූර්ණ වගුව නිරීක්ෂණය කරන්න.
- අගය ලබා ගෙන ඇති ආකාරය නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මධ්‍යන්‍ය අන්තරයට අදාළ තීරයේ උඩින් දැක්වෙන කලා සංඛ්‍යාව අඩු කරන්න.

33	0.5446	0.5471	0.5495	0.5519	0.5544	0.5568	0.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	.5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	.6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින

இயற்கைக் கோசைன்கள்

NATURAL COSINES

වගුවේ 0.5698 ට පූර්වාසන්න අගය .5688 වේ.

මධ්‍යන්‍ය අන්තරයට අදාළ කලා සංඛ්‍යාව අඩු කිරීමෙන්

කෝසයින අගය 0.5698 වන කෝණය $= 55^0 20^/ - 4^/$

$= \underline{\underline{55^0 16^/}}$

18.4 අභ්‍යාසය

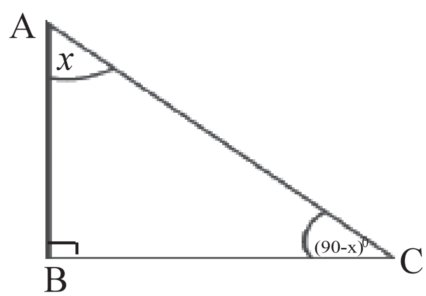
(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ කෝසයිනය සොයන්න.

(i) 36^0	(ii) $43^0\ 12^/$	(iii) $74^0\ 42^/$	(iv) $84^0\ 57^/$
(v) $44^0\ 29^/$	(vi) $55^0\ 18^/$	(vii) $64^0\ 45^/$	(viii) $37^0\ 27^/$
(ix) $22^0\ 35^/$	(x) $75^0\ 35^/$		

(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝසයින අගයයන් අනුරූප කෝණය සොයන්න.

(i) 0.1435	(ii) 0.2346	(iii) 0.6172	(iv) 0.8457
(v) 0.4428	(vi) 0.5586	(vii) 0.9928	(viii) 0.4391
(ix) 0.2251	(x) 0.7743		

කෝණයක කෝසයින අගය, සයින වගුව භාවිතයෙන් සෙවීම



දී ඇති රූපයෙහි

ABC සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණයේ

$\hat{A} = x$ නම් $\hat{C} = (90 - x)^0$ වේ.

$\therefore \cos x = \dfrac{AB}{AC}$ හා $\sin(90 - x)^0 = \dfrac{AB}{AC}$ වේ.

$$\therefore \boxed{\cos x = \sin (90 - x)^0}$$

නිදසුන 8.

$x = 40^0$ විට,

$\cos 40^0 = \sin(90^0 - 40^0) = \sin 50^0$

$x = 60^0$ විට,

$\cos 60^0 = \sin(90^0 - 60^0) = \sin 30^0$

18.4 ක්‍රියාකාරකම

ඔබ කැමති ඕනෑ ම සුළු කෝණ තුනක කෝසයින අගය

- කෝසයින වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.
- සයින වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.
- ලැබූ පිළිතුරු එකිනෙක සසඳන්න.
- වෙනස්කම් ඇතොත් ඊට හේතු සොයන්න.
- සයින වගුව භාවිතයෙන් කෝණයක කෝසයින අගය ලබා ගන්නා ආකාරය මිතුරන් සමඟ සාකච්ඡා කරන්න.

18.5 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝසයින අගයට අනුරූප කෝණය

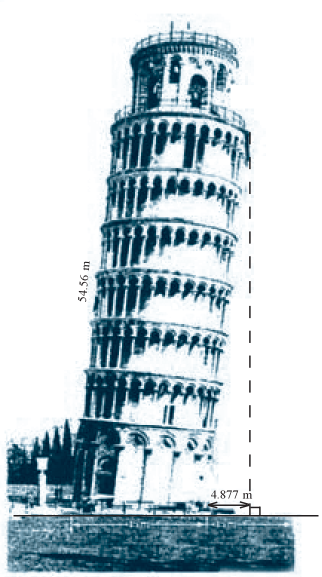
(a) කෝසයින වගුව භාවිතයෙන්

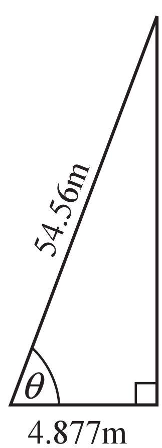
(b) සයින වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.

ඔබට ලැබුණ පිළිතුරු සසඳමින් වෙනස්කම් ඇතොත් ඊට හේතු පහදන්න

(i) 0.3145	(ii) 0.6127	(iii) 0.4795	(iv) 0.8527
(v) 0.5555	(vi) 0.9987	(vii) 0.3149	(viii) 0.1272

18.7 ත්‍රිකෝණමිතික වගු භාවිතය





ඉතාලියේ සුප්‍රසිද්ධ පීසා කුලුනේ චිත්‍රයක් මෙහි දැක්වේ. මනිනු ලැබූ එක්තරා අවස්ථාවක ලද මිනුම් මෙහි දැක්වේ. කුළුණ මෙම අවස්ථාවේ දී පොළොවට කොපමණ ආනතව ඇත්දැයි අපට සෙවිය නොහැකි ද?

එම මිනුම් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇසුරෙන් මෙලෙස දැක්විය හැකි ය.

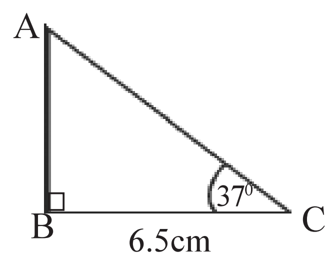
$\cos\theta = \dfrac{4.877}{54.56}$ නිසා

කෝසයින වගුව ඇසුරින් θ හි අගය සොයාගත හැකි ය. (මෙහි දැක්වෙන මිනුම් අනුව කුළුණ පොළවට දක්වන ආනතිය 85^0 ක් පමණ වේ. ගණනය කොට එම පිළිතුර නිවැරදි දැයි පිරික්සන්න.

පහසුවෙන් ළඟාවිය නොහැකි, ස්ථානයකට ඇති දුරක් හෝ උසක් වැනි අගයයක් ත්‍රිකෝණමිතික ගණනය කිරීම් මගින් පහසුවෙන් ලබාගත හැකි ය. බොහෝ විට පරිමාණ රූප ඇඳ ලබාගත යුතු මිනුම් ද සරල ගණනය කිරීමකින් අපහසුවකින් තොර ව ලබා ගැනීමට ත්‍රිකෝණමිතික වගු උපකාරී වේ.

නිදසුන 9.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B} = 90^0$, $\hat{C} = 37^0$ හා $BC = 6.5cm$ වේ. AB හා AC පාදවල දිග සොයන්න.



$$\frac{AB}{BC} = \tan 37^0$$

$$\frac{AB}{6.5\text{ cm}} = 0.7536$$

$$AB = 0.7536 \times 6.5\text{cm}$$

(ලඝුගණක භාවිතයෙන් විසඳුම ලබාගත හැකි ය.)

$$AB = 4.8984\text{cm}$$

$$\underline{\underline{AB = 4.9\text{cm}}}$$ (ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට)

ABC ත්‍රිකෝණයේ

$$\frac{BC}{AC} = \cos 37^0$$

$$\frac{6.5}{AC} = 0.7986$$

$$AC = \frac{6.5}{0.7986}$$ (ලඝුගණක භාවිතයෙන් අගය සෙවිය හැකි ය.)

$$\underline{\underline{AC = 8.14\text{cm}}}$$

- සයින වගුව භාවිතයෙන් ද AC සෙවිය හැකි ය.

$$\hat{A} = 90^0 - 37^0 = 53^0$$

$$\sin 53^0 = \frac{BC}{AC}$$

$$0.7986 = \frac{6.5\text{ cm}}{AC}$$

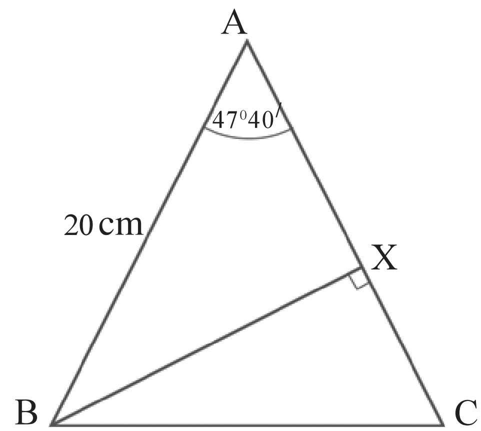
$$\therefore AC = \frac{6.5}{0.7986}$$

$$\underline{\underline{AC = 8.14\text{ cm}}}$$

> කෝණ සංකේතවත් කිරීමට යොදා ගන්නා ග්‍රීක අක්ෂර කිහිපයක්.
>
> | | |
> |---|---|
> | තීටා | θ |
> | ඇල්ෆා | α |
> | බීටා | β |
> | ගැමා | γ |

නිදසුන 10.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = AC = 20\text{ cm}$, $\hat{A} = 47^0 40^{/}$ B ලක්ෂ්‍යයෙන් AC මතට අඳිනු ලබන ලම්බකයේ දිග සොයන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න. BC පාදයේ දිග ද සොයන්න.



$ABX\Delta$ යේ $A\hat{X}B = 90^0$

$$\frac{BX}{AB} = \sin 47^0 40^{/}$$

$$\frac{BX}{20} = 0.7392$$

$$BX = 0.7392 \times 20 \text{ cm}$$

$$BX = 14.7840 \text{ cm}$$

$$\underline{\underline{BX = 15 \text{ cm}}}$$ (ආසන්න පූර්ණ සංඛ්‍යාවට)

$ABC\Delta$ යේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 20 \times 14.784 \text{ cm}^2$

$$= 10 \times 14.784 \text{ cm}^2$$

$$= 147.84 \text{ cm}^2$$

$$= \underline{\underline{148 \text{ cm}^2}}$$ (ආසන්න පූර්ණ සංඛ්‍යාවට)

$ABC\Delta$ යේ $\hat{C} = \frac{180^0 - 47^0 40^{/}}{2} = 66^0 10^{/}$

$BXC\,\Delta$ යේ $B\hat{X}C = 90^0$

$$\frac{BX}{BC} = \sin 66^0 10^{/}$$

$$\frac{14.784}{BC} = 0.9148$$

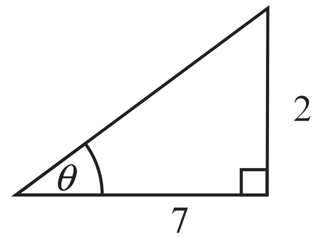
$$BC = \frac{14.784}{0.9148} \text{ cm}$$

$$\underline{\underline{BC = 16.16 \text{ cm}}}$$ (ආසන්න දශමස්ථාන දෙකකට)

නිදසුන 11.

ඒකාකාර බෑවුමක් සහිත ඍජු මාර්ගයක ආනතිය $\frac{2}{7}$ වේ. මෙම මාර්ගය තිරස් පොළව සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

මාර්ගය හා තිරස් පොළව අතර කෝණය θ නම් ,



$\tan\theta = \frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$

$\tan\theta = 0.2857$ (ආසන්න ව)

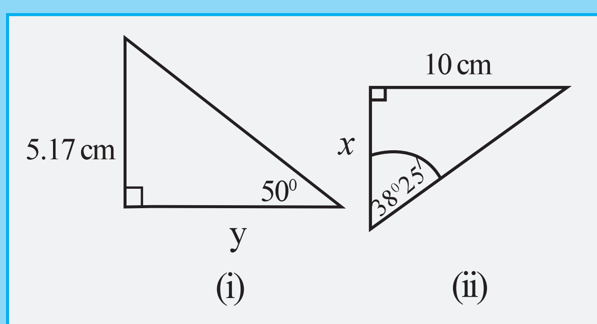
tan වගුවෙන්

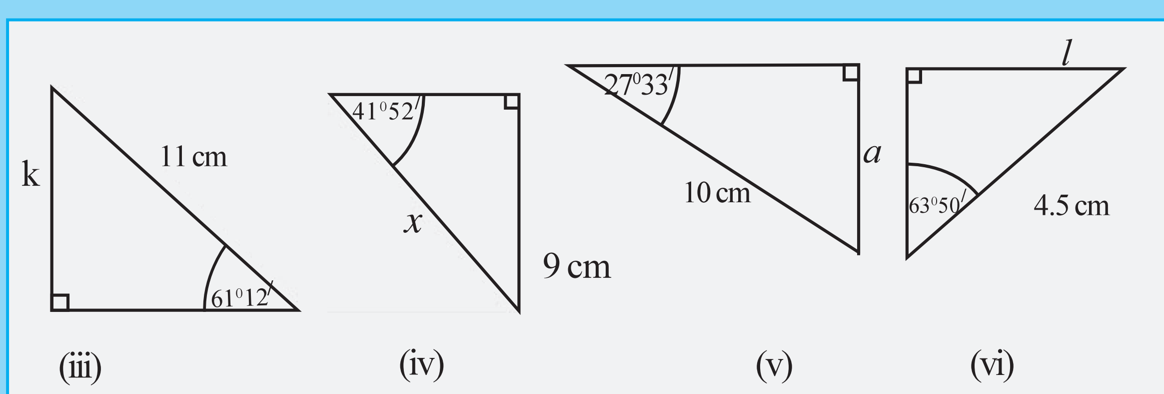
$$\underline{\underline{\theta = 15^{0}57'}}$$

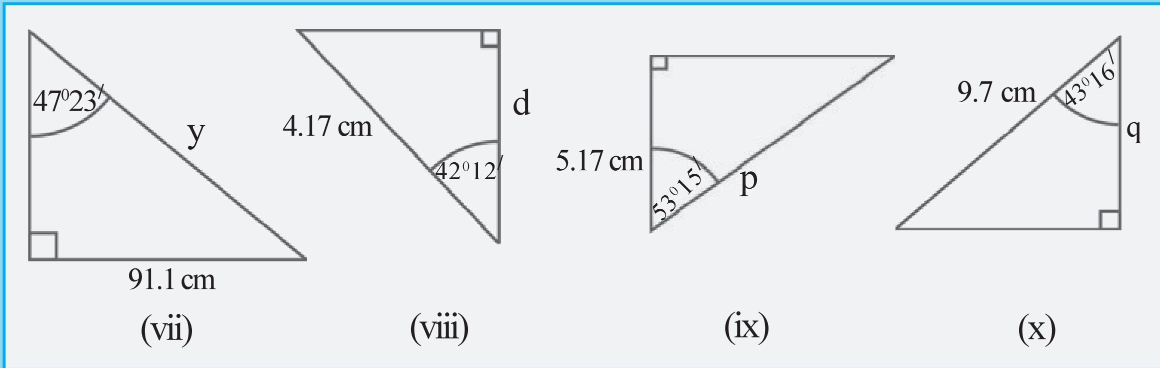
(ආනතිය $\frac{2}{7}$ රූපයේ සටහන් කර ඇති ආකාරය නිරීක්ෂණය කරන්න.)

18.6 අභ්‍යාසය

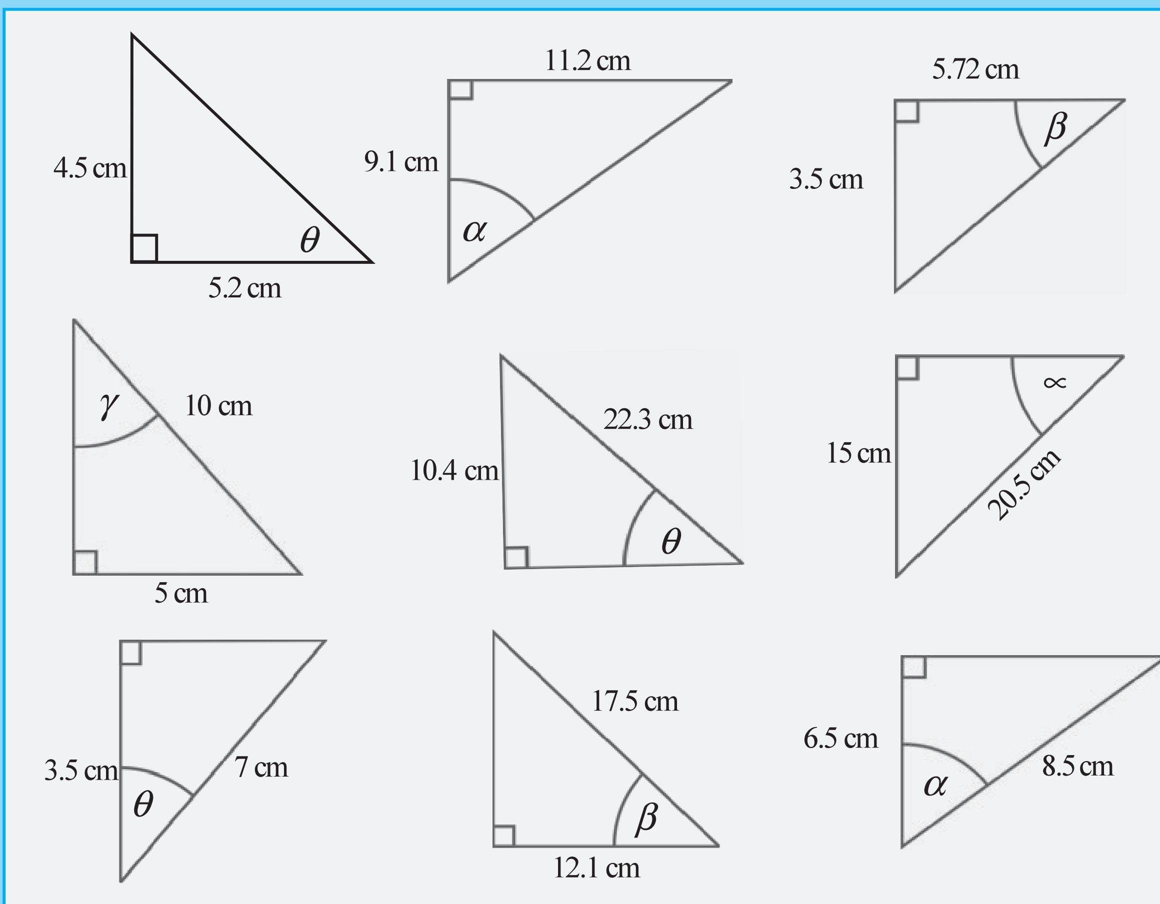
(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ ඉංග්‍රීසි අක්ෂරයකින් නම් කොට ඇති පාදයේ දිග සොයන්න.







(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ ග්‍රීක අක්ෂරයකින් නම් කොට ඇති කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.



(3) ABC Δ යේ $\hat{B} = 90^0$, $BC = 4\text{cm}$,හා $\hat{C} = 40^0$, AB දිග සොයන්න.

(4) DEF Δ යේ $\hat{E} = 90^0$, $\hat{F} = 35^0 30'$, $DE = 7$ cm , EF දිග සොයන්න.

(5) GHI Δ යේ $\hat{H} = 90^0$, $\hat{I} = 70^0$ හා $GI = 12$ cm , IH සොයන්න.

(6) JKL Δ යේ $K = 90^0$, $\hat{L} = 55^0 20'$ හා $KL = 8.21$ cm , JL සොයන්න.

(7) MNO Δ යේ $N = 90^0$, $\hat{M} = 42^0 24'$ හා $MO = 14.3$ cm , ON සොයන්න.

(8) PQR Δ යේ $\hat{Q} = 90^0$, $\hat{P} = 28^0 35'$ හා $PR = 8.23$ cm , QR සොයන්න.

(9) RSTΔ යේ $\hat{S} = 90^0$, ST $= 4.5$ cm හා RT $= 7.1$ cm , $S\hat{R}T$ සොයන්න.

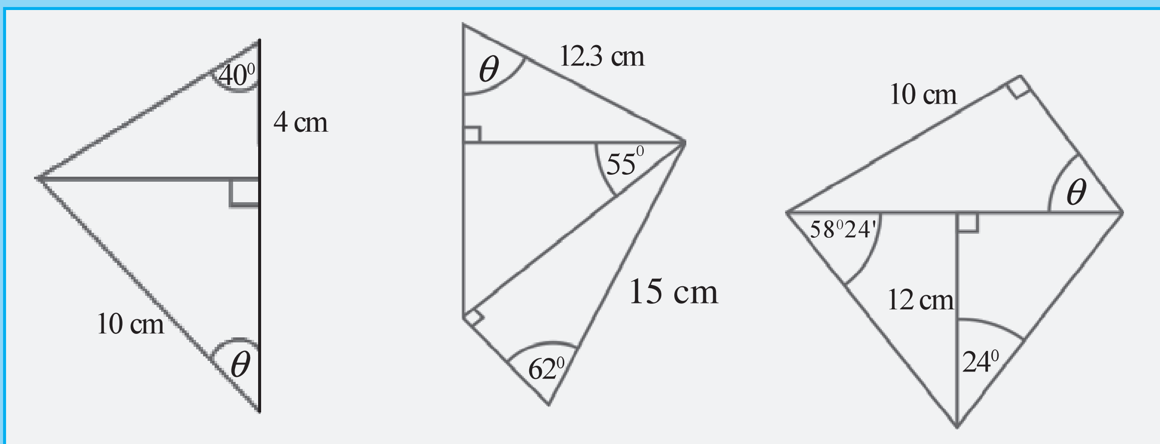
(10) UVWΔ යේ $\hat{V} = 90^0$, VW $= 5.5$ cm හා UW $= 10$ cm, $U\hat{W}V$ සොයන්න.

(11) XYZΔ යේ $\hat{Y} = 90^0$, XY $= 9$ cm හා YZ $= 10$ cm , $X\hat{Z}Y$ සොයන්න.

(12) LMNΔ යේ $\hat{M} = 90^0$, LM $= 3.4$ cm හා LN $= 15.2$ cm , $M\hat{L}N$ සොයන්න.

පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ θ සොයන්න.

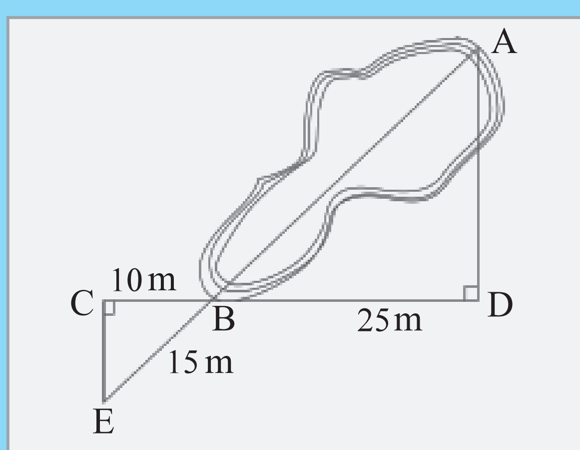
(13) (14) (15)



(16) සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ 66^0, 66^0 හා 48^0 වේ. ත්‍රිකෝණයේ කෙටි ම පාදයේ දිග 8.4 cm ක් වේ. ත්‍රිකෝණයේ අනෙක් පාදවල දිග හා ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

(17) ABCD ත්‍රපීසියමේ AB හා DC පාද සමාන්තර වේ. AB = 14 cm, DC = 20 cm හා AD = BC = 6 cm වේ. $A\hat{D}C$ හි අගයද ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

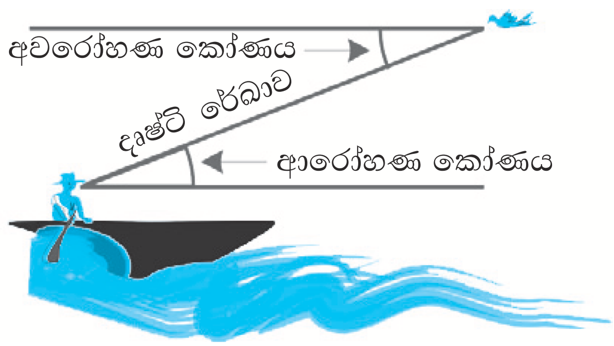
(18) විලක දිග මැනීම සඳහා මිනින්දෝරුවකු විසින් ලබා ගත් තොරතුරු රූපයෙ හි දැක්වේ. එම තොරතුරු ඇසුරින් විලේ දිග AB සොයන්න.



(19) කඳු බෑවුමක් මතින් දිවෙන සෘජු මාර්ගයක ආනතිය $\frac{4}{17}$ වේ. මෙම මාර්ගය තිරස් පොළව සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න.

(20) තිරස් පොළවේ සිට කඳු මුදුනකට දිවෙන සෘජු පාරක් තිරසට 12^0 කින් ආනත වේ. මෙම පාර දිගේ 250 m ගමන් කළ අයෙකු සිටිනුයේ ආරම්භක ස්ථානයට අනුව කොපමණ සිරස් උසකින් ද? මාර්ගයේ ආනතිය භාගයක් ලෙස දක්වන්න.

18.8 සිරස් තලයක දිශා දැක්වීම



ආනතිමානය (ක්ලයිනෝ මීටරය) මගින් ආරෝහණ හෝ අවරෝහණ කෝණ මැනගත හැකි ය.

මෙම රූපයේ තොරතුරු අනුව

- නිරීක්ෂකයාගේ ඇස් මට්ටමට ඉහළින් පිහිටි වස්තුවක් දෙස බැලීමේ දී දෘෂ්ටි රේඛාව තිරස සමඟ සාදන කෝණය එනම් මිනිසාට පක්ෂියා පෙනෙන කෝණය වැනි කෝණයක් **ආරෝහණ කෝණය** කි.

- නිරීක්ෂකයාගේ ඇස් මට්ටමට පහළින් පිහිටි වස්තුවක් දෙස බැලීමේ දී දෘෂ්ටි රේඛාව තිරස සමඟ සාදන කෝණය එනම් පක්ෂියාට මිනිසා පෙනෙන කෝණය වැනි කෝණයක් **අවරෝහණ කෝණය** කි.

නිදසුන 12

ගසක පාමුල සිට සම මට්ටමේ 100 m ඈතින් සිට බලන්නෙකුට හරියට ම ගසට ඉහළින් අහසේ පිහිටි කාලගුණය මනිනු ලබන බැලුනයක් පෙනෙනුයේ $55^0 24^/$ ආරෝහණ කෝණයකිනි. මෙම මොහොතේ දී මෙම බැලුනය පොළව මට්ටමෙන් කෙතරම් ඉහළකින් දිස් වේ ද?

$$\frac{h}{100} = \tan 55^0 24^/$$

$$h = 1.4496 \times 100$$

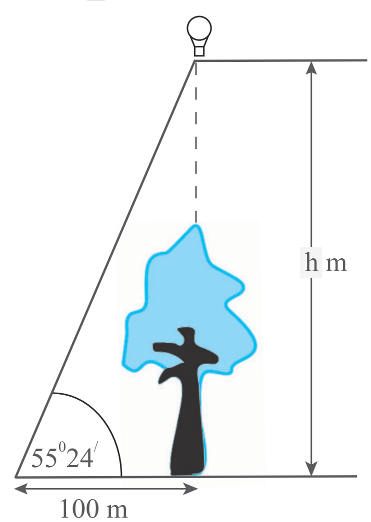
$$h = 144.9600$$

$$h = 144.96$$

$$h = \underline{\underline{145}}$$

$$\text{උස} = \underline{\underline{145 \text{ m}}}$$

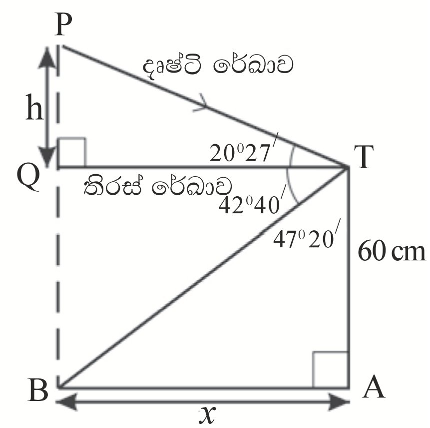
(ආසන්න ව)



නිදසුන 13.

60 m ක් උස ප්‍රදීපාගාරයක මුදුනේ සිට බලන නිරීක්ෂකයෙකුට මුහුදේ ඇත බෝට්ටුවක් $42^0 40^/$ ක අවරෝහණ කෝණයකින් පෙනේ මේ මොහොතේ බෝට්ටුවට හරි ඉහළින් තිබුණු ගුවන් යානයක් ඔහු දකිනුයේ $20^0 27^/$ ක ආරෝහණ කෝණයකිනි.

(i) බෝට්ටුවේ සිට ප්‍රදීපාගාරය පාමුලට දුර සොයන්න.
(ii) ගුවන් යානය ඇත්තේ පොළවට කොපමණ ඉහළින් දැයි ගණනය කරන්න.



බෝට්ටුවේ සිට ප්‍රදීපාගාරය පාමුලට දුර මීටර් x නම්,

ABT Δ න්,

$$\frac{x}{60} = \tan A\hat{T}B$$

$$\frac{x}{60} = \tan 47^0 20^/$$ (අවරෝහණ කෝණයේ අනුපූරකය)

$$x = 1.0850 \times 60$$
$$= 65.1000$$

B සිට A ට දුර = 65.1 m

$\therefore$ බෝට්ටුවේ සිට ප්‍රදීපාගාරය පාමුලට දුර = 65 m (ආසන්න මීටරයට)

මෙසේ ම PQT Δ න්

$$\frac{h}{65.1 \text{m}} = \tan 20^0 27^/$$

$$h = 0.3729 \times 65.1$$

$$h = 24.28$$

$$BP = h + 60 = 24.28 + 60$$

$$BP = 84.28$$

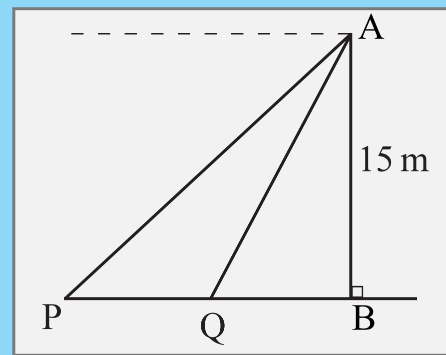
$$\underline{\underline{BP = 84 \text{ m}}}$$ (ආසන්න මීටරයට)

$\therefore$ ගුවන් යානය බෝට්ටුවට 84 m පමණ ඉහළ අහසේ තිබී ඇත.

18.7 අභ්‍යාසය

(1) තිරස් බිමක් මත කොඩි ගසක් සිටුවා ඇත. කොඩි ගස පාමුල සිට 20 m ක් ඇතින් වූ තිරස් බිමේ ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කොඩි ගස මුදුන පෙනෙනුයේ 50^0 ක ආරෝහණ කෝණයකිනි. කොඩි ගසේ උස සොයන්න.

(2) 15 m උස AB සිරස් කුලුණේ මුදුනේ සිට බලන අයෙකුට තිරස් පොළවේ P හා Q නම් ලක්ෂ්‍යවල සිටින ළමයින් දෙදෙනකු පෙනෙනුයේ 30^0 හා 60^0 ක අවරෝහණ කෝණවලිනි. ළමයින් දෙදෙනා එකිනෙකාට කොපමණ ඈතින් සිටීත් ද?
P,Q,B එකම තිරස් සරල රේඛාවක පිහිටයි.



(3) බිත්තියකට හේත්තු කර ඇති ඉණිමඟක ඉහළ කෙළවර බිත්තියේ මුදුන යාන්තමින් ස්පර්ශ කරයි. ඉණිමඟ පාමුල හා බිත්තිය අතර දුර 1.5 m කි. ඉණිමඟ පොළව සමඟ 60^0 කෝණයක් සාදන්නේ නම්, ඉණිමඟේ දිග හා බිත්තියේ උස සොයන්න.

(4) කුලුණක් මුදුනේ සිට බලන කළ සම මට්ටමේ පිහිටි 7 m උසැති ගොඩනැගිල්ලක මුදුනේ සහ පතුලේ අවරෝහණ කෝණ පිළිවෙළින් 45^0 හා 60^0 වේ. කුලුණේ උස සොයන්න.

(5) සූර්යයාගේ උන්නතාංශය (හිරු කිරණයක ආරෝහණ කෝණය) 45^0 ක් වන විට සමතලා බිමක පිහිටි කුලුණක සෙවනැල්ල සූර්යයාගේ උන්නතාංශය 60^0 ක් වන විට ඇති දිගට වඩා 10 m ක් දිග බව සොයා ගැණිනි නම් කුලුණේ උස ගණනය කරන්න.

(6) රොකට්ටුවක් ආරම්භයේ දී 10 km ක් සිරස් ව ඉහළ නගියි. අනතුරු ව සිරසට 15^0ක් ආනත ව 20 km ක් ද ඉන් පසු සිරසට 26^0 ක් ආනත ව 60 km ක් ද ගමන් කරයි. තුන්වැනි අවස්ථාව අවසානයේ දී රොකට්ටුව කොපමණ සිරස් උසකින් ඇත් ද?

(7) සමතලා පොළවේ A නම් ලක්ෂ්‍යයක දී මනිනු ලදු ව ගොඩනැඟිල්ලක් මත පිහිටුවා ඇති කොඩි ගසක මුදුනේ සහ පාමුල අරෝහණ කෝණ පිළිවෙළින් 47^0 හා 39^0 ලෙස ලැබිණි. කොඩි ගසේ උස 15 m නම් ගොඩනැඟිල්ලේ උස සොයන්න.

(8) ඒකාකාර වේගයෙන් සිරස් ව ඉහළ නඟින හෙලිකොප්ටරයක් නිරීක්ෂණය කරන්නෙක් එක්තරා මොහොතක දී එහි ආරෝහණ කෝණය $48^0 36'$ ක් ද ඊට තත්පර 10 කට පසු $72^0 24'$ ක් ලෙස ද සටහන් කර ගනියි. හෙලිකොප්ටරය නවතා තිබූ ස්ථානයේ සිට 150 m ක තිරස් දුරක සිට මෙම නිරීක්ෂණය කරන ලද නම් හෙලිකොප්ටරය ඉහළ නැඟි වේගය ගණනය කරන්න.

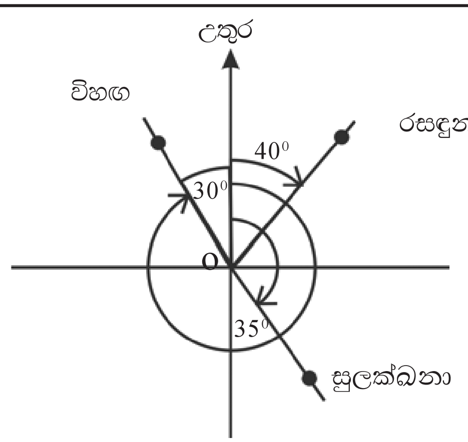
(9) ගුවන් විදුලි විකාශන කුළුණක් එක්තරා නිරීක්ෂණ ලක්ෂ්‍යයක සිට 42.5 m ක් දුරින් වූ 41 m ක් උස්වූ ගොඩනැගිල්ලක් මත පිහිටා ඇත. නිරීක්ෂණ ලක්ෂ්‍යයේ සිට කුලුණ මුදුනේ හා පාමුල ආරෝහණ කෝණ අතර පරතරය 15^0 කි. කුලුණේ උස සොයන්න.

(10) බෝට්ටුවක සිටින්නෙක් ඊට 245 m ක් ඇතින් වෙරළ අයිනේ වූ ගල්පරයක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 4^0 බව දනී. ගල්පරයේ උස සොයන්න. ඔහු එම ස්ථානයේ සිට එක එල්ලේ ම ගල්පරය දෙසට 65 m ක් යාත්‍රා කරයි. දැන් ඔහු සිටින ස්ථානයේ සිට ගල් පරයේ මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

(11) එක්තරා මොහොතක දී මුහුදේ ඇති P නම් බෝයාවක සිට 300 m ක් සිරස් ව ඉහළින් සිටින ගුවන් නියමුවකුට Q නම් වෙනත් බෝයාවක් පෙනෙනුයේ 65^0 ක අවරෝහණ කෝණයකිනි. P හා Q අතර දුර සොයන්න. PQ රේඛාවේ ම Q සිට 150 m ක් PQ දිශාවට වූ R නම් තවත් බෝයාවක් ඔහුට පෙනෙනුයේ කුමන ආරෝහණ කෝණයකින් ද?

18.9 තිරස් තලයක දිශා දැක්වීම

දිගංශය



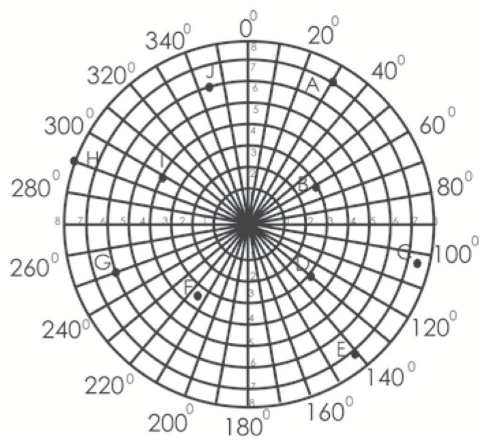
- 0 සිට 040^0 ක දිගංශයකින් රසඳුන් සිටී.
- 0 සිට 145^0 ක දිගංශයකින් සුලක්ඛනා සිටියි.
- 0 සිට 330^0 ක දිගංශයකින් විහඟ සිටී.

- කෝණ මනුවක්, මාලිමාවක් මගින් දිගංශය මැනගත හැකි ය.
- උතුරේ සිට දක්ෂිණාවර්ත ව කෝණය මැන ඉලක්කම් තුනකින් දිගංශය සටහන් කරනු ලැබේ.
- දිගංශය ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට ද ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිත කළ හැකි ය.

18.5 ක්‍රියාකාරකම

ලක්ෂ්‍යයක් හරහා අංශක 10න් 10ට රේඛා ඇඳ ඇති මෙම රූපයේ 0^0 දක්වන රේඛාව උතුර දක්වන රේඛාව යැයි සලකා A සිට J දක්වා ලක්ෂ්‍යවල දිගංශය පහත දැක්වෙන ආකාරයට වගුගත කරන්න.

ලක්ෂ්‍යය	දිගංශය



නිදසුන 14.

A සිට 025^0 ක දිගංශයකින් ගමන් අරඹන කාව්‍යා එම දිශාවට 70 m ක් ගමන් කොට B වෙත පැමිණෙයි. කාව්‍යා දැන් සිටිනුයේ

(i) A සිට කොපමණ දුරක් උතුරින් ද?

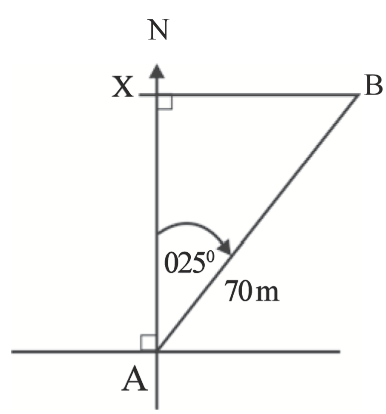
(ii) A සිට කොපමණ දුරක් නැගෙනහිරින් ද?

(i) AXBΔ න් $\dfrac{AX}{70} = \cos 25^0$

$AX = 0.9063 \times 70 \text{ m}$

$AX = 63.4410 \text{ m}$

$\therefore$ කාව්‍යා A සිට 63 m ක් උතුරෙන් සිටී.



(ii) මෙසේ ම AXBΔ න් $\dfrac{BX}{70} = \sin 25^0$

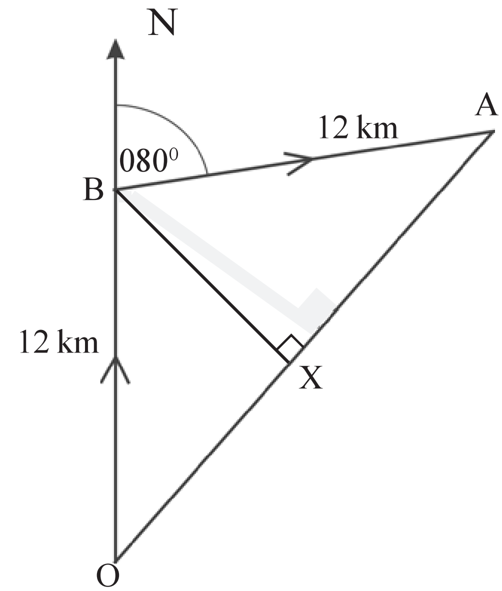
$BX = 0.4226 \times 70 \text{ m}$

$BX = 29.5820 \text{ m}$

$\therefore$ කාව්‍යා A සිට 29.6 m ක් නැගෙනහිරින් සිටියි.

නිදසුන 15.

වරායකින් පිටත් වන නැවක් උතුර දෙසට 12 km ක් යාත්‍රා කොට ඉන් පසු තවත් 12 km ක් 080^0 ක දිගංශයකින් යාත්‍රා කරයි. නැව දැන් ඇත්තේ වරායේ සිට කොපමණ දුරකින් ද? කුමන දිගංශයකින් ද?



$OBA\Delta$ යේ $OB = BA$

$$\therefore B\hat{A}O = \frac{180^0 - O\hat{B}A}{2} = \frac{180^0 - 100^0}{2} = 40^0$$

ABX සෘජුකෝණික Δ යේ

$$\frac{AX}{12} = \cos 40^0$$

$$AX = 0.7660 \times 12 \text{ km}$$

$$AX = 9.1920 \text{ km}$$

$$OA = 9.1920 \times 2 \text{ km}$$

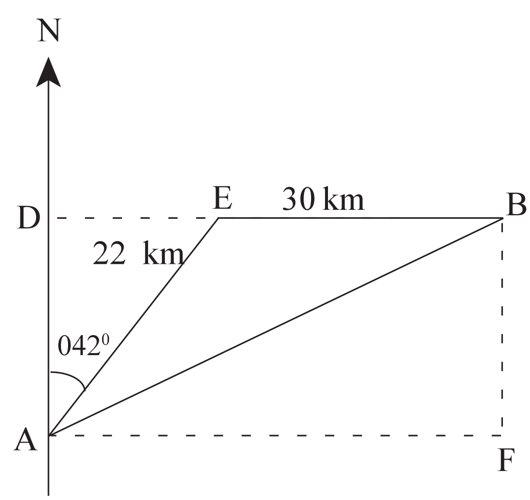
$$= 18.3840 \text{ km}$$

$$= \underline{\underline{18.4 \text{ km}}}$$

$\therefore$ දැන් නැව ඇත්තේ එය පිටත් වූ ස්ථානයෙන් 40^0 ක දිගංශයකින් ද 18.4 km දුරකින් ද වන සේ ය.

නිදසුන 16.

A නම් වරායක සිට පිටත් වන නැවක් 042^0 ක දිගංශයකින් 22 km ක් යාත්‍රා කරයි. ඉන් පසු 090^0 දිගංශයකින් 30 km යාත්‍රා කොට B වරායට ළඟා වෙයි. A සිට B හි දිගංශය හා වරාය දෙක අතර දුර සොයන්න.



ADE Δ න්

$$\frac{DE}{22} = \sin 42^0$$

$\therefore$ D හා E අතර දුර $= 0.6691 \times 22$ km $= 14.72$ km

මෙසේ ම ADE Δ න්

$$\frac{AD}{22} = \cos 42^0$$

$\therefore AD = 0.7431 \times 22 \text{ km} = 16.3482 \text{ km} = 16.35\text{km}$

ABF සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණයේ (පයිතගරස් නියමයෙන්), $AB^2 = AF^2 + BF^2$ වේ.

තව ද $AF = DE + BE = 14.72 + 30 = 44.72$ km

හා

$BF = AD = 16.35$ වේ.

$\therefore AB^2 = (44.72)^2 + (16.35)^2 = 2267.2$

$AB = \sqrt{2267.2}$

$\underline{\underline{AB = 47.6 \text{ km}}}$ (ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට)

$D\hat{A}B = A\hat{B}F$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$$\tan A\hat{B}F = \frac{AF}{BF} = \frac{44.72}{16.35} = 2.7352$$

$\underline{\underline{\therefore A\hat{B}F = 69^0 55'}}$

$\therefore$ B වරාය A වරායට 47.6 km දුරකින් හා $069^0 55'$ (එනම් 070^0) දිගංශයකින් පිහිටා ඇත.

18.8 අභ්‍යාසය

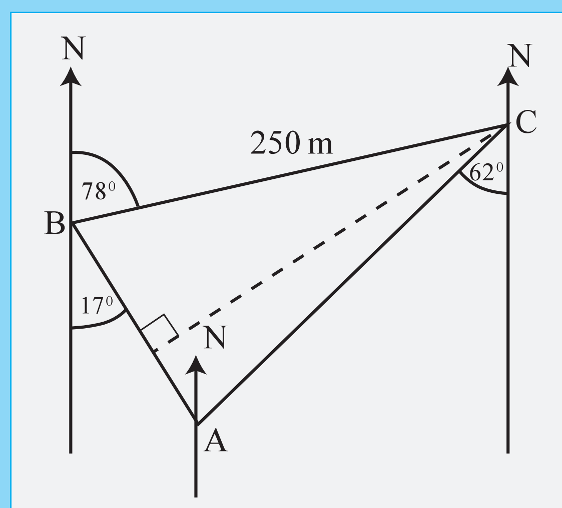
(1). (a) රූපයේ දක්වෙන තොරතුරු අනුව පහත දක්වෙන දිගංශ සොයන්න.

(i) B සිට C (ii) B සිට A

(iii) A සිට B (iv) C සිට B

(b) ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.

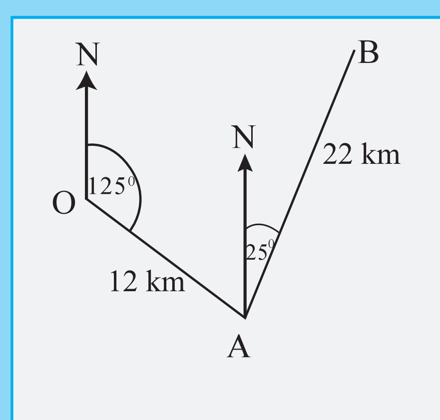
(c) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල දිග සොයන්න.



(2). මෝටර් රථයක් 125^0 ක දිගංශයකින් 12 km ක් ගමන් කොට අනතුරු ව 22 km ක් 025^0 ක දිගංශයකින් ගොස් නවතියි. මෝටර් රථය දැන් ඇත්තේ ආරම්භක ස්ථානයෙන්

(i) කොපමණ දුරක් නැගෙනහිරින් ද?

(ii) කොපමණ දුරක් උතුරින් ද?



(3). තැනිතලා බිමක C නම් ගසකට 225 m ක් හරි උතුරින් A නම් වූ ගසක් ඇත. B නම් ගස පිහිටා ඇත්තේ C ට 375 m ක් හරි නැගෙනහිරිනි.

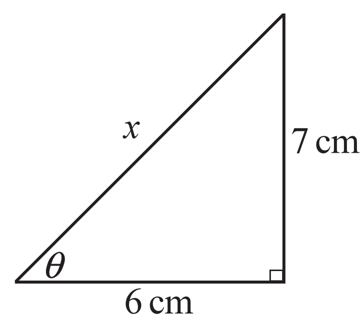
(a) A සිට B හි දිගංශය ද (b) B සිට A හි දිගංශය ද සොයන්න.

(4). එක්තරා අවස්ථාවක නැව් තුනක පිහිටීම පහත දැක්වෙන පරිද්දෙන් විය. A නැව C නැවට 25 km ක් හරි බටහිරිනි. B නැව C ට හරි දකුණු දිශාවෙනි. A නැවට $25^0 10^/$ නැගෙනහිරින් දකුණට B පිහිටියේ ය.

(i) A හා B අතර දුර සොයන්න.
(ii) B හා C අතර දුර සොයන්න.
(iii) B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(5). P නම් වරායකින් පිටත් වන නැවක් 306^0 ක දිගංශයකින් 7 km ක් යාත්‍රා කොට, ඉන් පසු 070^0 ක දිගංශයකින් යුතු ව 11 km යාත්‍රා කරයි. මේ මොහොතේ දී නැවේ සිට P වරායට ඇති දුර ගණනය කරන්න.

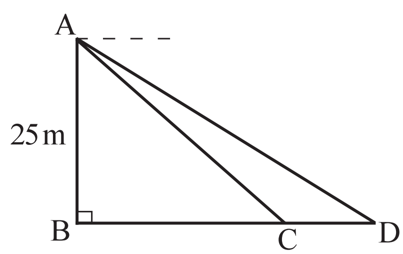
18.9 මිශ්‍ර අභ්‍යාසය



(1) රූපයෙහි දැක්වෙන තොරතුරු අනුව
(i) θ හි අගය ගණනය කරන්න.
(ii) x හි අගය ගණනය කරන්න.

(2) රූපයෙහි A සිට C හි අවරෝහණ කෝණය 55^0 ක් හා D හි අවරෝහණ කෝණය 36^0 ක් ද වේ. AB = 25 m.

(a) BC
(b) DC
(c) AD සොයන්න.



(3) සෘජුකෝණාස්‍රයක විකර්ණයක් 27 cm ක් වේ. එහි එක් පාදයක් 24 cm ක් වේ. විකර්ණයක් හා එක් පාදයක් අතර කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.

(4) ශාක්‍ය තම නිවසින් පිටත් ව 015^0 ක දිගංශයකින් 50 m ක් ගමන් කොට එතැන් සිට 040^0 ක දිගංශයකින් 70 m ක් ගමන් කරයි. අනතුරු ව 330^0 ක දිගංශයකින් 100 m ක් ගමන් කොට සිය ගමන නිමා කරයි. දැන් ශාක්‍ය සිටින්නේ තම නිවසේ සිට කොපමණ උතුරින් දැයි සොයන්න.

(5) 320 m ක් දුරක සිට ප්‍රදීපාගාරයක් දෙසට බෝට්ටුවක් පදවන්නෙක් ප්‍රදීපාගාරය මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $24^0\,30^/$ ක් බව නිරීක්ෂණය කරයි. ප්‍රදීපාගාරයේ උස සොයන්න. ප්‍රදීපාගාරය දෙසට තවත් 120 m ක් යාත්‍රා කළ විට ප්‍රදීපාගාරයේ මුදුන ඔහු දකින්නේ කවර ආරෝහණ කෝණයකින් ද?

(6) එක්තරා දිනයක ප.ව. 3.30 වන විට ප්‍රදීපාගාරයකට 1 km ක් දකුණු දෙසින් A නම් ස්ථානයේ තිබුණු නැවක් නියත වේගයක් පවත්වා ගනිමින් 060^0 ක දිගංශයකින් යාත්‍රා කොට ප.ව. 3.40 වන විට ප්‍රදීපාගාරයට හරි නැගෙනහිරින් වූ B නම් ස්ථානයක් වෙත ළඟා විය. ප්‍රදීපාගාරයේ සිට නැවේ ගමන් මාර්ගයට ඇති කෙටිම දුර LC වේ.

(a) ඉහත තොරතුරු දැක්වීම සඳහා රූප සටහනක් අඳින්න.

(b) LC දිග ගණනය කරන්න.

(c) AC දුර සොයන්න.

(d) නැව C වෙත ළඟා වන්නේ ප.ව. කීයට ද?

(7) බටහිර සිට නැගෙනහිර දිශාවට වෙරළක් දිගේ දිවෙන සෘජු මාර්ගයක A ට හරි නැගෙනහිරින් B පිහිටා ඇත. A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකේ සිට බලන විට මුහුදේ වූ නැවක් දිස්වෙන්නේ පිළිවෙළින් 060^0 හා 330^0 වූ දිගංශ වලිනි.
දළ රූප සටහනක් අඳින්න.
නැවේ පිහිටීම S ලෙස ලකුණු කරන්න.

(a) ASB කෝණය සෘජුකෝණයක් බවට හේතු දක්වන්න.
AB = 5 km නම්,

(b) AS දුර ගණනය කරන්න.

(c) BS දුර ගණනය කරන්න.

19 න්‍යාස

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- න්‍යාස සංකල්පය
- න්‍යාස එකතු කිරීම
- න්‍යාස අඩු කිරීම
- න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

19.1 න්‍යාස හැඳින්වීම

එක් රාශියක ප්‍රමාණාත්මක තොරතුරු දැක්වීමට සංඛ්‍යා භාවිත කරනු ලැබේ. රාශි දෙකක හෝ ඊට වැඩි ගණනක ප්‍රමාණාත්මක තොරතුරු දැක්වීමට **න්‍යාස** භාවිත කළ හැකි ය. එවැනි එක් අවස්ථාවක් පහත දැක්වේ.

එකොළහ වසර පන්තියක කමල් , අබිලා හා නිරෝෂන් යන සිසුන් තිදෙනා පළමු වාරය අවසානයේ ප්‍රදර්ශනය කරන ලද ඔවුන්ගේ ගණිත විෂයයෙහි දක්ෂතාව වෙනුවෙන් ගණිතය උගන්වන ගුරුතුමිය ඔවුන්ට තෑගි පාර්සලය බැගින් ප්‍රදානය කළා ය.

කමල්ගේ තෑගි පාර්සලයේ අභ්‍යාස පොත් 6 ක් ද පෑන් 2 ක් ද,
අබිලාගේ තෑගි පාර්සලයේ අභ්‍යාස පොත් 4 ක් ද පෑන් 3 ක් ද,
නිරෝෂන්ගේ තෑගි පාර්සලයේ අභ්‍යාස පොත් 5 ක් ද තිබුණි.
නිරෝෂන්ගේ තෑගි පාර්සලයේ පෑන් නොතිබුණි. මෙම තොරතුරු වගුවකින් දක්වමු.

	අභ්‍යාස පොත්	පෑන්
කමල්	6	2
අබිලා	4	3
නිරෝෂන්	5	0

මෙම වගුවේ පේළි තුනක් හා තීර දෙකක් ඇත. පේළි තුන කමල්, අබිලා හා නිරෝෂන් යන පටිපාටියට ඇති අතර තීර දෙකේ පටිපාටිය අභ්‍යාස පොත්, පෑන් වේ. පේළි හා තීරවල මෙම පටිපාටිය දන්නේ නම් ඉහත වගුවේ තොරතුරු පහත දැක්වෙන ආකාරයට ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

මෙලෙස සෘජුකෝණාස්‍ර ආකාරයට සකස් කරන ලද සංඛ්‍යා **සැලැස්මකට** න්‍යාසයක් යයි කියනු ලැබේ. න්‍යාසයක සංඛ්‍යා පේළි හා තීරු වශයෙන් ඇති අතර එම සංඛ්‍යා වරහනකින් ආවරණය කර ඇත. මෙහි අඩංගු සංඛ්‍යාවලට **අවයව** හෙවත් **සංචරක** යයි කියනු ලැබේ.

න්‍යාසවලට නිදසුන් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

19.2 න්‍යාසයක ගණය

මුලින් සඳහන් කළ න්‍යාසයේ පේළි 3 ක් ද, තීර 2 ක් ද ඇත. එබැවින් එය 3×2 න්‍යාසයක් යයි ලියා දක්වමු . එයට "තුනේ දෙකේ " න්‍යාසයක් යයි ද කියමු. මෙහි 3×2 යන්න න්‍යාසයේ **ගණය** ලෙස හඳුන්වමු . ඒ අනුව න්‍යාසයක ගණය මඟින් එහි පේළි ගණන හා තීර ගණන ප්‍රකාශ වේ.

මීළගට න්‍යාස කිහිපයක ගණය පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ මෙම න්‍යාසයේ ගණය 2×3 වේ. එනම්, මෙය දෙකේ තුනේ න්‍යාසයකි.

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ මෙම න්‍යාසයේ ගණය 1×3 වේ. (එකේ තුනේ න්‍යාසයකි). මෙහි පේළි එකක් පමණක් ඇති නිසා **පේළි න්‍යාසයක්** යයි කියමු.

(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

මෙම න්‍යාසයේ ගණය 2 × 1 වේ. (දෙකේ එකේ න්‍යාසයකි). මෙහි තීර එකක් පමණක් ඇති නිසා මෙයට **තීර න්‍යාසයක්** යයි කියමු.

(iv) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

මෙම න්‍යාසයෙහි ගණය 3 × 3 වේ. (තුනේ තුනේ න්‍යාසයකි) මෙහි පේළි ගණන හා තීර ගණන සමාන වේ. මෙවැනි න්‍යාසයකට **සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක්** යයි කියනු ලැබේ.

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

මෙය 2×2 ගණයේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි. මෙහි ප්‍රධාන විකර්ණයේ අවයව සියල්ල 1 ක් වන අතර අනෙක් අවයව සියල්ල ශූන්‍ය වේ. මෙවැනි න්‍යාසයකට **ඒකක න්‍යාසයක්** යයි කියනු ලැබේ.

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

මෙය ගණය 3×3 වූ ඒකක න්‍යාසය වේ.

න්‍යාසයක පේළි ගණන m ද, තීර ගණන n ද නම් එහි ගණය $m \times n$ වේ.

19.3 න්‍යාස නම් කිරීම

න්‍යාසයක් සාමාන්‍යයෙන් ඉංග්‍රීසි කැපිටල් අකුරකින් නම් කරනු ලැබේ.

නිදසුන 2.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $B = (-3, \ 1, \ 0)$

(iii) $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (iv) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ඒකක න්‍යාස සෑම විට ම I ලෙස නම් කරනු ලැබේ.

19.4 සමාන න්‍යාස

ගණයන් සමාන වූ න්‍යාස දෙකක අනුරූප අවයව යුගල සියල්ල එකිනෙක සමාන වන විට ඒවාට **සමාන න්‍යාස** යයි කියනු ලැබේ.

නිදසුන 3.

(i) $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ද $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

නම් $p = a$, $q = b$, $r = c$, $s = d$ වන විට X සහ Y න්‍යාස සමාන වේ.

එවිට $X = Y$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

(ii) $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ද $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ ද නම්

$P = Q$ විට a, b, c, d, e, f සොයන්න.

P හා Q න්‍යාසවල ගණය සමාන වේ. $P = Q$ වන්නේ එම න්‍යාසවල අනුරූප අවයව සමාන වන්නේ නම් පමණි.

$\therefore \ a = 3, b = 4, c = -1, d = 5, e = 0, f = 2$ වේ.

සමාන න්‍යාසවල ගණය සමාන වන අතර ඒවායේ අනුරූප අවයව ද සමාන වේ.

19.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශන සත්‍ය හෝ අසත්‍ය දැ යි නිගමනය කරන්න.

(i) පේළි 3 ක් හා තීර 2 ක් ඇති න්‍යාසයක අවයව සංඛ්‍යාව 6 කි.

(ii) න්‍යාසයක ගණය එහි පේළි සංඛ්‍යාව හා තීර සංඛ්‍යාව ගුණ කිරීමේ ලකුණින් සම්බන්ධ කර දක්වමු.

(iii) $(3 \quad 2)$ තීර න්‍යාසයකි.

(iv) පේළි m ද, තීර n ද වූ න්‍යාසයක ගණය $m \times n$ වේ.

(v) එක්තරා න්‍යාසයක ගණය $n \times 1$ වේ. මෙය තීර න්‍යාසයකි.

(vi) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ වේ.

(vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

(viii) A හා B යනු න්‍යාස දෙකකි. $A = B$ නම්,
A හි ගණය $=$ B හි ගණය වේ.

(2) ගණිත පරීක්ෂණයක දී සංජීව ලකුණු 45 ක් ද, රාජන් ලකුණු 58 ක් ද, සරෝජනි ලකුණු 51 ක් ද ලබාගත් හ. මෙම තොරතුරු තීර න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

(3) A_3, A_4 හා A_5 යනු ජාත්‍යන්තර වශයෙන් සම්මත කඩදාසි ප්‍රමාණ තුනකි. A_3 කඩදාසියක දිග 42 cm ද පළල 29.7 cm ද වේ. මෙම තොරතුරු $(42 \quad 29.7)$ යනුවෙන් පේළි න්‍යාසයකින් දැක්විය හැකි ය.

(i) A_4 කඩදාසියක දිග 29.7 cm ද, පළල 21 cm ද වේ. මෙය පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

(ii) A_5 කඩදාසියක දිග 21 cm ද, පළල 14.8 cm ද වේ. මෙම තොරතුරු පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න

(iii) A_3, A_4 හා A_5 යන කඩදාසි වර්ග තුනෙහි තොරතුරු 3×2 න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

(iv) මෙම කඩදාසි වර්ග තුනෙහි දිග තීර න්‍යාසයකින් ද පළල තීර න්‍යාසයකින් ද දක්වන්න.

(4) නිවාස සංකීර්ණයක H , M හා L යනුවෙන් නම් කරන ලද නිවාස වර්ග තුනක නිවාස ඇත. H වර්ගයේ නිවාසයක නිදන කාමර 4 ක් ද, නාන කාමර 2 ක් ද, ගරාජයක් ද ඇත. M වර්ගයේ නිවාසයක නිදන කාමර 3 ක් ද, නාන කාමර 1 ක් ද, ගරාජයක් ද ඇත. L වර්ගයේ නිවාසයක නිදන කාමර 2 ක්ද, නාන කාමර 1 ක් ද ඇත. ගරාජයක් නැත.

(i) මෙම තොරතුරු න්‍යාසයකින් දක්වා එම න්‍යාසය A යනුවෙන් නම් කරන්න.
(ii) A හි ගණය ලියන්න.
(iii) A කුමන වර්ගයේ න්‍යාසයක් ද?

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & p+q \\ x+y & p-q \end{pmatrix}$ නම් x, y, p හා q හි අගයයන් සොයන්න.

(6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ න්‍යාසයේ ගණය ලියන්න.

මෙහි පේළි තීරු ලෙසටත්, තීරු පේළි ලෙසටත් අතුරු මාරු කළ විට ලැබෙන න්‍යාසය ලියන්න. මෙම න්‍යාස දෙක සමාන ද ? ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

19.5 න්‍යාස එකතු කිරීම

එකොළහ වසර කමල්ට අබිලාට හා නිරෝෂන්ට පළමු වාරයේ ගණිතය දක්ෂතාව වෙනුවෙන් ලැබුණු තෑගි පාර්සල්වල තිබූ අභ්‍යාස පොත් හා පෑන් ප්‍රමාණ පිළිබඳ තොරතුරු වගුව හා අනුරූප න්‍යාසය පහත දැක්වේ. එම න්‍යාසය A ලෙස නම් කර ඇත.

	අභ්‍යාස පොත්	පෑන්
කමල්	6	2
අබිලා	4	3
නිරෝෂන්	5	0

$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

දෙවන වාරය අවසානයේ දී ද ඔවුන් තිදෙනාට ගණිතය දක්ෂතාව වෙනුවෙන් තෑගි පාර්සලය බැගින් ලැබුණි. එම එක් එක් තෑගි පාර්සලයේ තිබූ අභ්‍යාස පොත් සංඛ්‍යාව හා පෑන් සංඛ්‍යාව පිළිබඳ තොරතුරු වගුව හා ඊට අනුරූප න්‍යාසය පහත දක්වා ඇත. එම න්‍යාසය B ලෙස නම් කර ඇත.

	අභ්‍යාස පොත්	පෑන්
කමල්	4	3
අඛිලා	5	3
නිරෝෂන්	3	2

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

අවස්ථා දෙකේ දී ම එක් එක් සිසුවා ලැබූ අභ්‍යාස පොත් සංඛ්‍යාව හා පෑන් සංඛ්‍යාව පිළිබඳ තොරතුරු න්‍යාසය ගොඩනගමු. මේ සඳහා ඉහත න්‍යාස දෙක එකතු කරමු. මෙම න්‍යාස දෙක එකතු කිරීමට එම න්‍යාසවල අනුරූප අවයව එකතු කළයුතු බව පැහැදිලි වේ. එවිට ප්‍රතිඵලය ලෙස ලැබෙන්නේ ද එම ගණයේ ම න්‍යාසයකි.

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+4 & 2+3 \\ 4+5 & 3+3 \\ 5+3 & 0+2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}}}$$

න්‍යාස එකතු කිරීම පිළිබඳ පහත දැක්වෙන නිදසුන් අධ්‍යයනය කරන්න.

නිදසුන 4.

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ නම් $B + C$ සොයන්න.

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2+1 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

නිදසුන 5.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ සුළු කරන්න.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-5 & 3+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}}}$$

නිදසුන 6.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ සුළු කරන්න.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -1+2 \\ -3-1 & 5-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}}$$

> න්‍යාස දෙකක් එකතු කිරීම සඳහා එම න්‍යාස දෙකේ ගණය සමාන විය යුතු ය. අනුරූප අවයව එකතු කිරීමෙන් න්‍යාස දෙකේ ඓක්‍යය ලබා ගත හැකි ය. ප්‍රතිඵලය ලෙස ලැබෙන න්‍යාසයේ ගණය එකතු කරන ලද න්‍යාසවල ගණය ම වේ

19.6 න්‍යාස අඩු කිරිම

න්‍යාසයකින් තවත් න්‍යාසයක් අඩු කිරීම යනු මුල් න්‍යාසයේ අවයවවලින් දෙවන න්‍යාසයේ අනුරූප අවයව අඩු කිරීම වේ. මේ අනුව න්‍යාස අඩු කිරීමට ද එම න්‍යාස දෙකේ ගණය සමාන විය යුතු බව පැහැදිලි වේ.

නිදසුන 7.

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ සුළු කරන්න.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 1-(-3) \\ 3-1 & 2-4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}}$$

නිදසුන 8.

$A=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ හා $B=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ නම් $A-B$ සොයන්න.

$$A-B = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-1\\-2-(-3)\\0-2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}}}$$

> න්‍යාස දෙකක් අඩුකිරීමට එම න්‍යාස දෙකේ ගණය සමාන විය යුතු ය. අනුරූප අවයවයන් අඩු කිරීමෙන් න්‍යාස දෙකේ අන්තරය ලබාගත හැකි ය. ප්‍රතිඵලය ලෙස ලැබෙන න්‍යාසයේ ගණය, මුල් න්‍යාසවල ගණය ම වේ.

19.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන න්‍යාස එකතු කිරීම් සුළු කරන්න.

(i) $(1 \quad 3 \quad 2)+(2 \quad 4 \quad -2)$

(ii) $\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}4 & -1\\-4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix}1 & -2\\-3 & 2\\0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & -4\\1 & -1\end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-3 & 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\4 & 9 & -8\end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 2 & -4\\0 & -4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\0 & 1 & 0\\1 & -3 & 2\end{pmatrix}$

(2) පහත දැක්වෙන න්‍යාස අඩු කිරීම් සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -7 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ද $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ද $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

නම් පහත දැක්වෙන න්‍යාස සොයන්න.

(i) $A + B$ (ii) $A + C$ (iii) $B + C$ (iv) $A + B + C$
(v) $A + A$ (vi) $B + B + B$ (vii) $A - B$ (viii) $A - C$
(ix) $B - C$ (x) $C - B$

(4) (i) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & a \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & b \\ -3 & 2 \\ z & c \end{pmatrix}$ නම් a, b, c, x, y හා z සොයන්න.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 & e \\ 0 & b & 1 \\ d & -2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & p & 2 \\ r & 3 & s \\ -1 & q & 4 \end{pmatrix}$ නම්

මෙම සමීකරණය තෘප්ත කරන a, b, c, d, e, p, q, r හා s හි අගයයන් සොයන්න.

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ වන සේ වූ A න්‍යාසය සොයන්න.

(5) $\begin{pmatrix} x & -2y \\ 3p & -q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & x \\ -q & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ නම් x, y, p හා q සොයන්න.

(6) කාටීසීය බණ්ඩාංක තලයේ ඇඳ ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවල බණ්ඩාංක A ≡ (3,1) ද B ≡ (–2 ,–4) ද C ≡ (-1 , S) ද වේ.

(i) A, B, C පේළි ලෙස ද, x හා y බණ්ඩාංක තීර ලෙස ද ඇති න්‍යාසය ගොඩනගන්න.

(ii) A ලක්ෂ්‍යය (2 , 0) මඟින් ද B ලක්ෂ්‍යය (-1 , 2) මඟින් ද, C ලක්ෂ්‍යය (0 -2) මඟින් ද උත්තාරණය කරන්නේ නම්, A, B, C ලක්ෂ්‍ය තුනට දෙනු ලබන උත්තාරණයන් දැක්වෙන න්‍යාසයන් ගොඩනගන්න.

(iii) A, B, C ලක්ෂ්‍ය තුන උත්තාරණය කළ පසු ලැබෙන අනුරූප ලක්ෂ P, Q හා R නම් P, Q, R ශීර්ෂවල බණ්ඩාංක දැක්වෙන න්‍යාසය ගොඩනගන්න.

19.7 න්‍යාසයක් පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණකිරීම

$A = \begin{pmatrix} a & \mathrm{d} \\ b & \mathrm{e} \\ c & \mathrm{f} \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු .

A න්‍යාසය 2 න් ගුණ කිරීමෙන් ලැබෙන න්‍යාසය 2Aලෙස හැඳින්වුව හොත්, අපි 2A සොයන අයුරු සලකා බලමු.

$$2A = A + A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2d \\ 2b & 2e \\ 2c & 2f \end{pmatrix}$$

මේ අනුව,

$$2A = 2\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2d \\ 2b & 2e \\ 2c & 2f \end{pmatrix}$$ වේ.

එනම් A න්‍යාස 2 න් ගුණ කිරීමේ දී එහි සෑම අවයවයක් ම 2 න් ගුණ කළයුතු බව පැහැදිලි වේ.

මෙසේ ම,

$$3A = 3\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{pmatrix}$$

න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීමේ දී එහි සෑම අවයවයක් ම එම නිඛිලයෙන් ගුණ කළ යුතු වේ.

නිදසුන් කිහිපයක් සලකා බලමු.

නිදසුන 9.

$$4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times2 & 4\times1 \\ 4\times(-1) & 4\times0 \\ 4\times3 & 4\times(-2) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}}}$$

නිදසුන 10.

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 & -2\times2 \\ -2\times(-3) & -2\times4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}}}$$

නිදසුන 11.

$$-1(1 \quad -3 \quad 2) = (-1\times1 \quad -1\times(-3) \quad -1\times2) = \underline{\underline{(-1 \quad 3 \quad -2)}}$$

නිදසුන 12.

$$4A - \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$ නම් A සොයන්න.

$$4A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$4A = 4\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}}$$

19.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත දක්වා ඇති එක් එක් න්‍යාසය එම න්‍යාසයට පිටතින් ඇති නිඛිලයෙන් ගුණ කර දක්වන්න.

(i) $3\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ (ii) $2(3 \quad -1 \quad -2)$

(iii) $5\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ (iv) $-2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(v) $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (vi) $-4\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ නම්,

(i) $2A$ (ii) $3B$ (iii) $-2C$

(iv) $A + 4B$ (v) $A + 2B + 3C$ (vi) $3B - 4C$ සොයන්න.

(3) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ සොයන්න.

(4) $2A + 3\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ නම් A සොයන්න.

(5) $-1\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + 4B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -14 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & -11 \end{pmatrix}$ නම් B න්‍යාසය සොයන්න.

20 අසමානතා

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- අසමානතාවල විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කිරීම
- $ax + b > cx + d$ ආකාරයේ අසමානතාවන් විසඳීම
- අසමානතා ඇතුළත් ගැටලු විසඳීම

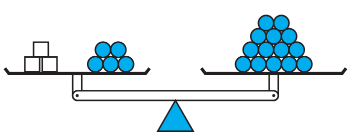
පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

20.1 හැඳින්වීම

අසමානතා පාඩම අධ්‍යයනයට සූදානම් වන ඔබ පළමු ව සරල සමීකරණ විසඳන ආකාරය සිහිපත් කරගත යුතු වේ.

$3x+5=14$ සමීකරණය විසඳන ආකාරය පහත දැක්වේ. ඉහත සමීකරණයේ නොදන්නා, එනම් අඥාත පදය x වේ. xහි අගය සොයාගැනීම මෙම සමීකරණය විසඳීමේ අරමුණයි. සමතුලිත තරාදිය සරල සමීකරණ විසඳීම සඳහා වූ හොඳ ම ආකෘතියක් වේ. පහත සඳහන් සමතුලිත තරාදියෙන් $3x+5=14$ යන සමීකරණය නිරූපණය වන ආකාරය නිරීක්ෂණය කරන්න. මෙහි x මගින් අඥාතය නිරූපණය වේ.

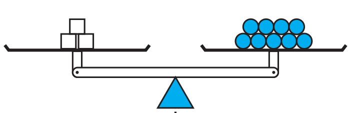
දෘශ්‍ය නිරූපණය



↓

දෙපසින්ම පබළු 5 බැගින් ඉවත් කරන්න

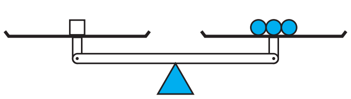
↓



↓

පබළු, තුනේ ගොඩවල්වලටත් පෙට්ටි තුනේ ගොඩවල්වලටත් වෙන් කරන්න

↓



වීජීය නිරූපණය

$\boxed{3x+5=14}$

↓

පියවර 1 $\boxed{3x+5-5=14-5}$ — එක් පැත්තකින් 5 බැගින් අඩු කරන්න

↓

$\boxed{3x=9}$

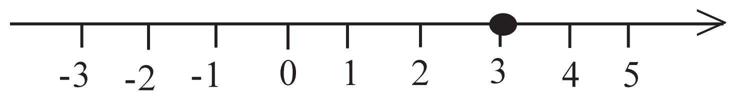
↓

පියවර 2 $\boxed{\dfrac{3x}{3}=\dfrac{9}{3}}$ — දෙපැත්ත ම 3 න් බෙදන්න.

↓

$\boxed{x=3}$

$3x+5=14$ සමීකරණයට ගැළපෙන x හි අගය 3 වේ. සරල සමීකරණයක අඥාත පදයට ගැළපෙන අගයයන් ඇත්තේ එකක් පමණි. එනම්, සරල සමීකරණයක x හි විසඳුම් කුලකයට ඇත්තේ එක ම එක අවයවයකි.
දැන් එම විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කර ඇති අන්දම බලන්න. එනම් සංඛ්‍යා රේඛාවේ 3 සඳහන් ලක්ෂ්‍යය අඳුරු කර ඇත.



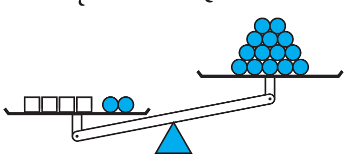
සමීකරණ විසඳීමේ දී අඥාත පදය වෙන් කර ගැනීමට, එනම් අඥාත පදය උක්ත කර ගැනීමට, x සමඟ ඇති සංඛ්‍යා ඉවත් කරගැනීම සිදු කරනු ලැබේ. මෙහි දී පළමු ව එකතු වන හා අඩු වන සංඛ්‍යා ඉවත් කර ගැනීමට ආකල ප්‍රතිලෝම දෙපැත්තටම එකතු කරගනු ලැබේ. දෙවැනි ව ගුණකිරීම හා බෙදීම වශයෙන් වූ සංඛ්‍යා ඉවත් කර ගැනීමට ද ඒවායේ ප්‍රතිලෝම ගණිත කර්ම සිදු කිරීම මඟින් කරනු ලැබේ.

20.2 $ax + b > c$ ආකාරයේ අසමානතා

දැන් $4x + 2 > 14$ අසමානතාව විසඳමු.

මෙයින් අදහස් කරන්නේ වම් පැත්තේ $4x + 2$ යන්න 14 ට වඩා වැඩිවීම සඳහා x ට ගත හැකි අගයයන් මොනවා ද යන්න සෙවීමයි. මෙහි දී සමීකරණ විසඳු ආකාරයට ම ප්‍රතිලෝම ගණිත කර්මයන් එකතු කිරීම/අඩු කිරීම හා ගුණ කිරීම/බෙදීම කරමින් x පදය වෙන් කර ගැනීම සිදු කරනු ලබයි.

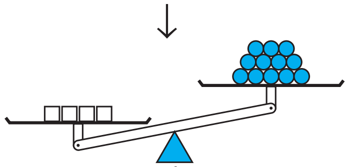
දෘශ්‍ය නිරූපණය



↓

දෙපසින් ම පබළු දෙක බැගින් ඉවත් කරන්න.

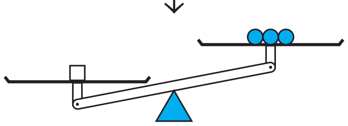
↓



↓

පබළු 4 ගොඩවල්වලටත් පෙට්ටි 4 ගොඩවල්වලටත් වෙන් කරන්න

↓



වීජීය නිරූපණය

$\boxed{4x+2>14}$

දෙපසින් ම 2 බැගින් අඩු කරන්න

පියවර 1 $\boxed{4x+2-2>14-2}$

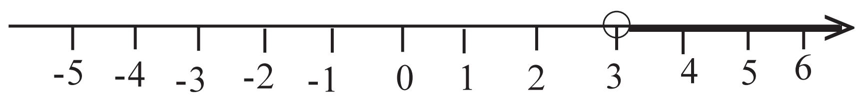
$\boxed{4x>12}$

පියවර 2 $\boxed{\frac{4x}{4}>\frac{12}{4}}$

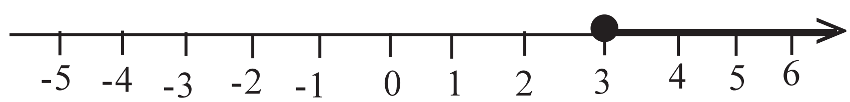
දෙපස ම 4 න් බෙදන්න

$\boxed{x>3}$

මින් අදහස් වන්නේ $4x + 2 > 14$ හි x වෙනුවට 3 ට වඩා වැඩි ඕනෑ ම අගයක් යෙදිය හැකි බව ය. අසමීකරණයක දී අඥාත පදයට විසඳුම් රාශියක් ඇති බව මෙයින් පෙනේ. එනම් x හි විසඳුම් කුලකයට අවයව අනන්ත ප්‍රමාණයක් ඇත. එය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කරන්නේ පහත දැක්වෙන ආකාරයටයි. මෙහි දී x සඳහා, $x = 3$ අගය ගත නොහැකි ය. එබැවින් $x = 3$ ලක්ෂ්‍යය රවුම් කර ඇතත් අඳුරු කර නැත.



දැන් $4x+2 \geq 14$ අසමීකරණය ඉහත දැක්වෙන පරිදි විසඳූ විට ලැබෙන විසඳුම් කුලකය $x \geq 3$ වේ. මෙම විසඳුම් කුලකයට $x = 3$ ද ඇතුළත් වන අතර එය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත දැක්වෙන්නේ පහත දැක්වෙන අන්දමට ය. එනම් $x = 3$ ලක්ෂ්‍යය රවුම් කර අඳුරු කර ඇත.



එහෙත් සෑම අසමීකරණයක් ම සරල සමීකරණයක් විසඳන ආකාරයට ම විසඳිය නොහැකි ය. පහත දැක්වෙන ගැටලුව බලන්න.

$-2x = 10$ මෙය විසඳීමට (-2) හි ගුණ්‍යන ප්‍රතිලෝමයෙන් දෙපැත්ත ම ගුණ කරමු.

$$-2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x = -5$$

-2 ගුණ්‍යන ප්‍රතිලෝමය $-\frac{1}{2}$

එහෙත් $-2x > 10$ අසමානතාවය බලන්න. මෙම අසමානතාව (-2) ගුණ්‍ය ප්‍රතිලෝමයෙන් දෙපැත්ත ගුණ කළ විට

$$x > -5$$

එනම් x හි විසඳුම් කුලකය -5 ට වඩා වැඩි විය යුතු බව ඔබට සිතෙනු ඇත.
ඒ අනුව $x = -4$ ද විසඳුමක් නිසා

$-2x > 10$ යන්නට $x = -4$ ආදේශ කරමු

එවිට වම් පැත්ත $= -2x$ දකුණු පැත්ත $= 10$

$= -2 \times (-4)$

$= 8$

එනම් $8 > 10$ යන්න ලැබේ. මෙය අසත්‍යයකි.

එබැවින් අසමානතාවක් සෘණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කරන විට හෝ බෙදන විට අසමානතා ලකුණ ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට මාරු කළ යුතු වේ. පහත දැක්වෙන උදහරණ වලින් එය තහවුරු කර ගන්න.

උදා. (i) $-15 > -40$ සත්‍යය වේ.
දෙපැත්ත ම -5 න් බෙදන්න. එසේ ම අසමානතා ලකුණු ප්‍රතිවිරුද්ධ අතට මාරු කරන්න.

$$\frac{-15}{-5} < \frac{-40}{-5}$$

$3 < 8$ මෙම ප්‍රකාශය නිවැරදි ය.

(ii) $-6 < -2$ යන්න සත්‍ය වේ.
දැන් දෙපැත්ත ම (-4) ගුණ කරන්න. අසමානතා ලකුණ ද මාරු කරන්න.

$$(-6) \times (-4) > (-2) \times (-4)$$

$24 > 8$ මෙම ප්‍රකාශය ද සත්‍ය වේ.
අසමානතා ලකුණු මාරු නොකළේ නම් ඔබට ලැබෙනුයේ $24 < 8$ යි. මෙම ප්‍රකාශය අසත්‍ය ය.

$\boldsymbol{a > b}$ **නම්**
(i) $a + c > b + c$
(ii) $a - c > b - c$
(iii) $c > o$ විට $ac > bc$ හා $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
(iv) $c < o$ විට $ac < bc$ හා $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

ඔබ මීට ඉහත උගත් අසමානතා විසඳීම මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයෙහි යෙදෙන්න

20.1 අභ්‍යාසය

(1) x සඳහා දී ඇති අගය ආදේශ කරමින් දී ඇති අසමානතාව එම අගයෙන් තෘප්ත වන්නේ ද නැද්ද යන්න සොයන්න.

(i) $x + 2 > 5, \quad x = 3$
(ii) $2x + 1 < 3, \quad x = 2$
(iii) $2x + 1 < 3, \quad x = 0$
(iv) $3x - 2 > -8, \quad x = 3$
(v) $3x - 2 > -8, \quad x = -3$
(vi) $3x - 4 < 5, \quad x = 4$

(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතා ව දී ඇති අගයයෙන් බෙදීමෙන් හා ගුණ කිරීමෙන් අසමානතා ලකුණ වෙනස් වන අන්දම නිරීක්ෂණය කරන්න.

(1) $-10 < 60$ (-2)

(2) $-20 < 8$ (-4)

(3) $-12 < 8$ (-2)

(4) $-12 < 8$ (2)

(5) $-18 < -12$ (-3)

(6) $-20 < 30$ (-5)

(7) $20 < 30$ (5)

(8) $24 > -6$ (-2)

(3) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමීකරණයේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත දක්වන්න.

(i) $3x + 2 > 5$ (ii) $2x - 5 > 3$ (iii) $2x + 1 > -5$

(iv) $4x - 3 > -7$ (v) $5x + 5 > -7$

(4) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමීකරණයේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත දක්වන්න.

(i) $2x - 7 < 3$ (ii) $3x + 5 < 2$ (iii) $4x + 3 < -5$

(iv) $5x - 3 < -13$ (v) $4x - 1 < 0$

(5) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමීකරණයේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත දක්වන්න.

(i) $4x - 3 \geqslant 5$ (ii) $2x + 1 \leqslant 5$ (iii) $6x + 5 \leqslant -7$

(iv) $3x - 7 \leqslant 7$ (v) $2x - 3 \geqslant 7$

(6) නිමල් ළඟ රු.155ක් තිබේ. රු. x බැගින් අඹගෙඩි 5 ක් ද, රු. 30 බැගින් ඇපල් ගෙඩි 4 ක් ද මිල දී ගත්තේ ය. මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් අසමානතාවක් ගොඩනගා අඹ ගෙඩියක් සඳහා තිබිය හැකි උපරිම මිල සොයන්න.

(7) මල්ලක 500 g සීනිපැකට් x ගණනක් ද, 100 g බර තේ කොළ පැකට් 8 ක් ද ඇත. මල්ලට දැරිය හැකි උපරිම බර 2 kg නම් එහි තිබිය හැකි උපරිම සීනි පැකට් ගණන කීය ද?

(8) පාන් ගෙඩියක තිබිය යුතු අවම ස්කන්ධය 450g වේ. 40g ස්කන්ධය ඇති පාන්පෙති 5ක් ද, x g ස්කන්ධය පෙති 5ක් ද කැපුවේ නම් xහි අවම අගය කුමක් ද?

නිදසුන 1.

$7-3x \geqslant 1$ හි විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත දක්වන්න.

$7-3x \geqslant 1$

7 හි ආකල ප්‍රතිලෝමය -7 දෙපැත්තට ම එකතු කරමු.

$7-3x-7 \geqslant 1-7$

$-3x \geqslant -6$

දැන් (-3) න් දෙපැත්ත ම බෙදමු.

$\frac{-3x}{-3} \leqslant \frac{-6}{-3}$ අසමානතා ලකුණු මාරුකර ඇත.

$x \leqslant 2$

එනම් 2 හෝ 2 ට කුඩා ඕනෑම අගයක් $7-3x \geqslant 1$ අසමානතාව තෘප්ත කරන බව පෙනේ. $x = -5$ ($\geqslant 2$) යොදා මෙය පරීක්ෂා කර බලමු.

$7 - 3x \geqslant 1$

වම් පැත්ත $= 7 - 3x$ දකුණු පැත්ත $= 1$

$= 7 - 3 \times (-5)$

$= 7 + 15$

$= 22$

එනම් වම් පැත්ත $\geqslant$ දකුණු පැත්ත

$\therefore 7 - 3x \geqslant 1$ වේ.

20.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාවේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාව මත ලකුණු කරන්න.

(i) $2 - 3x > -5$ (ii) $5 - x < 6$

(iii) $6 - 5x \geqslant 3$ (iv) $8 - 3x \leqslant -4$

(v) $11 - 2x < -1$ (vi) $1 - 5x > 11$

(2) විමල් රු. x බැගින් අඹගෙඩි 5 ක් ද , රු 2 බැගින් කෙසෙල් ගෙඩි 12 ක් ද ගත්තේ ය. කමලා රු. x බැගින් අඹ ගෙඩි 3 ක් ද රු. 3 බැගින් කෙසෙල් ගෙඩි 10 ක් ද ගත්තා ය. විමල් වියදම් කළ මුදල කමලා වියදම් කළ මුදලට වඩා වැඩි හෝ සමාන නම් අඹ ගෙඩියක අවම මිල කීයක් විය හැකි ද? (x පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි)

(3) A පාර්සලයේ 125 g වන පීරිසි කෝප්ප 6 ක් ද, එකක් ග්‍රෑම් x වන වීදුරු 3 ක් ද තිබේ. B පාර්සලයේ එකක් 300 g වන පිඟන් 2ක් ද, එකක් ග්‍රෑම් x වන වීදුරු 6 ක් ද ඇත. A පාර්සලය බරින් B පාර්සලය වඩා අඩු හෝ සමාන නම් වීදුරුවක අවම ස්කන්ධය ග්රැම් කීය ද?(x පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි)

(4) රවීන්ද්‍ර A ටැංකියට සම්පූර්ණයෙන් ජලය පුරවන ලද කළගෙඩියකින් වාර 7 ක් ද, බාල්දියකින් වාර 10 ක් ද ජලය පුරවයි. ලීලසේන B ටැංකියට එම කළගෙඩියෙන් වාර 10 ක් ද, එම බාල්දියෙන් වාර 2 ක් ද ජලය පුරවයි. කළගෙඩියේ පරිමාව ලීටර 8 ක් ද, බාල්දියේ පරිමාව ලීටර x ක් ද වේ. A ටැංකියේ ඇති ජලය පරිමාව B ටැංකියේ ඇති ජල පරිමාවට වඩා වැඩි හෝ සමාන නම් බාල්දියට තිබිය හැකි පරිමාවේ අවම අගය සොයන්න.
(x පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.)

(5) A මෝටර් රථය x kmh^{-1}ක වේගයෙන් පැය 2 ක් ද, 40 kmh^{-1} ක වේගයෙන් පැය 3 ක් ද ගමන් කරයි. B මෝටර් රථය x kmh^{-1} ක වේගයෙන් පැය 4 ක් ද, 25 kmh^{-1} ක වේගයෙන් පැය 4 ක් ද ගමන් කරයි. A ගමන් කළ දුරට වඩා වැඩි හෝ සමාන දුරක් B ගමන් කර තිබුණි නම් x හි අවම අගය කීයක් විය හැකි ද? (x පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.)

(6) එකක වර්ගඵලය 16 cm^2 වූ නිල්පාට පිඟන් ගඩොල් 15 ක් ද, එකක වර්ගඵලය x cm^2 වූ සුදුපාට පිඟන් ගඩොල් 10 ක් ද සුනිලා ළඟ තිබේ. නිල් පාට පිඟන් ගඩොල් 20 ක් ද, සුදු පාට පිඟන් ගඩොල් 5 ක් ද රංජනි ළඟ තිබේ. සුනිලා ළඟ ඇති පිඟන් ගඩොල්වල මුළු වර්ගඵලය රංජනි ළඟ ඇති පිඟන් ගඩොල්වල මුළු වර්ගඵලයට වඩා වැඩි හෝ සමාන නම් සුදු පිඟන් ගඩොලක අවම වර්ගඵලය කුමක් ද?

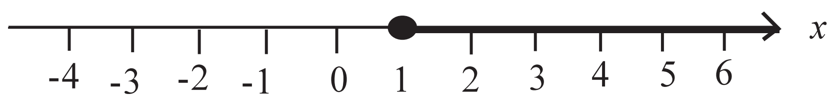
දැන් එක ම අඥාත පදය අසමානතා ප්‍රකාශයේ දෙපැත්තේ ම යෙදී තිබෙන අවස්ථාවක් සලකා බලමු.

නිදසුන 2.

$3x + 4 \geqslant x + 6$ හි විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කරන්න.

$$\begin{aligned}
3x + 4 &\geqslant x + 6 \\
3x + 4 - 4 &\geqslant x + 6 - 4 \\
3x &\geqslant x + 2 \\
3x - x &\geqslant x + 2 - x \\
2x &\geqslant 2 \\
x &\geqslant 1
\end{aligned}$$

විසඳුම් කුලකය



නිදසුන 3.

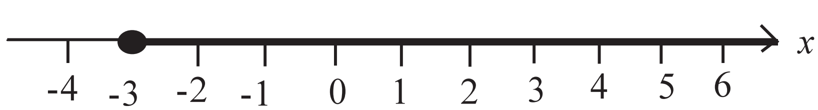
$2x - 8 \leqslant 5x + 1$ හි x හි විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කරන්න.

$$\begin{aligned}
2x - 8 &\leqslant 5x + 1 \\
2x - 8 + 8 &\leqslant 5x + 1 + 8 \\
2x &\leqslant 5x + 9 \\
2x - 5x &\leqslant 5x + 9 - 5x \\
-3x &\leqslant 9
\end{aligned}$$

$$\frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{9}{-3}$$ අසමානතා ලකුණු මාරුකර ඇත.

$$x \geqslant -3$$

විසඳුම් කුලකය



20.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාවේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කරන්න.

(i) $3x + 5 > x - 1$ (ii) $4x - 3 > 2x + 1$

(iii) $5x - 2 \leqslant 2x - 8$ (iv) $3x + 2 \geqslant x + 6$

(v) $7x + 4 > 3x$

(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාවේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛා මත ලකුණු කරන්න.

(i) $3x - 1 > 5x + 1$ (ii) $x + 2 \leqslant 4x - 1$

(iii) $2x + 3 \geqslant 6x - 5$ (iv) $3x - 4 > 5x$

(v) $x - 7 < 2x + 1$

(3) පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාවේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛා මත ලකුණු කරන්න.

(i) $3 - 2x > 3x - 7$ (ii) $4 - x \geqslant x - 4$

(iii) $5 + 3x \leqslant x + 1$ (iv) $7 + 2x > 3 + x$

(v) $3x + 7 \geqslant -3 - 2x$

(4) පහත දැක්න එක් එක් අසමානතාවේ විසඳුම් කුලකය සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කර x ට ගැළපෙන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය විසඳුම් 3 ක් ලියා දක්වන්න.

(i) $2x + 3 < x - 1$ (ii) $3x - 1 \geqslant 7 - x$

(iii) $5x - 2 > 2x + 4$ (iv) $4x + 5 \geqslant x + 8$

(v) $3x + \quad \leqslant -3 - 2x$

(5) $3x - 2 \geqslant 8 - 2x$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අඩු ම පූර්ණ සංඛ්‍යාමය අගය සොයන්න.

(6) $6x - 7 > 2x + 1$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අඩු ම පූර්ණ සංඛ්‍යාමය අගය සොයන්න.

(7) $5 - 3x \leqslant 6 - 4x$ ට අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි විසඳුම් කුලකයට ඇත්තේ අවම අගයක් ද? උපරිම අගයක් ද? එය ලියන්න.

21 වෘත්ත චතුරස්‍ර

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

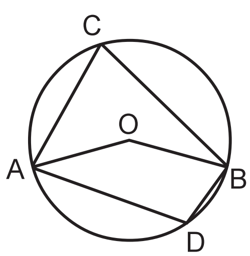
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ. යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය සාධනය හා භාවිතය
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ. යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය සාධනය හා භාවිතය

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

21.1 වෘත්තයක කෝණ

පසුගිය වසරේ දී වෘත්තයක කෝණ පිළිබඳ ව ඉගෙන ගත් ප්‍රමේයයන් නැවත මතක් කර ගනිමු.

(1) **ප්‍රමේයය:** වෘත්ත චාපයකින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය එම වෘත්ත චාපයෙන් ම පරිධියේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතිත කෝණයක් මෙන් දෙගුණයක් වේ.

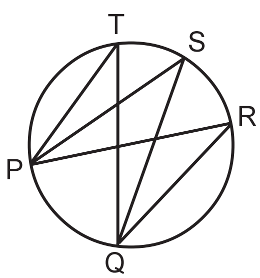


වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

$A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$

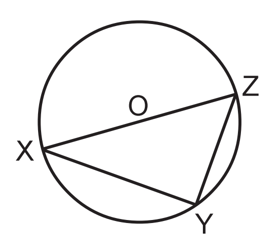
$A\hat{O}B$ (පරාවර්ත) $= 2A\hat{D}B$

(2) **ප්‍රමේයය:** වෘත්තයක එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ.



$P\hat{T}Q = P\hat{S}Q = P\hat{R}Q$

(3) **ප්‍රමේයය:** අර්ධ වෘත්තයක කෝණය සෘජුකෝණයක් වේ.



වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

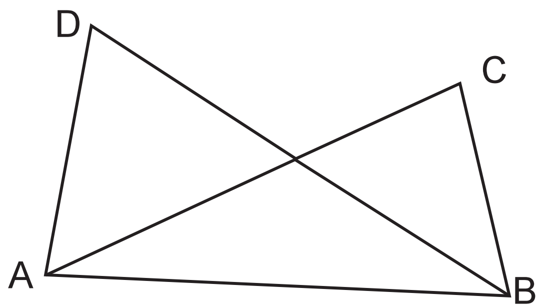
$X\hat{Y}Z = 90^0$

ඉහත රූපවල A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය ද P, Q, R,S හා T ලක්ෂ්‍ය ද X,Y හා Z ලක්ෂ්‍ය ද එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත. එසේ ලක්ෂ්‍ය කිහිපයක් එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත්නම් එම ලක්ෂ්‍ය ඒක වෘත්ත යයි කියනු ලැබේ.

ඉහත දෙවැනි ප්‍රමේයයේ විලෝමය ඒක වෘත්ත ලක්ෂ්‍යයන් සඳහා ප්‍රයෝජනවත් ප්‍රමේයයක් වේ.

ප්‍රමේයය

සරල රේඛාවක්, එයට එක ම පැත්තේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි නම් එම ලක්ෂ්‍ය දෙක ද සරල රේඛාවේ අන්ත ලක්ෂ්‍ය දෙක ද ඒක වෘත්ත වේ.



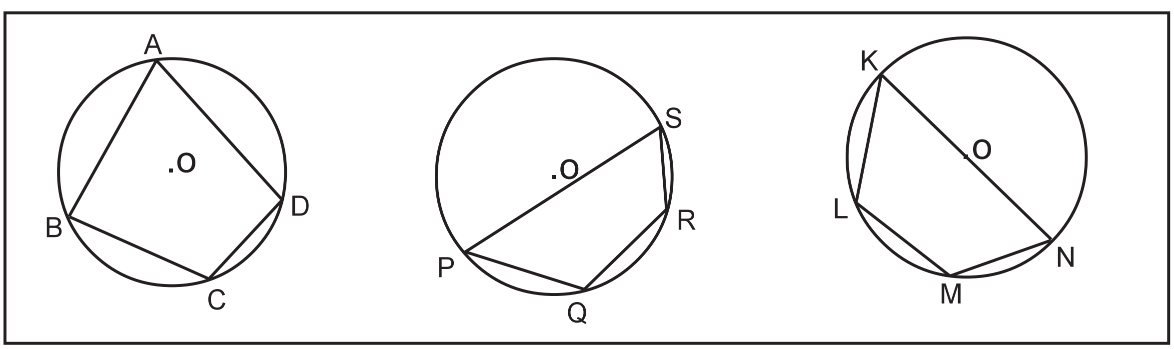
රූපයේ C හා D ලක්ෂ්‍ය AB සරල රේඛාවට එක ම පැත්තේ පිහිටා ඇත. ප්‍රමේයයට අනුව

$A\hat{C}B = A\hat{D}B$ නම්

A,B,C හා D ලක්ෂ්‍ය ඒක වෘත්ත වේ.

21.2 වෘත්ත චතුරස්‍ර

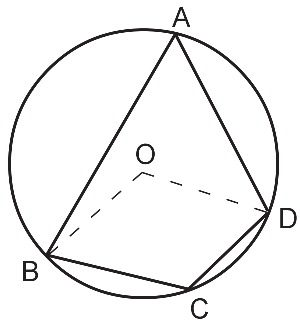
චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ හතර එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත්නම් එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.



ඉහත රූපවල ABCD,PQRS හා KLMN වෘත්ත චතුරස්‍ර වේ.

> **ප්‍රමේයය -**
>
> **වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.**

දැන් අපි මෙම ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරමු.



දත්තය :- ABCD කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තය තුළ ඇඳි වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සා.ක.යු :- $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0$ සහ

$A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$ බව

නිර්මාණය :- OB හා OD යා කිරීම.

සාධනය :- - $B\hat{O}D = 2B\hat{A}D$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය පරිධියේ ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

$B\hat{O}D$ (පරාවර්ත) $= 2B\hat{C}D$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය පරිධිය ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

$\therefore B\hat{O}D + B\hat{O}D$ (පරාවර්ත) $= 2B\hat{A}D + 2B\hat{C}D$

එහෙත් $B\hat{O}D + B\hat{O}D$ (පරාවර්ත) $= 360^0$ (ලක්ෂ්‍යයක් වටා කෝණ)

$\therefore 2B\hat{A}D + 2B\hat{C}D = 360^0$

එවිට $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0$

නමුත් $A\hat{B}C + A\hat{D}C + B\hat{A}D + B\hat{C}D = 360^0$ (චතුරස්‍රයක කෝණ)

$\therefore A\hat{B}C + A\hat{D}C + 180^0 = 360^0$

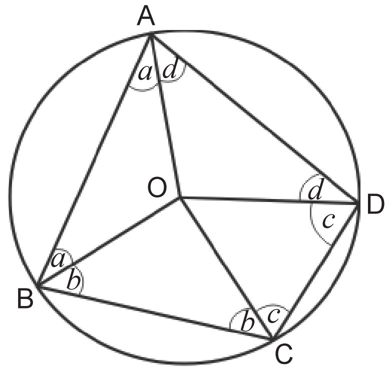
$\therefore A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$

$\therefore$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

සමද්විපාද ත්‍රිකෝණ පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් ද මෙම ප්‍රමේයයෙන් දැක්වෙන සම්බන්ධය සත්‍යාපනය කළ හැකි ය.

වෘත්තයක අරයයන් සමාන නිසා

AOB, BOC, COD හා AOD ත්‍රිකෝණ සමද්විපාද වේ.



$(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a) = 360^0$

$\therefore\ 2a+2b+2c+2d = 360^0$

$\therefore\ (a+b) + (c+d) = 180^0$

$\therefore\ A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$

එසේ ම $(a+d) + (b+c) = 180^0$

$\therefore\ B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0$

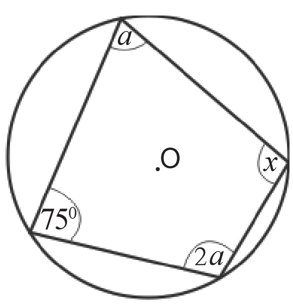
මෙම ප්‍රමේයයේ විලෝමය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස භාවිත කළ හැකි ය. එනම්,

චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක නම් එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

නිදසුන 1.

මෙම රූපවල සංකේත මඟින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.

(i)



$x + 75^0 = 180^0$

$x = 180^0 - 75^0$

$\underline{\underline{x = 105^0}}$

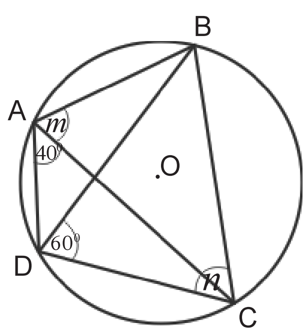
$a + 2a = 180^0$

$3a = 180^0$

$\underline{\underline{a = 60^0}}$

$\underline{\underline{2a = 120^0}}$

(ii)



$m = 60^0$ (එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ)

$B\hat{A}D = 60^0 + 40^0$

$= 100^0$

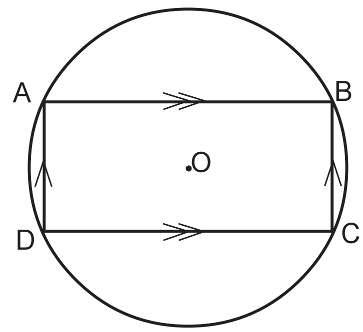
$n = 180^0 - 100^0$

$\underline{\underline{n = 80^0}}$

නිදසුන 2.

ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ ශීර්ෂ ඒක වෘත්ත වේ.

ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



දත්තය :- ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ ශීර්ෂ ඒක වෘත්ත වේ.

සා.ක.යු :- - ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව

සාධනය :- - ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නිසා

$\hat{B} + \hat{D} = 180^0$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ)

එහෙත් $\hat{B} = \hat{D}$ (ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ)

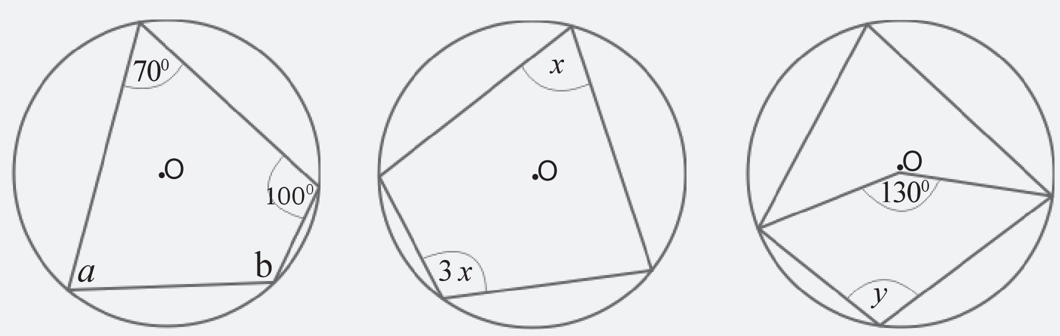
$\therefore \hat{B} = \hat{D} = 90^0$

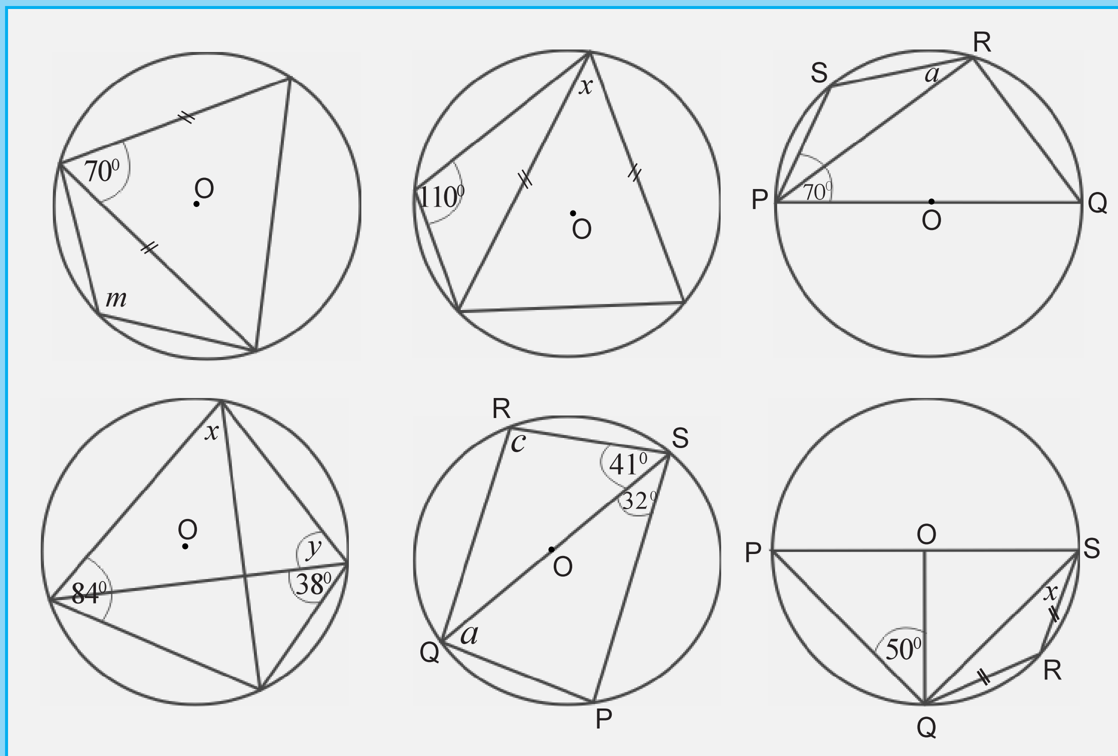
තව ද ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. (දත්තය) $\therefore AB = DC$ ද වේ.

$\therefore$ ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් වේ.

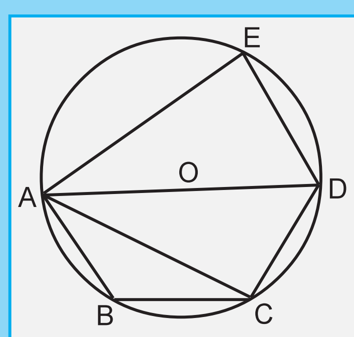
21.1 අභ්‍යාසය

(1) මෙම රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ ඒ ඒ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි. සංකේත මඟින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.





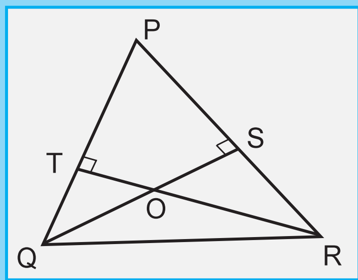
(2) රූපයේ දැක්වෙන ABCDE පංචාස්‍රයේ ශීර්ෂ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. AD යනු වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. $D\hat{A}E = 30^0$ ද, $B\hat{A}C = 25^0$ ද AB = BC හා DC = DE ද නම් ABCDE පංචාස්‍රයේ එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.



(3) ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $AB//DC$ වේ. $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ බව සාධනය කරන්න.

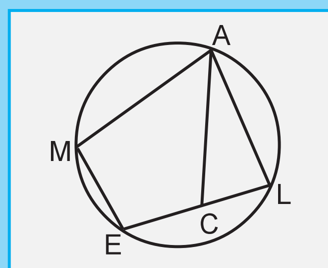
(4) KLMN වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $K\hat{L}M = K\hat{N}M$ වේ. KM වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක් බව සාධනය කරන්න.

(5) PQR ත්‍රිකෝණයේ Q සිට PR ට ඇඳි ලම්බයත් හා R සිට PQ ට ඇඳි ලම්බයත් O හි දී ඡේදනය වේ. (රූපය බලන්න.)

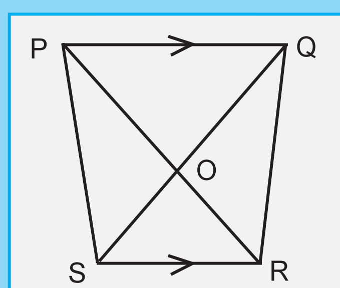


(i) PSOT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බවත්
(ii) QRST වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බවත්
සාධනය කරන්න.

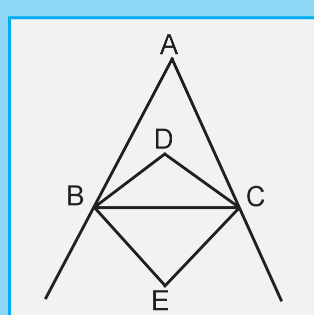
(6) MALE වෘත්ත චතුරස්‍රයේ EL පාදය මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ AC = AL වන සේ ය. $A\widehat{M}E = A\widehat{C}E$ බව සාධය කරන්න.



(7) PQRS චතුරස්‍රයේ PR හා QS විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. PQ // SR ද, SO = OR ද වේ. P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍ය ඒකවෘත්ත බව සාධනය කරන්න.



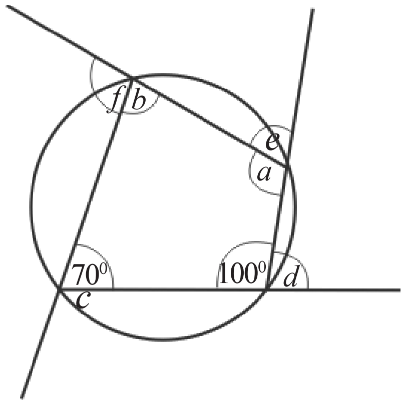
(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ B හා C හි අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක D හි දී ද බාහිර කෝණ සමච්ඡේදක E හි දී ද හමු වේ. BDCE වෘත්ත චතරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



21.3 වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණ සහ අභ්‍යන්තර කෝණ අතර සම්බන්ධය

21.1 ක්‍රියාකාරකම

මෙම රූපයේ සංකේත මගින් දැක්වෙන කෝණවල අගය සොයමු.



$a = 180^0 - 70^0 = \ldots$

$b = 180^0 - 100^0 = \ldots$

$c = 180^0 - 70^0 = \ldots$

$d = 180^0 - 100^0 = \ldots$

$e = 180^0 - 110^0 = \ldots$

$f = \ldots - \ldots = \ldots$

මෙම වෘත්ත චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සහ බාහිර කෝණවල අගයයන් වෙන වෙන ම ලියා දක්වමු.

අභ්‍යන්තර කෝණ $\rightarrow 70^0, 100, 110^0, 80^0$

බාහිර කෝණ $\rightarrow ---, ---, ---, ---$

ඔබට ලැබී ඇති අගයයන් අනුව අභ්‍යන්තර කෝණවල හා බාහිර කෝණවල විශාලත්වයන් අතර සම්බන්ධයක් ඇත් දැයි බලන්න.

> චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණයක් සැලකූ විට එයට බද්ධ ව ඇති අභ්‍යන්තර කෝණයට සම්මුඛ ව පිහිටන අභ්‍යන්තර කෝණය **අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය** ලෙස හැඳින්වේ.

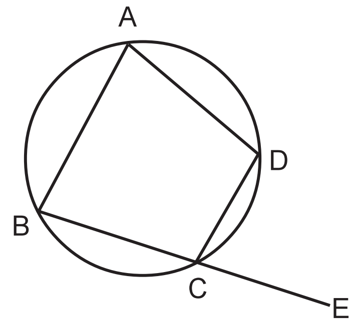
මෙම වගුව සම්පූර්ණ කරමු

බාහිර කෝණයේ විශාලත්වය	110^0	80^0		32^0
අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයේ විශාලත්වය	110^0		50^0	

වගුවේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව බාහිර කෝණයේ විශාලත්වයත් අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයේ විශාලත්වයත් සමාන වේ. මෙම සම්බන්ධය ප්‍රමේයයක් ලෙස හඳුනා ගනිමු.

> **ප්‍රමේයය**
>
> **වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.**

මෙම ප්‍රමේයය විධිමත්ව සාධනය කරන ආකාරය



දත්තය :--- ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ BC පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත.

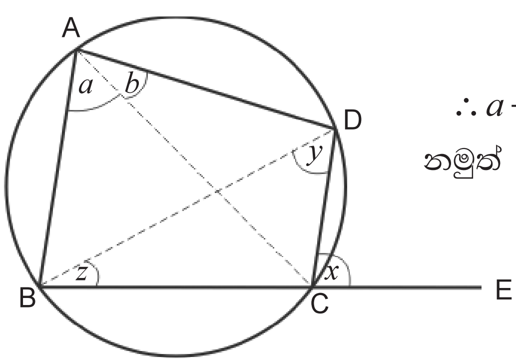
සා.ක.යු. :- - $D\hat{C}E = B\hat{A}D$ බව

සාධනය :- - $B\hat{C}D + D\hat{C}E = 180^0$ (පරිපූරක බද්ධ කෝණ)

$B\hat{C}D + B\hat{A}D \quad = 180^0$ (ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ)

$\therefore B\hat{C}D + D\hat{C}E = B\hat{C}D + B\hat{A}D$

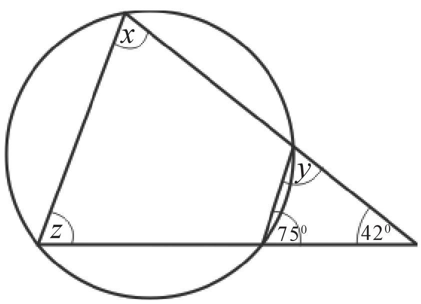
$\underline{\underline{\therefore D\hat{C}E = B\hat{A}D}}$

> ත්‍රිකෝණයක කෝණ සහ වෘත්තයක කෝණ පිළිබඳ ප්‍රමේයයන් භාවිතයෙන් ද මෙම ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කළ හැක.
>
> 
>
>
> $a = y$ (එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ)
>
> $b = z$ (එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ)
>
> $\therefore a + b = y + z$
>
> නමුත් $y + z = x$ (ත්‍රිකෝණයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ කෝණ දෙකේ ඓක්‍යයට සමාන නිසා)
>
> $\therefore a + b = x$
>
> $x \quad = a + b$
>
> $\therefore D\hat{C}E = B\hat{A}D$

මෙම ප්‍රමේයයේ ද විලෝමය ප්‍රමේයයක් ලෙස භාවිත කළ හැක. ඒ අනුව චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කළ විට සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නම් එය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

නිදසුන 3.

රූපයේ x, y හා z හි අගය සොයන්න.



$$\underline{\underline{x = 75^0}}$$

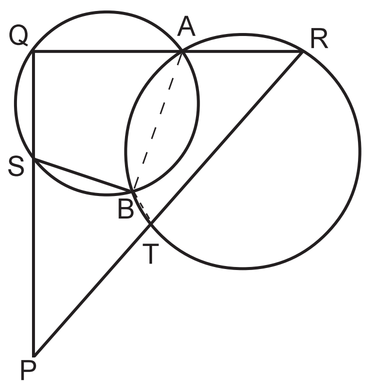
$$y = 180^0 - (75^0 + 42^0)$$

$$y = 180^0 - 117^0$$

$$\underline{\underline{y = 63^0}}$$

$$\underline{\underline{z = 63^0}}$$

නිදසුන 4.



රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක A සහ B හි දී එකිනෙක හරහා යයි. PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදය A හරහා වැටී ඇත. PSBT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

දත්තය :- රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක A සහ B හි දී එකිනෙක හරහා යයි.
PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදය A හරහා වැටී ඇත.

සා.ක.යු. :-- PSBT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව

නිර්මාණය :-- AB යා කිරීම .

සාධනය :-- ABSQ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ

$R\hat{A}B = B\hat{S}Q$ (බාහිර කෝණය = අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය)

ABTR වෘත්ත චතුරස්‍රයේ

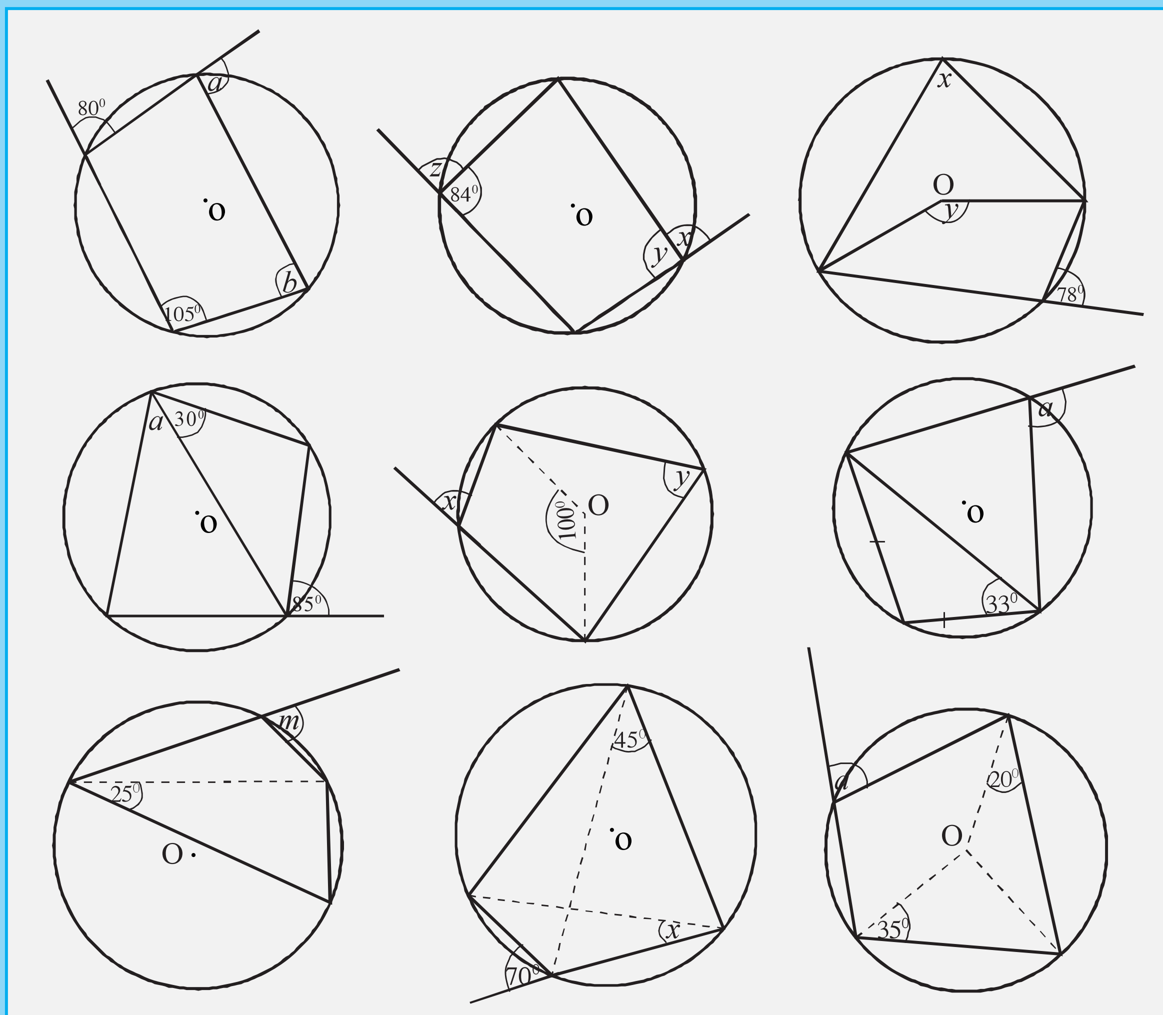
$R\hat{A}B = B\hat{T}P$ (බාහිර කෝණය = අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය)

$\therefore B\hat{S}Q = B\hat{T}P$

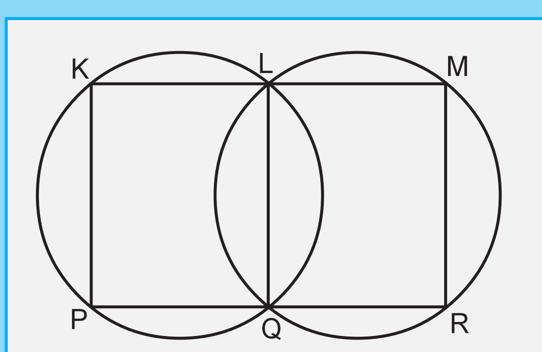
$\therefore$ PSBT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

21.3 අභ්‍යාසය

(1) මෙම රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ අදාල වෘත්තවල කේන්ද්‍රයන් ය. එක් එක් වෘත්තයේ සංකේතවලින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.



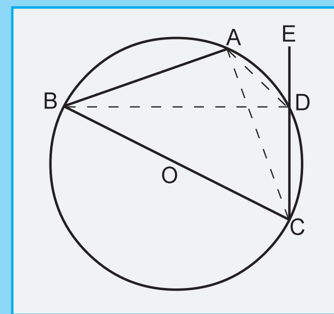
(2) රූපයේ වෘත්ත දෙක L හා Q හි දී එකිනෙක හරහා යයි. KLM හා PQR සරල රේඛා දෙකකි.



(i) $K\hat{L}Q$ ට සමාන වන කෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) $K\hat{L}Q$ ට පරිපූරක වන කෝණයක් නම් කරන්න.

(3) BC යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ CD පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත මෙම රූපය අනුව,



(i) සෘජු කෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

(ii) $A\hat{D}E$ හා $A\hat{B}C$ අතර සම්බන්ධය ලියා හේතු දක්වන්න.

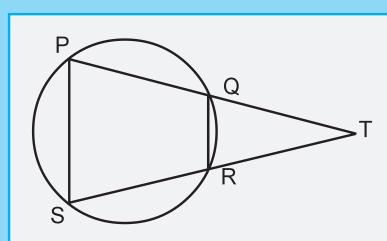
(iii) $A\hat{D}E = 75^0$ ද $C\hat{A}D = 20^0$ ද නම්

(a) $A\hat{B}D$ හි විශාලත්වය සොයන්න.

(4) PQRS වෘත්ත චතුරස්‍රයේ PQ හා SR පාද දික් කළ විට T හි දී හමු වේ. PT = ST වේ.

(i) QRT සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

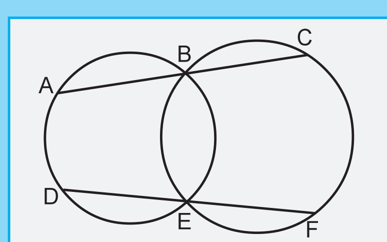
(ii) PS // QR බව සාධනය කරන්න.



(5) රූපයේ දක්වෙන වෘත්ත දෙක B සහ E හි දී ඡේදනය වේ.

ABC හා DEF සරල රේඛා දෙකකි.

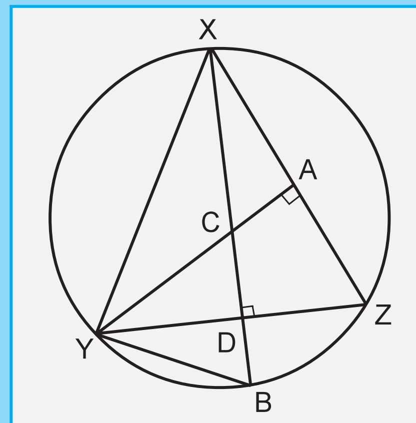
AD // CF බව සාධනය කරන්න.



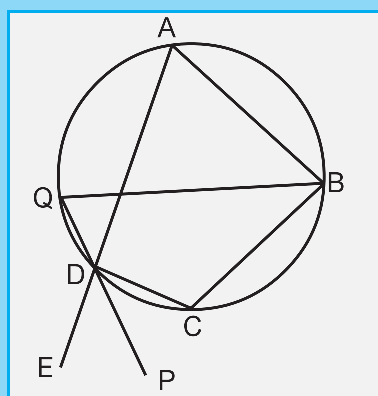
(6) XYZ යනු වෘත්තයක අන්තර්ගත ත්‍රිකෝණයකි. Y සිට XZ ට ඇඳි ලම්බය YA වේ. X සිට YZ ට ලම්බ ව ඇඳි රේඛාවට C හි දී YA ද, D හි දී YZ ද, B හි දී වෘත්තය ද හමුවේ.

(i) ACDZ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

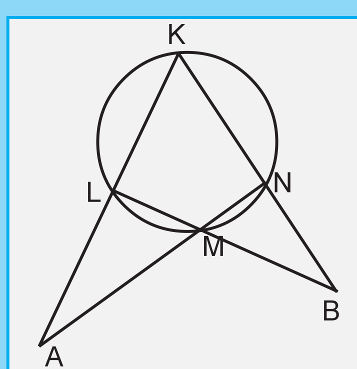
(ii) $Y\hat{C}B = Y\hat{B}C$ බව සාධනය කරන්න.



(7) ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ AD පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත. CDE කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය වන PD රේඛාව දික් කළ විට Q හි දී නැවත වෘත්තය හමු වේ. QB රේඛාවෙන් ABC කෝණය සමච්ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න.



(8) KLMN යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. KL හා NM දික් කළ විට A හි දී හමු වේ. KN හා LM දික් කළ විට B හි දී හමු වේ. ABNL වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නම් AB රේඛාව A,B,N හා L හරහා යන වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක් බව සාධනය කරන්න.



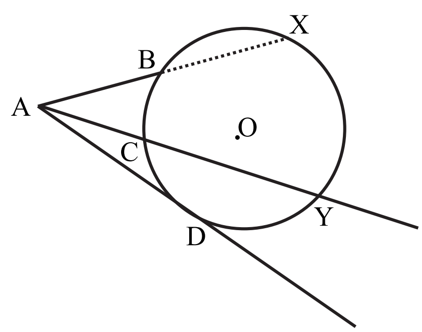
22 ස්පර්ශක

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- වෘත්තයක ස්පර්ශක ආශ්‍රිත කෝණවල ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශකවල ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම සහ එහි භාවිතය
- වෘත්තයක ස්පර්ශකය මගින් ස්පර්ශ කළ ලක්ෂ්‍යයේ (Touching point) පිහිටි ජ්‍යායක් සමග සෑදෙන කෝණය හා ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ සෑදෙන කෝණය අතර සම්බන්ධය හඳුනා ගැනීම සහ එහි භාවිතය

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

22.1 ස්පර්ශක හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය



AB සරල රේඛාවට වෘත්තය B හි දී හමුවන අතර AB දික් කළ විට X හි දී යළිත් වෘත්තය ඡේදනය කරයි. ACY රේඛාව C හා Y හි දී වෘත්තය ඡේදනය කරයි.
AB,ACY වැනි රේඛා ඡේදක යනුවෙන් හැඳින්වේ.
AD රේඛාව වෘත්තය D හි දී හමු වෙයි වෘත්තයට හා AD රේඛාවට පොදු ව ඇත්තේ එක ම ලක්ෂ්‍යයකි. එනම් D ලක්ෂ්‍යයයි.
AD වැනි රේඛාවක් වෘත්තයේ ස්පර්ශකයක් යැයි කියනු ලැබේ.

සරල රේඛාවක් මගින් වෘත්තයක් ඡේදනය වීමේ දී ඡේදක ලක්ෂ්‍ය දෙක එක මත එක සම්පාත වන අවස්ථාවේ එම සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. එම පොදු ලක්ෂ්‍යය ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය නම් වේ. ඉහත රූපයට අනුව AD සරල රේඛාව , O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය D ලක්ෂයේ දී ස්පර්ශ කරයි.

වෘත්තයක් සහ එහි ස්පර්ශක සම්බන්ධ වන පහත සඳහන් ප්‍රතිඵල වැදගත් වේ.

(A) **වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳී අරය කේන්ද්‍රයේ සිට ස්පර්ශකයට ඇඳි කෙටි ම දුර වේ.**

(B) **වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බක ව ඇඳි සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.**

(C) **ඉහත (B) හි විලෝමය මෙසේ ය. වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය එම ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වේ.**

(D) ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය හැර ස්පර්ශකයේ අනෙකුත් ලක්ෂ්‍යයන් සියල්ල වෘත්තයෙන් බාහිර ව පිහිටයි

22.1 ක්‍රියාකාරකම

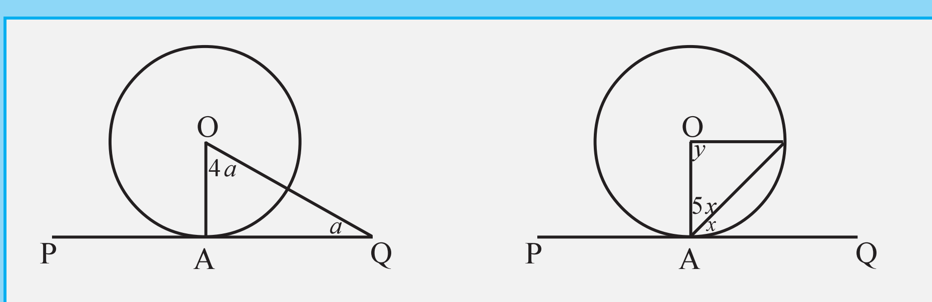
- කේන්ද්‍රය O වන හා අරය 3 cm වන වෘත්තයක් අඳින්න.
- වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර A ලෙස නම් කරන්න.
- OA යා කරන්න.
- OA අරයට A හි දී ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. එය PA ලෙස නම් කරන්න, PA රේඛාව Q තෙක් දික් කරන්න.
- PAQ රේඛාව මත X නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
- OX යා කරන්න.
- OX හි දිග මනින්න. OX>OA ද?
- PAQ රේඛාව මත A හැර වෙනත් ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක සිට කේන්ද්‍රයට ඇති දුර OA අරයේ දිග සමග සංසන්දනය කරන්න.

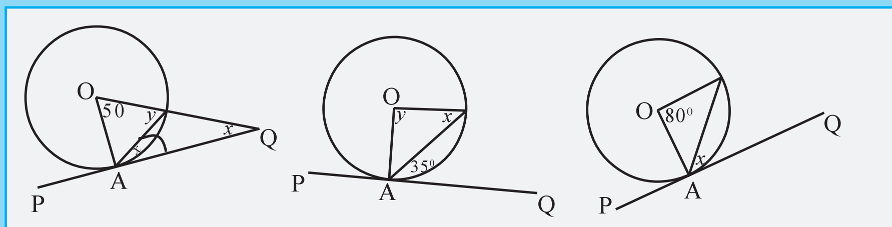
22.2 ක්‍රියාකාරකම

- බ්‍රිස්ටල් බෝඩ් කැබැල්ලක 5 cm අරය සහිත වෘත්තයක් අඳින්න. එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.
- වෘත්තයට බාහිර ව A නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය මත අල්පෙනෙත්තක් සවිකරන්න. නූල් කැබැල්ලක් එයට ගැට ගසා නූල් කැබැල්ලේ අනිත් කෙළවරේ තවත් කටුවක් යා කරන්න.
- නූල් කැබැල්ල ඇදී සිටින සේ චලනය කිරීමේ දී යම් අවස්ථාවක වෘත්තයේ ගෑවී නො ගෑවී තිබෙන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස ලකුණු කරන්න.
- OP යා කර $O\hat{P}A$ මනින්න.

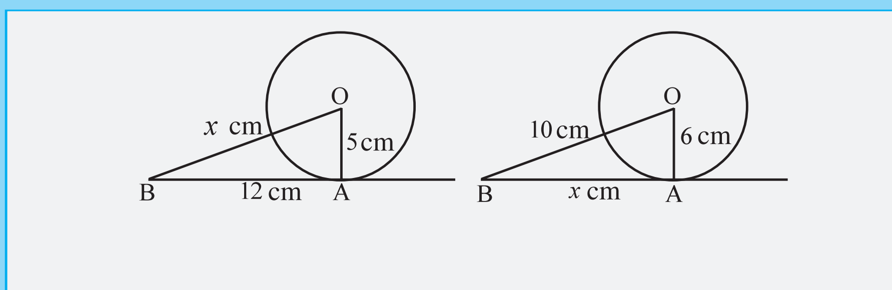
22.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත එක් එක් රූප සටහනේ PAQ යනු වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ. රූප සටහන්වල දී ඇති තොරතුරු ද භාවිත කොට අකුරුවලින් ලකුණු කර ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.





(2) පහත දී ඇති එක් එක් රූප සටහනේ කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්ත මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ සිට ස්පර්ශකයක් ඇඳ ඇත. අකුරු මගින් පෙන්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

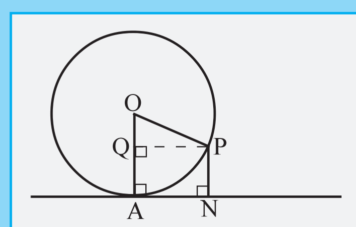


(3) O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට A ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශකය AN වේ. $A\hat{N}P = 90^0$, AN = 15 cm, PN = 9 cm නම්

(i) PQ හි දිග සොයන්න.

(ii) AQ හි දිග සොයන්න.

(iii) වෘත්තයේ අරය r නම් OQ හි දිග r ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.



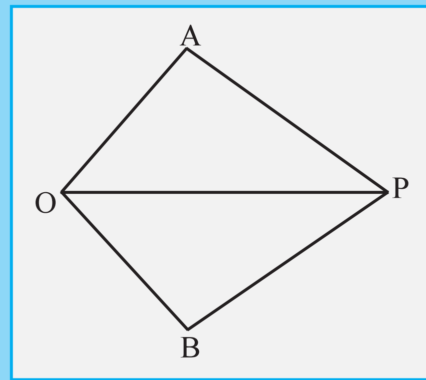
(4) OAP හා BOP යන සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක් රූපයේ දක්වා ඇත. එහි $OA = OB$ වේ.

(i) $OPA\triangle$ හා $BOP\triangle$ අංගසම බව පෙන්වන්න.

(ii) $O\hat{P}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණය කුමක් ද?

(iii) $A\hat{O}P$ කෝණයට සමාන වූ කෝණය නම් කරන්න.

(iv) AP ට දිගින් සමාන වූ පාදය නම් කරන්න.



(5) O හා C යනු දී ඇති A හා B හි දී ඡේදනය වන වෘත්ත දෙකක කේන්ද්‍ර වේ. දික් කළ OC , C කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය T හි දී ඡේදනය වේ. වෘත්ත දෙක $A\hat{O}B = 60^0$

(i) OA ,OB , TA,TB යා කරන්න.

(ii) OAT $\triangle$ හා OBT ත්‍රිකෝණය අංගසම බව පෙන්වන්න.

(iii) $O\hat{T}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණයක් නම් කරන්න.

(iv) $T\hat{O}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණයක් නම් කරන්න.

22.2 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශක

22.3 ක්‍රියාකාරකම

- 3 cm අරය සහිත වෘත්තයක් අඳින්න. එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.
- BC විෂ්කම්භය නොවන පරිදි B හා C යන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් වෘත්තය මත ලකුණු කරන්න. එම ලක්ෂ්‍යවල සිට ස්පර්ශක දෙකක් අඳින්න.
- ස්පර්ශක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය A ලෙස නම් කරන්න.
- OA යා කරන්න.
- ලැබෙන AOB ත්‍රිකෝණය හෝ AOC ත්‍රිකෝණය අංගසම ද ?
- මෙයින් එළඹිය හැකි නිගමන ප්‍රකාශ කරන්න.

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳිය හැකි ය. එම ස්පර්ශක හා සම්බන්ධ ව පහත සඳහන් ප්‍රමේයය ඉතා වැදගත් වේ.

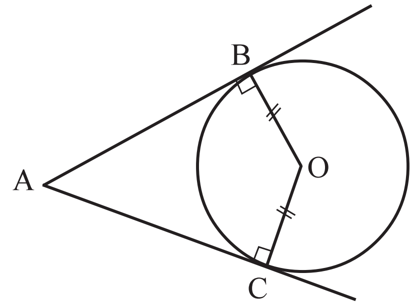
ප්‍රමේයය

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට

(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.

(ii) ස්පර්ශක දෙක කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ සමාන වේ.

(iii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේද කරයි.



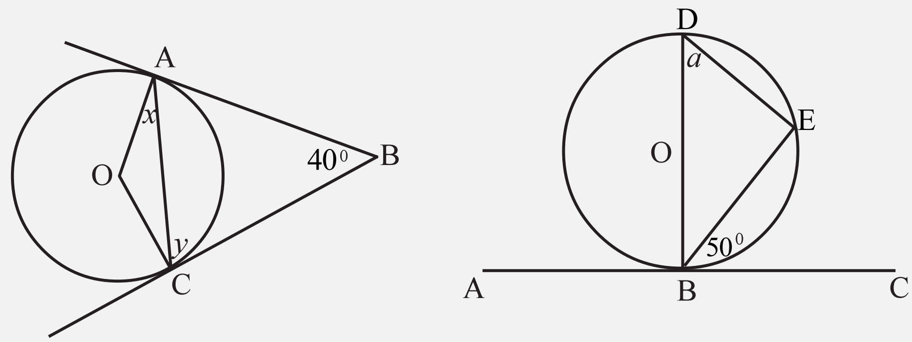
දත්තය :- O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා AC ස්පර්ශක වේ.
B හා C ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය වේ.

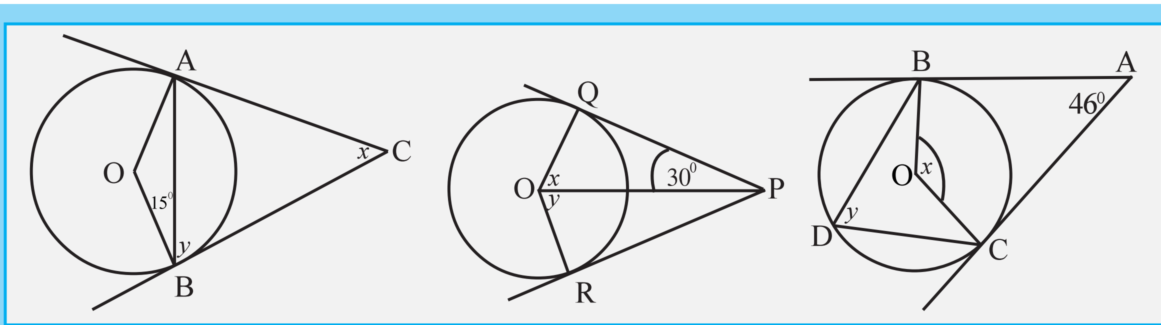
සා.ක.යු. :- i $AB = AC$
ii $A\hat{O}B = A\hat{O}C$
iii $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ බව

සාධනය :- $O\hat{B}A = O\hat{C}A = 90^0$ (ස්පර්ශකය අරයට ලම්භක වේ.)
OBA, OCA යන සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකේ
$OB = OC$ (අරය)
$OA = OA$ (පොදු පාදය - කර්ණය)
$\therefore OAB\Delta \equiv OCA\Delta$ (කර්ණ පාද)
එම නිසා
$AB = AC$
$A\hat{O}B = A\hat{O}C$
$O\hat{A}B = O\hat{A}C$

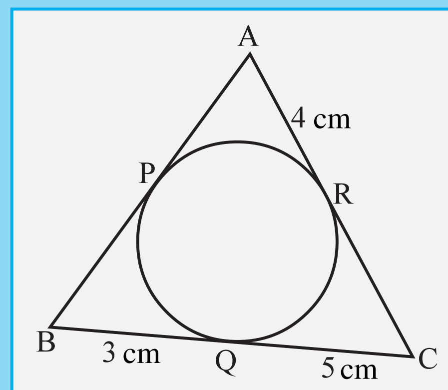
22.2 අභ්‍යාසය

(1). එක් එක් වෘත්තයට බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳින ලද ස්පර්ශක රූපයේ පෙන්වා ඇත. O කේන්ද්‍රය වේ. අක්ෂර මගින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.



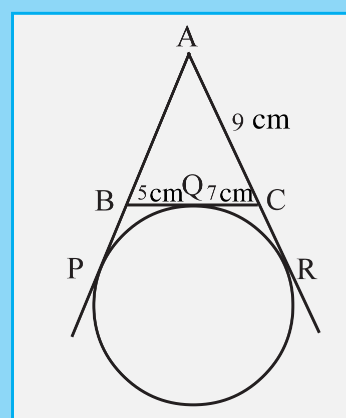


(2). AB, BC හා CA වෘත්තයට ස්පර්ශක වේ. දී ඇති මිනුම් භාවිත කරමින්



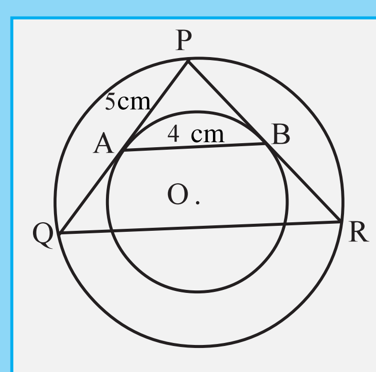
(i) AP හි දිග සොයන්න.
(ii) BP හි දිග සොයන්න.
(iii) CR හි දිග සොයන්න.
(iv) ABC △ හි පරිමිතිය සොයන්න.

(3). AP, AR, හා BC වෘත්තයක ස්පර්ශක වේ. BC, Q හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. දී ඇති මිනුම් භාවිත කර



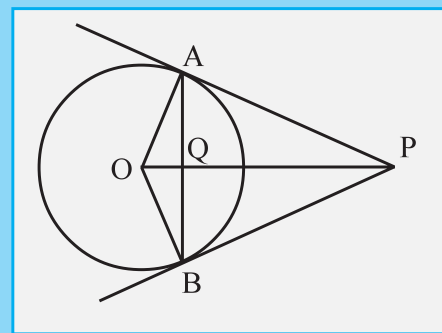
(i) BP හි දිග සොයන්න.
(ii) CR හි දිග සොයන්න.
(iii) AR හි දිග සොයන්න.
(iv) AP හි දිග සොයන්න.
(v) AB හි දිග සොයන්න.

(4). O යනු ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත දෙකක කේන්ද්‍රය වේ. PQ,PR යනු කුඩා වෘත්තයේ ස්පර්ශක දෙකක් වේ. P , Q , R විශාල වෘත්තයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ.
PQ = 10cm , PR = 10cm



(i) $O\hat{A}P$ හි විශාලත්වය සොයන්න.
(ii) PB හි දිග සොයන්න.
(iii) BR හි දිග සොයන්න.
(iv) QR හි දිග සොයන්න.
(v) PQR△ යේ පරිමිතිය සොයන්න.

(5). O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ස්පර්ශක දෙකක් PA හා PB වේ.



(i) $PAQ\Delta \equiv PBQ\Delta$ බව පෙන්වන්න.

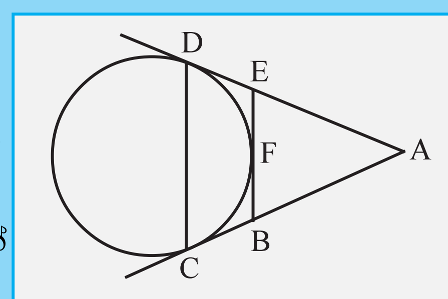
(ii) $AQ = BQ$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $P\hat{Q}A = P\hat{Q}B$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $P\hat{Q}A$ කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.

(v) OP යනු AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වේ යැයි කිව හැකි ද?

(6). රූපයේ සටහන් කර ඇති පරිදි CBA, DEA හා BFE යනු වෘත්තයකට C, D හා F හි අඳින ලද ස්පර්ශක වේ. AD මත E ද AC මත B ද ඇත. EF=FB



(i) AD, රේඛා ඛණ්ඩ දෙකක එෙකායයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

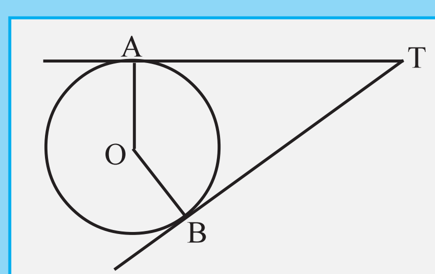
(ii) රේඛා ඛණ්ඩ දෙකක එෙකායයක් ලෙස AC හි දිග ලියා දක්වන්න.

(iii) ED ට දිගින් සමාන රේඛා ඛණ්ඩයක් නම් කරන්න.

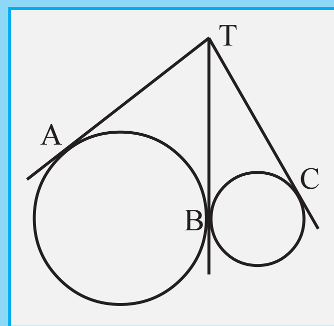
(iv) B C ට දිගින් සමාන වූ රේඛා ඛණ්ඩයක් නම් කරන්න.

(v) $AD + AC = AB + BE + AE$ බව පෙන්වන්න.

(7). O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට T සිට අඳින ලද ස්පර්ශක TA හා TB වේ. AOBT යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



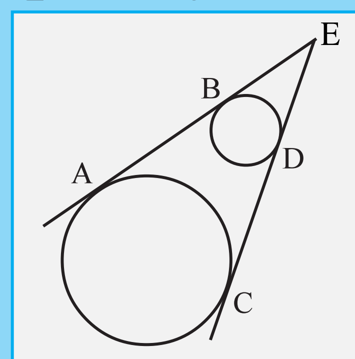
(8). රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි වෘත්ත දෙකක පොදු ස්පර්ශකය TB වේ. TA විශාල වෘත්තයට ද TC කුඩා වෘත්තයට ද අඳින ලද ස්පර්ශක වේ.
TA = TC බව පෙන්වන්න.



(9). රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි EBA හා EDC යනු වෘත්ත දෙකක පොදු ස්පර්ශකය වේ.

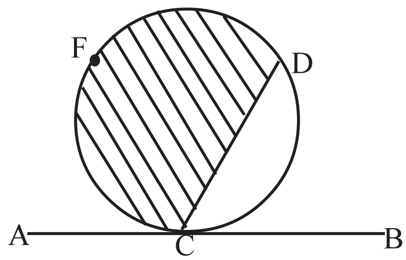
(i) AB = CD බවත්

(ii) AC // BD බවත් සාධනය කරන්න.

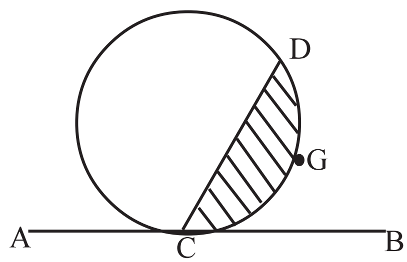


22.3 ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය

(i) රූපයේ $B\hat{C}D$ කෝණයට ප්‍රතිවිරුද්ධ පැත්තේ අඳුරු කර පෙන්වා ඇති CFD වෘත්ත ඛණ්ඩය $B\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වේ.



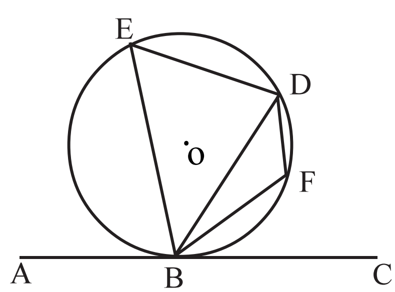
(ii) රූපයේ $A\hat{C}D$ කෝණයට ප්‍රතිවිරුද්ධ පැත්තේ අඳුරු කර පෙන්වා ඇති CGD යන වෘත්ත ඛණ්ඩය $A\hat{C}D$ හි ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය වේ.



වෘත්තයක් හා සම්බන්ධ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය හා ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය යනු කුමක් දැයි මුලින් ම සලකා බලමු.

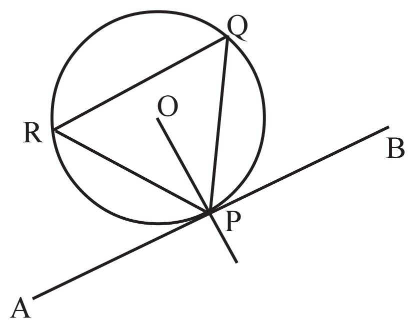
(iii) පහත රූපයේ ABC යනු කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශකයක් වේ. B ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය වේ. BD ජ්‍යායක් වේ. BD මගින් වෘත්තය ඛණ්ඩ දෙකකට බෙදයි.

- $D\hat{B}C$ සලකන විට $D\hat{E}B$ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයක් වේ.
- $D\hat{B}A$ සලකන විට $D\hat{F}B$ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයක් වේ.



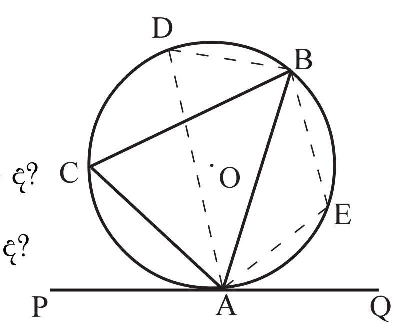
22.4 ක්‍රියාකාරකම

- O කේන්ද්‍රය වූ 5 cm අරය වූ ද වෘත්තයක් බ්‍රිස්ටල් බෝඩ් කැබැල්ලක අඳින්න.
- වෘත්තයේ P නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. P හි දී ස්පර්ශකයක් අඳින්න. ස්පර්ශකය APB ලෙස නම් කරන්න.
- PQ නම් ජ්‍යායක් අඳින්න.
- $Q\hat{P}B$ කෝණයේ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ පරිධියේ R නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
- PQR ත්‍රිකෝණය සම්පූර්ණ කරන්න.
- $Q\hat{P}B$ කෝණය කපා එය PQR Δ යේ $P\hat{R}Q$ කෝණය සමග සම්පාත වන්නේ දැයි බලන්න.
- මෙයින් එළඹිය හැකි නිගමනය කුමක් ද?



22.5 ක්‍රියාකාරකම

වෘත්තයක කේන්ද්‍රය O වේ. PAQ ස්පර්ශකය වෘත්තය A ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ කරයි. $Q\hat{A}B = 60^0$ වන සේ B ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත ලකුණු කරන්න. වෘත්තය මත E, D. C ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කර BD, BC, CA, DA, AE , EB යා කරන්න



(i) $B\hat{D}A$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(ii) $B\hat{C}A$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(iii) ඉහත (i) හා (ii) හි විශාලත්වය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

(iv) $B\hat{A}Q$ හි ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ ද?

(v) $B\hat{A}P$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(vi) $B\hat{E}A$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(vii) ඉහත (v) හා (vi) හි විශාලත්වය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

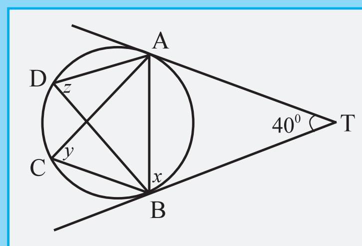
(viii) $B\hat{A}P$ හි ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේද?

ප්‍රමේයය

සරල රේඛාවක් වෘත්තයක් ස්පර්ශ කරත් ම ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යයේ සිට ජ්‍යායයක් ඇඳි විට ජ්‍යාය හා ස්පර්ශකය අතර කෝණ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩවල කෝණවලට සමාන වේ.

22.3 අභ්‍යාසය

(1) වෘත්තයකට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක T හි දී ඡේදනය වේ.



(i) BT රේඛා ඛණ්ඩයට සමාන රේඛා ඛණ්ඩයක් නම් කරන්න.

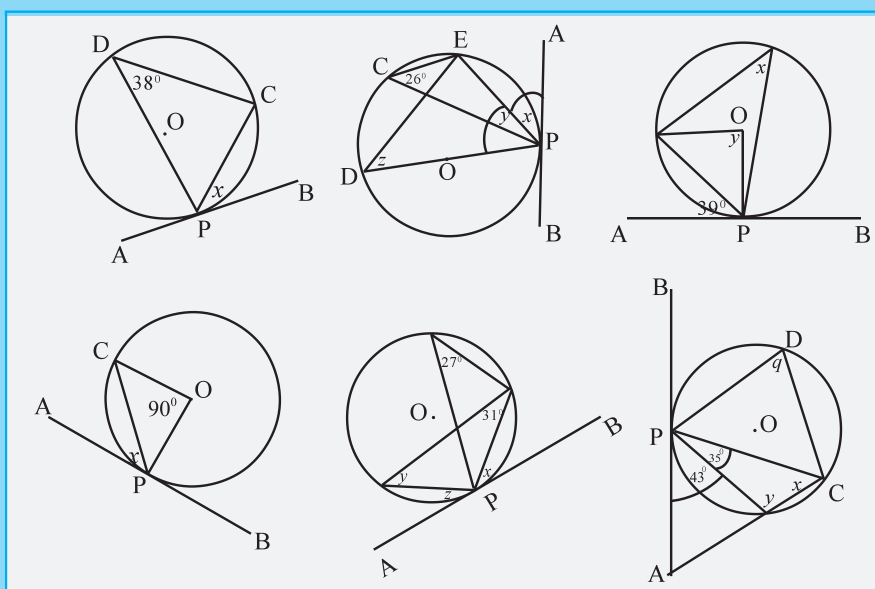
(ii) ATB Δ කිනම් වර්ගයේ ත්‍රිකෝණයක් ද?

(iii) x හි අගය කුමක් ද?

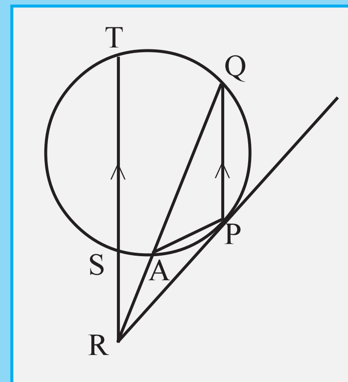
(iv) $A\hat{B}T$ සැලකූ විට ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ නම් කරන්න.

(v) y හා z හි අගයයන් සොයන්න.

(2) පහත එක් එක් රූපයේ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ P නම් ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳින ලද ස්පර්ශකය APB වේ. රූප එක එකෙහි දී ඇති තොරතුරු අනුව අක්ෂර යොදා ඇති කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.



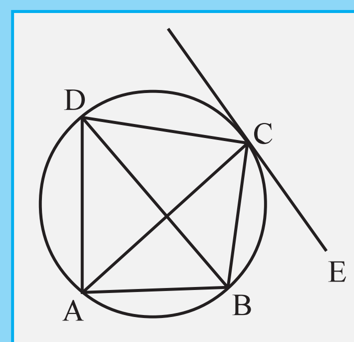
(3) A, P, Q, T,S වෘත්තයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ.
RST , RAQ ඡේදක දෙකකි.
PR ස්පර්ශකයකි.
PQ // RT



(i) $R\hat{P}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) $P\hat{Q}A$ කෝණයට සමාන වූ වෙනත් කෝණයක් නම් කරන්න.

(4) ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයකි $\hat{A}$ කෝණයෙහි සම්විච්ඡේදකය AC වේ.
CE යනු C ලක්ෂ්‍යයේ අඳින ලද ස්පර්ශකයකි.

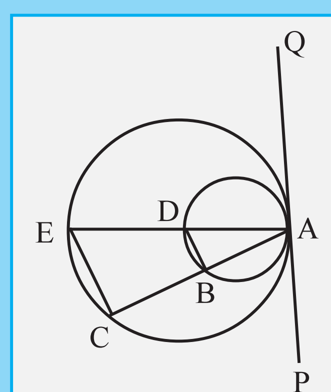


(i) $B\hat{C}E = x^0$ නම් x ට සමානවන ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ දෙකක් නම් කරන්න.

(ii) $D\hat{A}C = D\hat{B}C$ බව පෙන්වන්න.

(iii) BD // CE බව පෙන්වන්න.

(5) වෘත්ත දෙකක් අභ්‍යන්තරව A ලක්ෂයෙහි දී ස්පර්ශ වේ. A ලක්ෂ්‍යයේ දී පොදු ස්පර්ශකය PAQ වේ. E හා C විශාල වෘත්ත මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AE හා AC පිළිවෙළින් D හා B හි දී කුඩා වෘත්තය ඡේදනය කරයි .



(i) $Q\hat{A}D$ කෝණයට සමාන වූ කුඩා වෘත්තයේ කෝණය කුමක් ද?

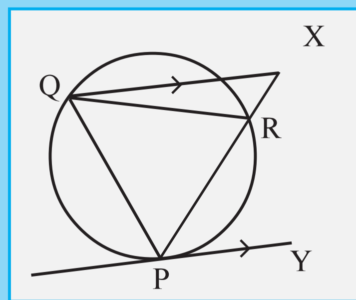
(ii) $Q\hat{A}D$ කෝණයට සමාන වූ විශාල වෘත්තයේ කෝණය කුමක් ද?

(iii) BD // CE බව පෙන්වන්න.

(iv) AB = BC නම් AD = DE බව පෙන්වන්න.

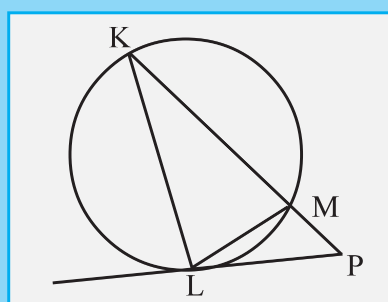
(v) AB = BC හා $D\hat{A}Q = 90^0$ නම් විශාල වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය D බව පෙන්වන්න.

(6) රූපයේ PY ස්පර්ශකය වෘත්තය P ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ කරයි. Q හා R වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. PY ට සමාන්තර ව Q හරහා ඇඳි රේඛාව දික් කළ විට PR රේඛාව X හි දී හමුවෙයි.
$P\hat{Q}R = P\hat{X}Q$ බව පෙන්වන්න.



(7) K, L හා M යන ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයක පිහිටා ඇත.
L හි අඳින ලද ස්පර්ශකය දික් කරන ලද KM රේඛාව P හි දී හමු වෙයි.

$K\widehat{L}P = L\widehat{M}P$ බව පෙන්වන්න.



23 නිර්මාණ

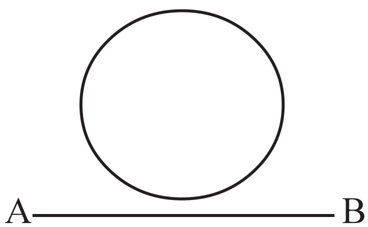
මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට,

- වෘත්තයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම
- දෙන ලද රේඛාවක් සමාන කොටස්වලට වෙන් කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

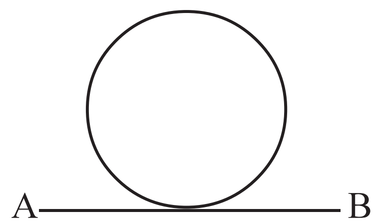
දී ඇති සරල රේඛාවක් හා වෘත්තයක් සම්බන්ධ ව පිහිටිය හැකි ආකාර තුනක් මෙසේ ය.

(I)



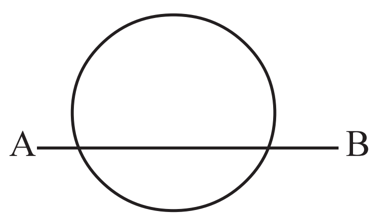
වෘත්තයට බාහිර ව AB සරල රේඛාව පිහිටිය හැකි ය.

(II)



Bවෘත්තය ස්පර්ශ වන සේ AB සරල රේඛාව පිහිටිය හැකි ය.

(III)



වෘත්තය ඡේදනය වනසේ AB සරල රේඛාව පිහිටිය හැකි ය.

ඉහත (ii) හි දැක්වෙන ආකාරයට වෘත්තය හා රේඛාව පිහිටි විට

"AB සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන්නේ ය."

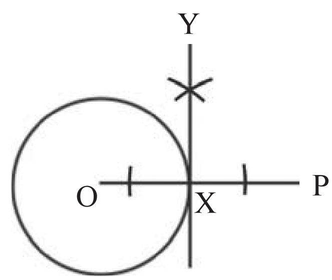
කවකටුව ආධාරයෙන් O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් අඳින්න. අඩි කෝදුව තබා වෘත්තය ස්පර්ශකරන සේ AB සරල රේඛාව අඳින්න. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කර OP යා කරන්න. $O\hat{P}A$ හා $O\hat{P}B$ කෝණ දෙකෙහි විශාලත්ව මනින්න.

ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය හරහා ඇඳි අරයත් අතර කෝණය 90^0 බව ඔබ දන්නෙහි ය.

23.1 නිර්මාණය

වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී එම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත X ලක්ෂ්‍යය ඇත. X හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ වන පරිදි XY ස්පර්ශකය නිර්මාණය කරමු.



(1) OX රේඛාව ඇඳ එය P දක්වා දික්කරන්න.

(2) කවකටුව ආධාරයෙන් OXP රේඛාවට X හි දී ලම්බකයක් නිර්මාණය කරන්න. එය XY යැයි නම් කරන්න.

OX අරය සහ XY රේඛාව එකිනෙකට ලම්බ වේ. XY යනු වෘත්තයට X හිදි ඇඳි ස්පර්ශකයක් වේ.

XY යනු වෘත්තයේ පරිධිය මත පිහිටි X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයක් වේ.

- **වෘත්තයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් බව ද**
- **වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයත් එකිනෙකට ලම්බ වන බව ද මීට පෙර උගත්තෙමු.**

23.1 අභ්‍යාසය

(1) අරය 3.5 cm වූ වෘත්තයක් අඳින්න. වෘත්තය මත P ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. 4.5 cm දිග PQ ස්පර්ශකය නිර්මාණය කරන්න.

(2) X කේන්ද්‍රය වූ ද අරය 4.5 cm වූ ද වෘත්තය මත ඕනෑ ම Y ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. Y හි දී වෘත්තයට ස්පර්ශකය නිර්මාණය කර $XZ=7.5$ cm වන සේ Z ලක්ෂ්‍යයක් ස්පර්ශකය මත ලකුණු කරන්න.

(i) YZ දිග මනින්න.
(ii) පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් YZ දිග ගණනය කර ඔබ ලබාගත් පිළිතුරෙහි සත්‍යතාව විමසන්න.
(iii) $ZY = ZW$ වනසේ වූ W ලක්ෂ්‍යයක් වෘත්තය මත ලකුණු කර WX යා කරන්න.
(iv) $XYZ\Delta$ හා $XWZ\Delta$ අංගසම බව සාධනය කරන්න.
(v) WX යනු W හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය බව පෙන්වන්න.

(3) AB සරල රේඛාව මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. Q ලක්ෂ්‍යය AB ට බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

(i) P හි දී AB සරල රේඛාව, ස්පර්ශ කරන Q හරහා ගමන් කරන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
(ii) මෙම නිර්මාණය සඳහා ඔබ භාවිතයට ගත් ප්‍රමේය දෙක සඳහන් කරන්න.

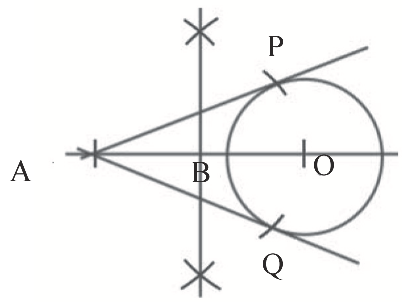
23.1 ක්‍රියාකාරකම

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් ඇඳ වෘත්තයෙන් බාහිර ව X ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න. සරල දාරයක් භාවිතයෙන් XA හා XB ස්පර්ශක දෙක අඳින්න. OA හා OB අරයයන් ද යා කරන්න

(a) මෙම කරණු සත්‍යදැයි මැන බැලීමෙන් පරීක්ෂා කරන්න.
අගය මැනීමෙන් පහත සඳහන් කරුණුවල සත්‍යතාව විමසන්න.
(i) $XA = XB$ (ii) $X\hat{A}O = X\hat{B}O$ (iii) $X\hat{O}A = X\hat{O}B$

(b) $XAO\Delta$ හා $XBO\Delta$ අංගසම ද?

23.2 බාහිර ලක්ෂයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීම



O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට පිටතින් A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ.
A ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරිම.

පියවර

(1) OA රේඛාව ඇඳ කවකටුව ආධාරයෙන් එහි ලම්බ සමච්ඡේදකය අඳින්න.
(2) ලම්බ සමච්ඡේදකය හා OA රේඛාව ඡේදන ලක්ෂ්‍යය B ලබා ගන්න.
(3) BO අරය ලෙස ද B කේන්ද්‍රය ලෙස ද ගනිමින් වෘත්තය ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය වන සේ චාපයක් අඳින්න. එම ලක්ෂ්‍ය දෙක P හා Q ලෙස නම් කරන්න.
(4) AP හා AQ රේඛා අඳින්න.
(5) AP හා AQ රේඛා A සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වේ.

සාධනය :- - BA = BO (AO හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය B නිසා)
BO = BP
BA = BO = BP වේ.

∴ AOP Δ යේ ශීර්ෂ හරහා ඇති වෘත්තයේ (පරිවෘත්තය) කේන්ද්‍රය B වේ. AO එම වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි.

$A\hat{P}O = 90^0$ (අර්ධ වෘත්තයක කෝණය)

∴ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට AP ස්පර්ශකයක් වේ.

මෙලෙසම $A\hat{Q}O = 90^0$ බව ද පෙන්වා දිය හැකි ය.

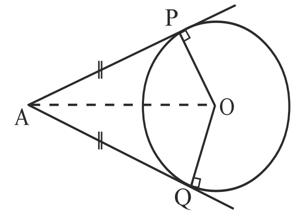
ඒ අනුව AQ රේඛාවද වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට, A බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට AP හා AQ ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම්

(i) $AP = AQ$

(ii) $O\hat{A}P = O\hat{A}Q$

(iii) $A\hat{O}P = A\hat{O}Q$



ප්‍රමේය **:-** බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට
(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
(ii) කේන්ද්‍රය හා බාහිර ලක්ෂ්‍යය යා කරන රේඛාවෙන් ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය වේ .
(i) ස්පර්ශක මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ දෙක සමාන වේ.

23.2 අභ්‍යාසය

(1) අරය 2.5 cm වූ O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයක් අඳින්න. වෘත්තය මත ඕනෑ ම P ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන දික් කරන ලද OP මත OX = 6.5 cm වන සේ X ලක්ෂ්‍යය ලබා ගන්න.
(i) X හි සිට වෘත්තයට XA හා XB ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන්න.
(ii) XA හා XB දිග මනින්න.
(iii) XA දිග ගණනය කිරීමෙන් (ii) හි ඔබ ලබාගත් ප්‍රතිඵලය හා සසඳන්න.

(2) O කේන්ද්‍රය වූ ද අරය 4.0 cm වූ ද වෘත්තය අඳින්න. වෘත්තය මත X ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න. OP = 8 cm වනසේ දික් කරන ලද OX මත P ලකුණු කරන්න.

(i) OP හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.

(ii) P සිට වෘත්තයට PQ ස්පර්ශකය නිර්මාණය කර PQ දිග මැන අගය ලියන්න.

(iii) $P\hat{Q}X$ කෝණයේ අගය 30^0 වන බව අගය මැනීමෙන් තොර ව සාධනය කරන්න.

(iv) පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් $PQ = 4\sqrt{3}\,cm$ බව පෙන්වන්න.

(3) (i) AB = 6 cm BC = 7 cm හා CA = 5 cm වූ ABC Δ නිර්මාණය කරන්න
(ii) $B\hat{A}C$ හා $A\hat{B}C$ කෝණ සමච්ඡේදක දෙකට පොදු ලක්ෂ්‍යය P යැයි නම් කරන්න.
(iii P හි සිට BC ට ලම්බකය නිර්මාණය කරන්න. එය PX යැයි නම් කරන්න.
(iv) PX අරය ද P කේන්ද්‍රය ද වූ වෘත්තය අඳින්න.

(4) XYZΔ යේ $X\hat{Y}Z$ මහා කෝණයක් වේ. YZ පාදය Y හි දී ස්පර්ශ කරමින් XZ පාදය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

(5) (i) $A\hat{B}C = 90^0$, $AB = 4.0$ cm හා $BC = 6.5$ cm වූ $ABC\Delta$ නිර්මාණය කරන්න.

(ii) AB පාදය A හි දී ස්පර්ශ කරන්නාවූ ද BC පාදය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

(6) (i) $PQ = 8$cm $P\hat{Q}R = 90^0$ $QR = 4$cm වන සේ $PQR\Delta$ නිර්මාණය කරන්න.

(ii) S හි දී PQ, හමු වන සේ $P\hat{R}Q$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.

(iii) S හි සිට PR ට ලම්බ වන සේ වූ ST නිර්මාණය කරන්න.

(iv) S කේන්ද්‍රය SQ අරය ද වූ වෘත්තය අඳින්න.

(v) $SQR\Delta$ හා $STR\Delta$ අංගසම බව සාධනය කරන්න.

(vi) P හි සිට වෘත්තයට ඇඳි එක් ස්පර්ශකයක් PT බව පෙන්වන්න.

(vii) P හි සිට ඇති අනෙක් ස්පර්ශකය වූ PU නිර්මාණය කරන්න.

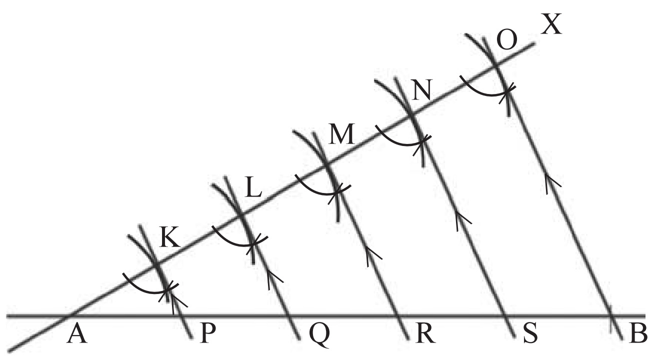
(viii) පයිතගරස් ප්‍රමේය යෙදීමෙන් PR දිග $\sqrt{5}$ ඇසුරෙන් ලියන්න.

(ix) PR හි දිග මැනීමෙන් $\sqrt{5}$ හි අගය පළමුවැනි දශමස්ථානයට සොයන්න.

(x) $\dfrac{PSU\Delta \text{ වර්ගඵලය}}{QRS\Delta \text{ වර්ගඵලය}} = \sqrt{5} - 1$ බව පෙන්වන්න.

23.3 නිර්මාණය

දෙන ලද සරල රේඛා ඛණ්ඩයක් සමාන කොටස්වලට බෙදීම.



දී ඇති AB සරල රේඛාව සමාන කොටස් 5 කට බෙදිය යුතු වේ.

පියවර

(1) A හරහා ඇති AX ඕනෑ ම සරල රේඛාවක් අඳින්න.

(2) $AK = KL = LM = MN = NO$ වන සේ කවකටුව ආධාරයෙන් AX මත K, L, M, N, හා O ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න.

(3) OB රේඛාව ඇඳ OB ට සමාන්තර වන සේ NS, MR, LQ, KP රේඛා නිර්මාණය කරන්න. (එය AOB කෝණය K, L, M හා N හි දී පිටපත් කිරීමෙන් කළ හැකි ය.)

සාධනය :- - $ALQ\Delta$ යේ

$AK = KL$ (නිර්මාණය)

$KP // LQ$ (නිර්මාණය)

$\therefore AQ$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ප්‍රමේයයේ විලෝමය)

$\therefore AP = PQ$

$AMR\Delta$ යේ

$LQ // MR$ වේ. (නිර්මාණය)

$AL : LM = 2 : 1$ (නිර්මාණය)

$\therefore AQ : QR = 2 : 1$ වේ. (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි සරල රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද සමානුපාතික ව බෙදේ)

$AK = KL = LM$ නිසා

$AP = PQ = QR$ වේ.

මේ අයුරින් ම RS හා SB සමාන බව ද සාධනය කළ හැකි ය.

එවිට $AP = PQ = QR = RS = SB$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේය

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යා කරන රේඛාව ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර එය දිගින් ඉතිරි පාදයේ දිගින් හරි අඩක්වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විලෝමය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වැනි පාදය සමච්ඡේද වේ.

23.3 අභ්‍යාසය

(1) 11 cm දිග XY සරල රේඛාවක් ඇඳ එය සමාන කොටස් 4 කට බෙදන්න.

(2) 13cm දිග AB සරල රේඛාව සමාන කොටස් 5 කට බෙදන්න.

(3) (i) $PQ = 9$ cm $P\hat{Q}R = 45^0$ හා $QR = 8$ cm වූ $PQR\,\Delta$ නිර්මාණය කරන්න.

(ii) $PA = AB = 3$ cm වනසේ A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙක PQ මත ලකුණු කරන්න.

(iii) QR පාදය සමාන කොටස් තුනකට බෙද වෙන් කෙරෙන සේ PR ට සමාන්තර ව AX හා BY රේඛා නිර්මාණය කරන්න.

(iv) XY දිග මැන අගය ලියන්න.

(v) $QAX\Delta$ හා $QBY\Delta$ යන ත්‍රිකෝණ $PQR\,\Delta$ ත්‍රිකෝණය හා සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

24 කුලක

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට
- වෙන් රූප ඇසුරෙන් කුලක කර්ම භාවිතය පැහැදිලි කිරීම
- කුලක කර්මවලට අදාළ ප්‍රදේශ වෙන් රූපයක සටහන් කිරීම
- වෙන් රූප භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

පිළිබඳව මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

24.1 කුලක පිළිබඳ හැඳින්වීම

කුලක පිළිබඳ සංකල්පයෙන් පටන් ගෙන මේ තාක් ඔබ උගත් කුලක පිළිබඳ සියලු දේ නැවත මතක් කිරීම මේ පාඩමට ප්‍රවේශයක් ලෙස ඉතා වැදගත් වේ. කුලක අංකනය, අවයව, උපකුලක සහ සර්වත්‍ර කුලකය පිළිබඳ ව, කුලක මේලය, කුලක ඡේදනය සහ කුලකයක අනුපූරකය යන කුලක කර්ම පිළිබඳ ව වෙන්රූප සටහන් පිළිබඳව ද ඔබ දැනටමත් හදාරා ඇත. පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

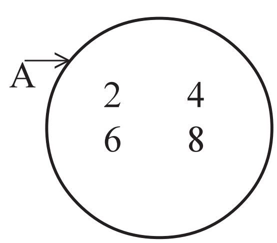
නිදසුන 1.

(i) $A = \{$ 1 ත් 10ත් අතර 2 හි ගුණාකාර$\}$ යන කුලකය සලකමු.

මෙම A කුලකය තවත් ආකාර කීපයකින් ඉදිරිපත් කළ හැකි බව ඔබ උගත්තෙහි ය. එනම්

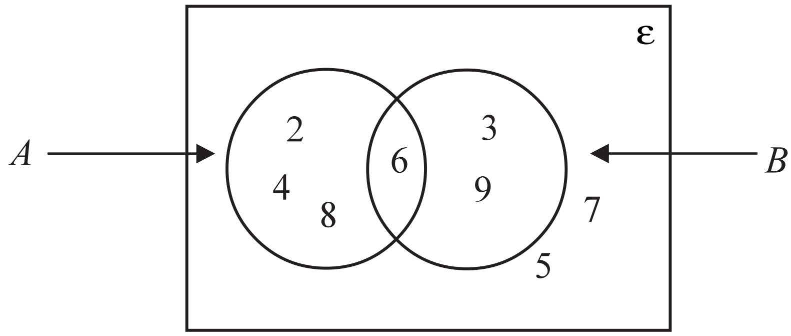
(1). අවයව ඇසුරෙන් : $A = \{2, 4, 6, 8\}$

(2). වෙන් රූප ඇසුරෙන් :



(3). කුලක ජනන ස්වරූපයෙන් : $A = \{x : 1 < x < 10$ සහ x, 2 හි ගුණාකාරයකි$\}$

$B = \{$1 ත් 10 ත් අතර 3 හි ගුණාකාර $\}$ සහ
$\varepsilon = \{$ 1 ත් 10 ත් අතර නිඛිල $\}$ යන කුලක ද සලකමු.
දැන් මෙම A, B හා සර්වත්‍ර කුලකය එකම වෙන් රූපසටහනකින් දක්වමු.



නිදසුන 2.

ε = {1 සිට 10 තෙක් වූ සියලු නිඛිල}

A = {1 ත් 10 ත් අතර 2 හි ගුණාකාර}

B = {1 ත් 10 ත් අතර 3 හි ගුණාකාර}

ඉහත කුලක අවයව සහිත ව ලියා දැක් වූ විට

ε = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10}

A = { 2 , 4 , 6 , 8}

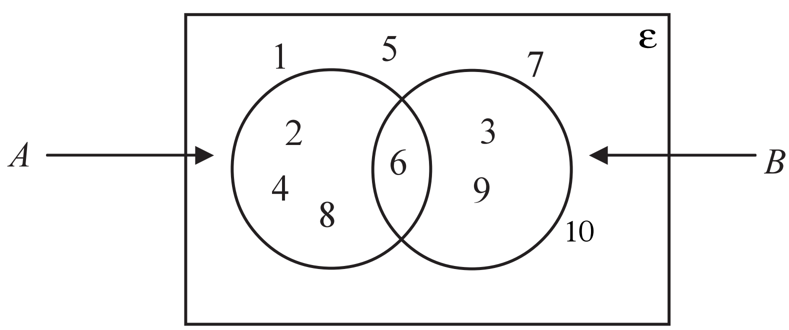
B = {3 , 6 , 9}

මේ අනුව

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

මේවා වෙන් රූප සටහනකින් දැක් වූ විට



තවද

$$(A \cup B)' = \{1, 5, 7, 10\}$$

$$(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

$$B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$$

24.1 අභ්‍යාසය

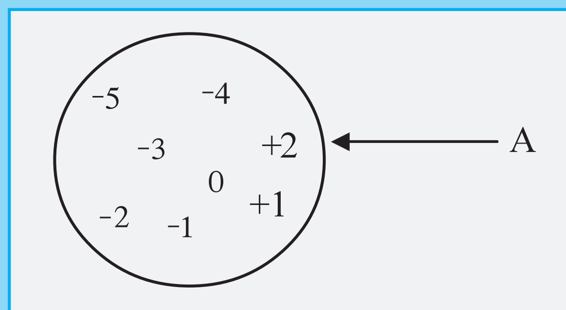
(1) පහත සඳහන් කුලක වෙනත් ආකාරවලින් ලියා දක්වන්න.

(i) X $= \{ x : x$ යනු 15 ට අඩු ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවකි$\}$

(ii) $Y = \{3, 6, 10, 15, 21\}$

(iii) Z $= \{$ඉරට්ටේ ප්‍රථමක සංඛ්‍යා$\}$

(iv)



(2) $S = \{p, q, r\}$ කුලකයේ සියලු ම උප කුලක ලියා දක්වන්න. උප කුලක සංඛ්‍යාව කීය ද?

(3) පහත දැක්වෙන කුලක උපකුලක වනසේ සර්වත්‍ර කුලකයක් බැගින් ලියන්න.

(i) P $= \{$කෙසෙල් ගෙඩි , ගස්ලබු , අඹ , අන්නාසි$\}$

(ii) $Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

(iii) R $= \{$උසස්පෙළ සංයුක්ත ගණිතය හදරන සිසුන්$\}$

(iv) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3, 9\}$

(v) T $= \{$ත්‍රිකෝණ$\}$, N $= \{$චතුරස්‍ර$\}$, L $= \{$පංචාස්‍ර$\}$, M $= \{$ෂඩස්‍ර$\}$

(4) $\varepsilon = \{$combinatorics යන වචනයේ අකුරු$\}$
A $= \{$contrast යන වචනයේ අකුරු$\}$
B $= \{$ammonia යන වචනයේ අකුරු$\}$

(i) ඉහත එක් එක් කුලකය නිරූපණය කිරීමට වෙන් රූප සටහන බැගින් අඳින්න.

(ii) වෙන් රූප සටහන භාවිතයෙන් $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cup B)$ හා $n(A \cap B)$ සොයන්න.

(iii) ඉහත (ii) සඳහා ලබාගත් පිළිතුරු ඇසුරින්
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ සමීකරණය සත්‍යාපනය කරන්න.
($n(A)$, $n(B)$, $n(A \cup B)$, $n(A \cap B)$ එක් එක් කුලකයේ අවයව සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි.)

24.2 කුලක කර්මවලට අදාළ ප්‍රදේශ වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර පෙන්වීම

A හා B ඕනෑ ම අභිශූන්‍ය නොවන කුලක දෙකක් සඳහා කුලක කර්මවලට අදාළ ප්‍රදේශ වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර දැක්වීමට පුළුවන.

නිදසුන 3.

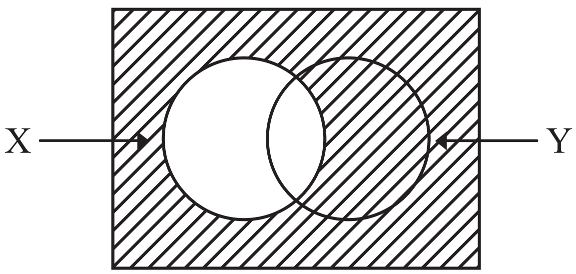
X හා Y යනු ඕනෑ ම අභිශූන්‍ය නොවන කුලක දෙකක් නම්

(i) X' (ii) $X \cup Y$ (iii) $X \cap Y'$

(iv) $X \cap Y$ (v) $(X \cap Y)'$ (vi) $(X \cup Y)'$

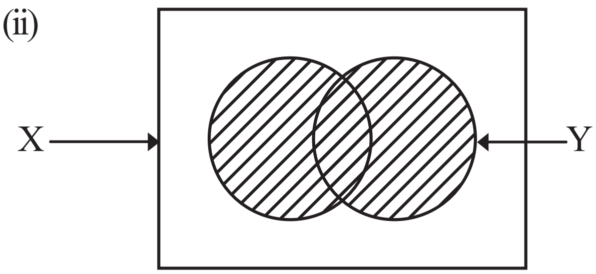
යන එක් එක් ප්‍රදේශය වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර දක්වන්න.

(i)



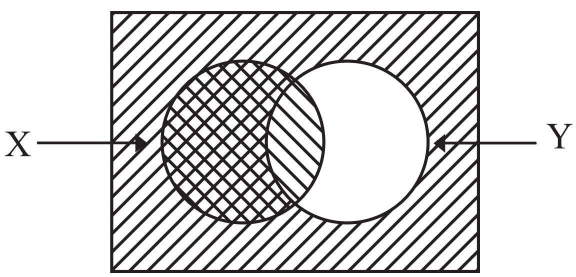
X'

(ii)

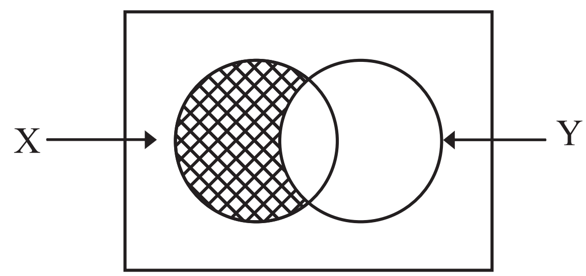


$(X \cup Y)$

(iii)



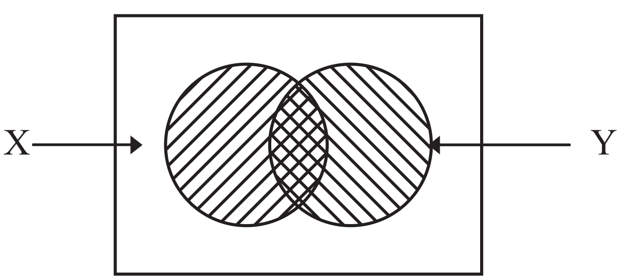
$\Rightarrow$



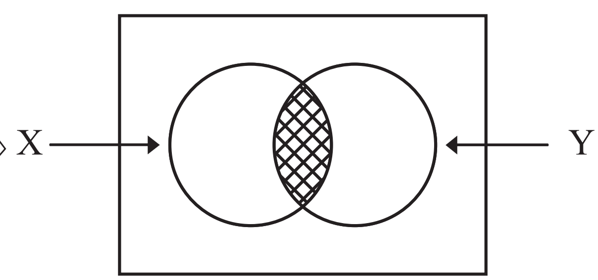
මෙහි අයුරින් අඳුරු කළ පෙදෙස $X \cap Y'$ වේ.

$X \cap Y'$

(iv)



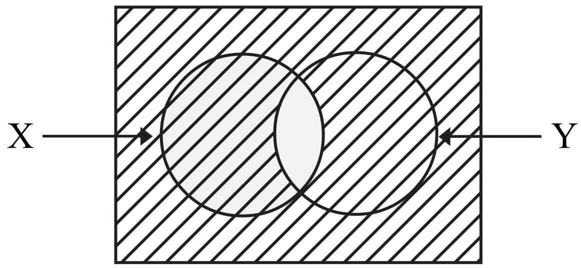
$\Rightarrow$



මෙහි ලෙස අඳුරු කළ පෙදෙස $(X \cap Y)$ වේ.

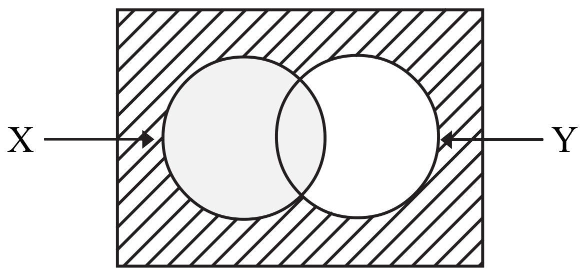
$X \cap Y$

(v)



$(X \cap Y)'$

(vi)



$(X \cup Y)'$

24.1 ක්‍රියාකාරකම

(i) ε = {extraordinary යන වචනයේ අකුරු}
A = {train යන වචනයේ අකුරු}
B = {entity යන වචනයේ අකුරු}

A', B', $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$ යන කුලක වල අවයව ලියා දක්වන්න. එනයින්

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ සහ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ බව පෙන්වන්න.

(ii) P හා Q ඕනෑ ම අභිශූන්‍ය නොවන කුලක දෙකක් සඳහා

$$P' \cap Q' = (P \cup Q)' \text{ සහ } P' \cup Q' = (P \cap Q)'$$

බව පෙන්වීමට වෙන් රූප සටහන් යොදා ගන්න.

24.2 අභ්‍යාස

(1) කුලක කර්ම පිළිබඳ පහත සඳහන් නියම වෙන් රූප සටහන් භාවිතයෙන් සත්‍යාපනය කරන්න.

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $A \cup A' = \varepsilon$ (vi) $A \cap A' = \varnothing$

(2) වෙන් රූප සටහන් භාවිතයෙන් සත්‍යාපනය කරන්න.

(i) $A \cap (A \cup B) = A$

(ii) $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

(iii) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

(iv) $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

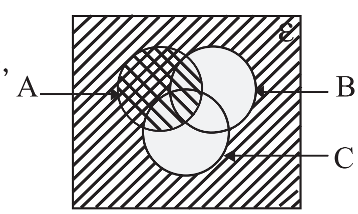
24.3 ඉහතින් පැහැදිලි කරන ලද කුලක කර්මවලට අදාළ ප්‍රදේශ අඳුරු කර දැක්වීම කුලක තුනක් සඳහා විස්තීරණය කිරීම

නිදසුන 4.

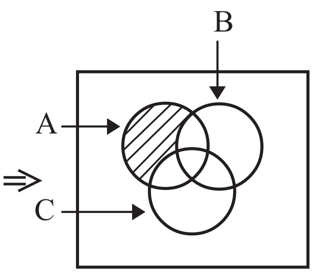
A,B හා C යනු අභිශූන්‍ය නොවන කුලක තුනක් නම් ඒවා ඡේදනය වන ආකාරය වෙන් රූප සටහනකින් දැක්විය හැකි ය.

(i) රූපයේ ආකාර දෙකකින් ම අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයට අයත් කුලකය X නම්, X ට, A හි අවයව පමණක් අඩංගුවේ. (B හා C ට අයත් නොවන)

$\therefore X = A \cap (B \cup C)'$



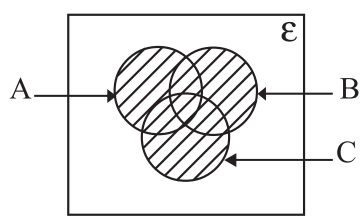
$\Rightarrow$

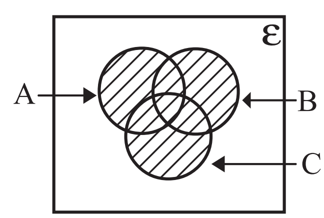


$A \cap (B \cup C)'$

(ii) රූපයේ අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයට අයත් කුලකය Y නම් Y හි A,B හා C හි සියලු ම අවයවයන් අඩංගු වේ.

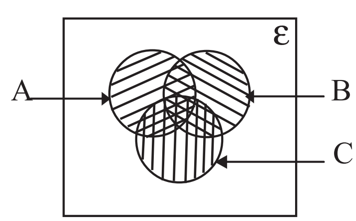
$\therefore Y = A \cup B \cup C$ වේ.



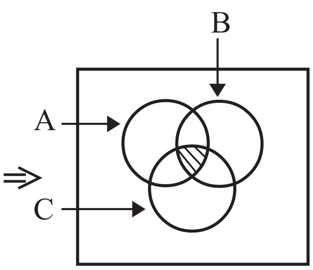


(iii) රූපයේ ඉරි තුන් වර්ගයෙන් ම අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයට අයත් කුලකය Z නම් , Z ට අයත් වන්නේ A,B හා C යන කුලක තුනට ම අයත් අවයව පමණි.

$\therefore Z = A \cap B \cap C$ වේ.



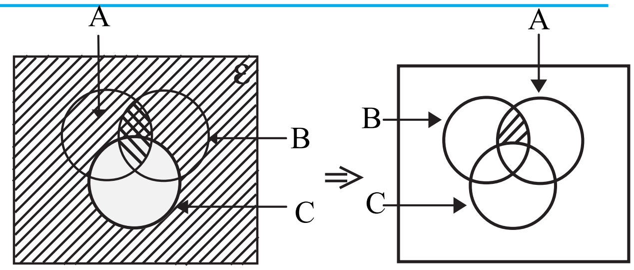
$\Rightarrow$



$(A \cap B) \cap C$

(iv) රූපයේ ඉරි දෙවර්ගයෙන් ම අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශය P නම් , P ට අයත් වන්නේ C ට අයත් නොවන සහ A සහ B දෙකට ම අයත් අවයවයි.

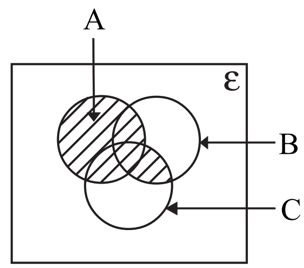
$\therefore P = (A \cap B) \cap C'$



$(A \cap B) \cap C'$

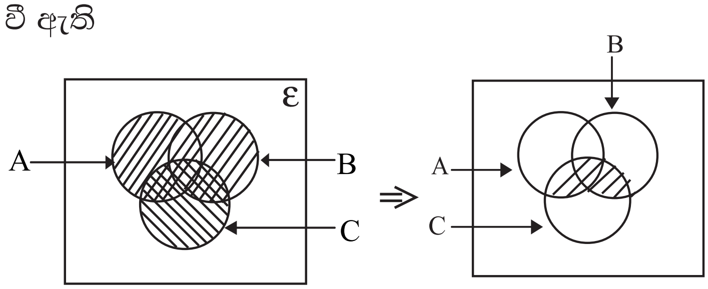
(v) රූපයේ අඳුරුකර ඇති ප්‍රදේශයට අයත් කුලකය

$A \cup (B \cap C)$ වේ.



(vi) රූපයේ ඉරි දෙවර්ගයෙහි ම අඳුරු වී ඇති ප්‍රදේශයට අදාළ කුලකය

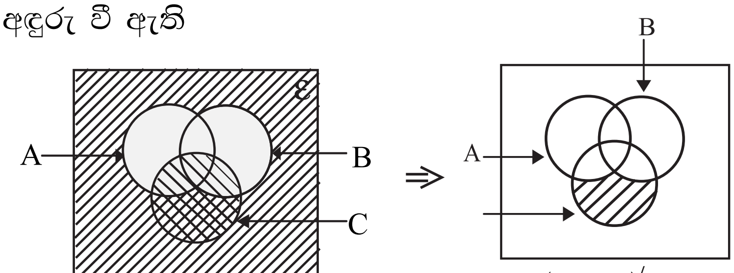
$(A \cup B) \cap C$ වේ.



$(A \cup B) \cap C$

(vii) රූපයේ ඉරි දෙවර්ගයෙන් ම අඳුරු වී ඇති ප්‍රදේශයට අදාළ කුලකය

$(A \cup B)' \cap C$ වේ.



$(A \cup B)' \cap C$

කුලක තුනක් සම්බන්ධව කුලක පිළිබඳ නියම මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

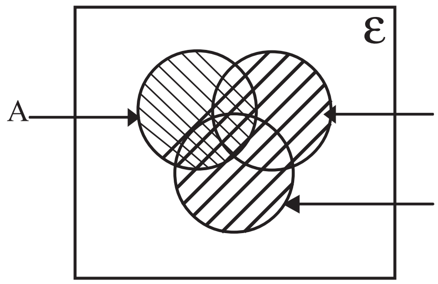
(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

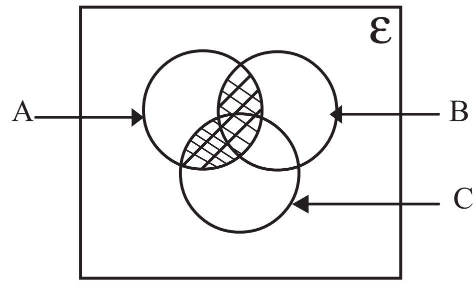
(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ඉහත නියමයන් ද වෙන් රූප සටහන් මගින් සාධනය කළ හැකි අතර මෙහි දී (iii) වන නියමය පමණක් සාධනය කරන අතර අනෙක් නියම අභ්‍යාස ලෙස සාදන්න.

(iii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ බව පෙන්වීම.



ඉරි දෙවර්ගයෙහි ම අඳුරු වී ඇති ප්‍රදේශයට අදාළ කුලකය $A\cap(B\cup C)$ වේ.

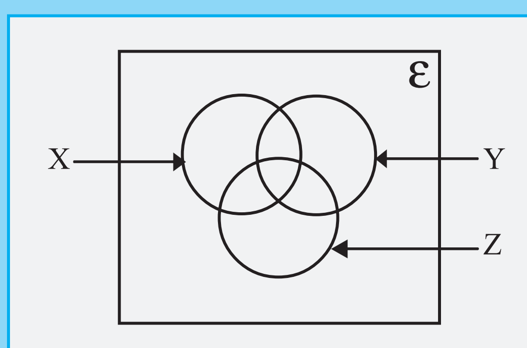


රූපයේ අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයට අදාළ කුලකය $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\therefore$ රූප සටහන් දෙකට ම අනුව
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ වේ.

24.3 අභ්‍යාසය

(1) දී ඇති වෙන් රූපය පිටපත් කර අසා ඇති එක් එක් කුලකයන්ට අයත් ප්‍රදේශ අඳුරු කර දක්වන්න. එම ප්‍රදේශ හැඳින්වෙන කුලක හඳුනා ගන්න.



(i) $(X\cup Y)\cup Z$

(ii) $(X\cup Y)\cap Z$

(iii) $X\cap(Y\cup Z)$

(iv) $X\cup(Y\cap Z)$

(v) $X\cap(Y\cap Z)$

(vi) $(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

(2)

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P = \{2, 3, 5, 8\}$

$Q = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$R = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

පහත සඳහන් කුලකවලට අයත් අවයව ලියා ඒ අතර සමාන කුලක ලියා දක්වන්න.

(i) $(P \cup Q) \cup R$

(ii) $(P \cap Q) \cap R$

(iii) $P \cap (Q \cup R)$

(iv) $P \cup (Q \cap R)$

(v) $P \cup (Q \cup R)$

(vi) $P \cap (Q \cap R)$

(vii) $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$

(viii) $(P \cup Q) \cap (P \cup R)$

(3) (i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ වේ.

පහත සඳහන් එක් එක් කුලකයේ අවයව සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$, $n(A \cap B \cap C)$, $n(A \cup B \cup C)$

(ii) එමගින් පහත සඳහන් සමීකරණය සත්‍යාපනය කරන්න.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

නිදසුන 5.

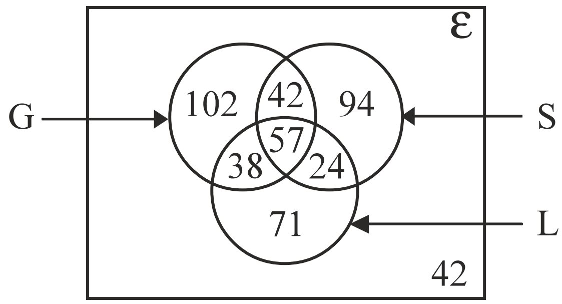
ε = {මිශ්‍ර පාසලක සිටින සිසුන්}

G = {පාසලේ සිටින ගැහැනු ළමයින් }

S = {පිහිනිය හැකි සිසුන්}

L = {වම් අත් හුරු සිසුන්}

මෙම කුලක පහත වෙන් සටහනේ නිරූපණය කොට ඇත. එක් එක් ප්‍රදේශය සඳහා වූ අවයව සංඛ්‍යාව සටහන් කර ඇත.



(a) වම් අත හුරු සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(b) පිහිනිය නොහැකි ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(c) පිහිනිය හැකි පිරිමි ළමයින් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(d) වම් අත හුරු ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(e) වම් අත හුරු පිරිමි ළමයින් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(f) වම් අත හුරු ගැහැනු ළමයින්ගෙන් අතරේ පිහිනිය හැකි සංඛ්‍යාව කීය ද?

(g) පාසලේ සිටින පිරිමි ළමයින් සංඛ්‍යාව කීය ද?

විසඳුම

(a) $38 + 57 + 24 + 71 = \underline{\underline{190}}$

(b) $102 + 38 = \underline{\underline{140}}$

(c) $94 + 24 = \underline{\underline{118}}$

(d) $38 + 57 = \underline{\underline{95}}$

(e) $71 + 24 = \underline{\underline{95}}$

(f) $\underline{\underline{57}}$

(g) $42 + 71 + 24 + 94 = \underline{\underline{231}}$

නිදසුන 6.

ε = {පාසලේ සිටින සිසුවියන්}

A = {පැසිපන්දු ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්}

B = {දැල් පන්දු ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්}

C = {හොකී ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්}

පහත වචනයෙන් දී ඇති කරුණු කුලක අංකනය භාවිතයෙන් ලියන්න.

(1) ක්‍රීඩා තුනෙහි ම නියැළෙන සිසුවියන්

(2) හොකී ක්‍රීඩා නොකරන දැල්පන්දු හා පැසිපන්දු ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්

(3) හොකී පමණක් ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්

(4) දැල් පන්දු හා හොකී ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්

(5) දැල් පන්දු හා හොකී හෝ පැසි පන්දු ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්

(6) දැල්පන්දු හා හොකී හෝ දැල්පන්දු හා පැසිපන්දු ක්‍රීඩා කරන සිසුවියන්

විසඳුම්

(1) $A \cap B \cap C$ (4) $B \cap C$

(2) $C' \cap (A \cup B)$ (5) $(B \cap C) \cup A$

(3) $C \cap (A \cup B)'$ (6) $(B \cap C) \cup (A \cap B)$

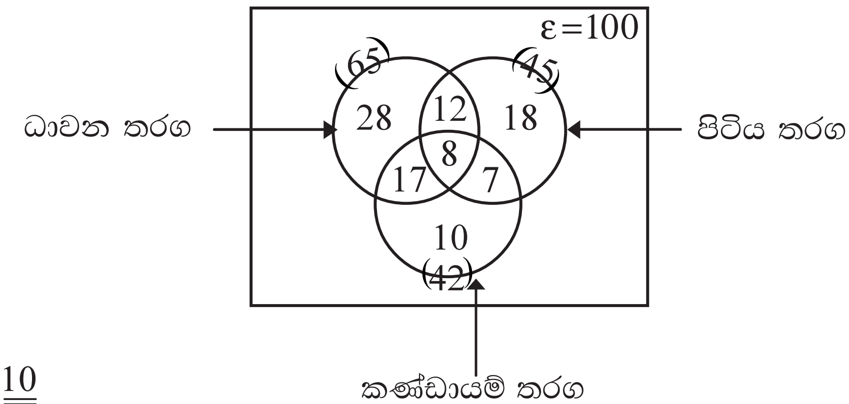
නිදසුන 7.

(1) පාසලක නිවාසාන්තර මලල ක්‍රීඩා තරඟයක දී සිසුන් 100 දෙනෙක් සහභාගී වූ ක්‍රීඩා ඉසව් පිළිබඳ ව විස්තර පහත සඳහන් වේ.

65 දෙනෙක් ධාවන තරඟවලට ද , 45 දෙනෙක් පිටියේ තරඟවලට ද , 42 දෙනෙක් කණ්ඩායම් තරඟවලට ද සහභාගී වූහ. තවද මෙයින් 20 දෙනෙක් ධාවන තරඟවලට හා පිටියේ තරඟවලට ද , 25 දෙනෙක් ධාවන තරඟවලට හා කණ්ඩායම් තරඟවලට ද, 15 දෙනෙක් පිටියේ තරඟවලට හා කණ්ඩායම් තරඟවලට ද ආදී වශයෙන් ක්‍රීඩා දෙකකට සහභාගි වූහ. තවද 8 දෙනෙක් මෙම ක්‍රීඩා වර්ග තුනටම සහභාගී වූහ. මෙම තොරතුරු වෙන් රූප සටහනක දක්වා පහත ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

(a) කණ්ඩායම් ක්‍රීඩාවලට පමණක් සහභාගී වූ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(b) එක ක්‍රීඩා වර්ගයකට පමණක් සහභාගී වූ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?



(a) $\underline{\underline{10}}$

(b) $28+10+18=\underline{\underline{56}}$

24.4 අභ්‍යාසය

(1). වෙළඳ සැලකින් එක්තරා දිනයක දොඩම්, ඇපල් හා මිදි යන පලතුරු මිලයට ගත් පාරිභෝගිකයන් සංඛ්‍යා පිළිබඳ විස්තර පහත සඳහන් වේ.

ඇපල් පමණක් මිල දී ගත් සංඛ්‍යාව 12 කි. 15 දෙනෙක් ඇපල් හා මිදි මිල දී ගත්හ. මිදි හා දොඩම් මිලට ගත් 9 දෙනෙකි. ඉන් 4 දෙනෙක් ඇපල් මිලට නොගත්හ. 31 දෙනෙක් මිදි ද 25 දෙනෙක් දොඩම් ද මිලට ගත්හ. 7 දෙනෙක් දොඩම් පමණක් මිලට ගත් හ. කඩයට පැමිණි සියලු දෙනා ම එක් පලතුරක්වත් මිලට ගත්හ.

(i) මෙම තොරතුරු වෙන් රූප සටහනක දක්වන්න.

(ii) මිදි පමණක් මිලට ගත් අය කී දෙනෙක් ද?

(iii) මිදි නොගෙන ඇපල් හා දෙඩම් මිලට ගත් අය කී දෙනෙක් ද?

(iv) කඩයට පැමිණි පාරිභෝගිකයන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(2). නිෂ්පාදනයෙන් පසු විදුලි උපකරණ 500ක් P,Q හා R නමැති පරීක්‍ෂා කරන ස්ථාන 3කට ඇතුළත් කෙරුණි. එයින් P පරීක්‍ෂාවෙන් උපකරණ 38ක් ද, Q පරීක්‍ෂණයෙන් උපකරණ 29ක් ද, R වර්ගයේ පරීක්‍ෂණ උපකරණ 30ක් ද, නියම වූ තත්ත්වයට යෝග්‍යතාව පෙන්වූයේ නැත. තව ද P හා R පරීක්‍ෂණවලින් උපකරණ 8ක් ද P හා Q පරීක්‍ෂණවලින් උපකරණ 10ක් ද Q හා R පරීක්‍ෂණවලින් උපකරණ 12ක් ද පරීක්‍ෂණ තුනෙන් ම 3ක් ද යෝග්‍යතාව පෙන්වූයේ නැත.

(i) සියලු ම පරීක්ෂණ වලින් යෝග්‍යතා පෙන්වූ උපකරණ සංඛ්‍යාව කීය ද?

(ii) එක පරීක්ෂණයකින් පමණක් යෝග්‍යතා පෙන්වූ උපකරණ සංඛ්‍යාව කීය ද?

(iii) පරීක්ෂණ දෙකකින් පමණක් යෝග්‍යතා නොපෙන් වූ උපකරණ සංඛ්‍යාව කීය ද?

(3) $\varepsilon = \{$ත්‍රිකෝණ$\}$

$I = \{$සම ද්විපාද ත්‍රිකෝණ$\}$

$R = \{$සෘජු කෝණී ත්‍රිකෝණ$\}$

$A = \{$වර්ගඵලය $32\,m^2$ ක් වූ ත්‍රිකෝණ$\}$

(i) ඉහත තොරතුරු වෙන් රූපසටහනක දක්වන්න.

(ii) $I \cap R$ කුලකයේ අවයව වන ත්‍රිකෝණවල ලක්ෂණ සටහන් කරන්න.

(iii) $I \cap A \cap R$ කුලකයේ අවයව වන ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

(4) ගමක ගොවියන් 75 දෙනෙකුගෙන් 45 දෙනෙක් මිරිස් වගාව ද 25 දෙනෙක් බටු වගාව ද කරයි. මිරිස් හා බණ්ඩක්කා වගා කරන 20 දෙනෙකුගෙන් 15 දෙනෙක් බටු වගාව නො කරති. බටු හා මිරිස් 10 දෙනෙක් ද බණ්ඩක්කා හා බටු 15 දෙනෙක් ද වගා කරති. සියලු ම ගොවියෝ මෙයින් එක වර්ගයක්වත් වගා කරති. පහත ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

(i) භෝග වර්ග තුන ම වගා කළ ගොවීන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(ii) මිරිස් පමණක් වගා කළ ගොවීන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(iii) මිරිස් හා බටු පමණක් වගා කළ ගොවීන් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(5) එකම වර්ගයේ නොවන විටමින් පෙති 60ක A,B හෝ C විටමින්වලින් එක් වර්ගයක්වත් ඇතුළත් ය. මෙයින් පෙති 12ක විටමින A පමණක් ඇතුළත් ය. පෙති 7ක B විටමින් පමණක් අඩංගු ය. පෙති 11ක C විටමින් පමණක් අඩංගු ය. තවද A හා B ද, A හා C ද, B හා C ද අඩංගු පෙති සංඛ්‍යා සමාන වේ නම් හා විටමින් තුන් වර්ගය ම අඩංගු පෙති සංඛ්‍යාව 3ක් නම් A විටමින් අඩංගු පෙති සංඛ්‍යාව කීය ද?

(6) අධ්‍යාපන පීඨයකට ඇතුළත් වීම සඳහා 172 දෙනෙක් ඉල්ලුම් පත්‍ර ඉදිරිපත් කර තිබුණි. මෙයින් 45 දෙනෙකු ගණිත අංශයටත් ද, 38 දෙනෙකු ඉංග්‍රීසි අංශයටත්, 21 දෙනෙකු තොරතුරු තාක්ෂණ අංශයටත් ඉල්ලුම් කර තිබුණි. මෙයින් 18 දෙනෙකු ගණිතය හා ඉංග්‍රිසි අංශවලට ඉල්ලුම් කර තිබුණි. 9 දෙනෙකු ගණිතය හා තොරතුරු තාක්‍ෂණයටත්, 4 දෙනෙක් ඉංග්‍රීසි හා තොරතුරු තාක්‍ෂණයටත් ඉල්ලුම් කර තිබුණි. 4 දෙනෙක් මෙම අංශ තුනට ම ඉල්ලුම් කර තිබුණි.

(i) ගණිතය අංශයට පමණක් කී දෙනෙකු ඉල්ලුම් කර තිබුණේ ද?

(ii) ගණිතය හැර වෙනත් අංශයන්ට ඉල්ලුම් කර තිබුණු සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

(iii) කී දෙනෙකු ඉංග්‍රීසි හා තොරතුරු තාක්‍ෂණය අංශවලට පමණක් ඉල්ලුම් කර තිබුණේ ද?

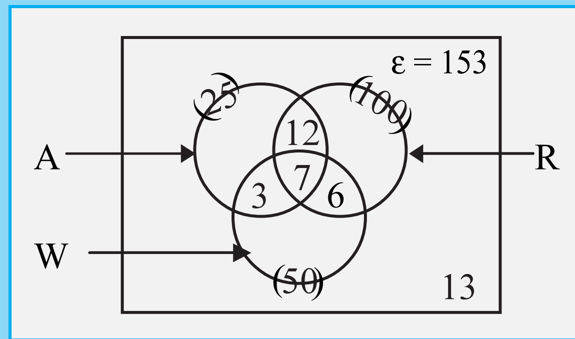
(7) වෙළෙඳ ආයතනයක එක්තරා කාලසීමාවක් තුළ විකුණූ මෝටර් රථ සම්බන්ධ විස්තර පහත වෙන් රූපයේ දැක්වේ.

ε = {විකුණූ මෝටර් රථ}

A = {වායු සමීකරණ සහිත ඒවා}

R = {ගුවන් විදුලි සහිත ඒවා}

W = {විද්‍යුත් දෙර සහිත ඒවා}



(i) විද්‍යුත් දෙර පමණක් සහිත වාහන සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

(ii) වායු සමීකරණ පමණක් සහිත වාහන සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

(iii) ගුවන් විදුලි යන්ත්‍රය පමණක් සහිත වාහන සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

(iv) වායු සමීකරණ නොමැති ගුවන් විදුලි යන්ත්‍රය හා විද්‍යුත් දොර සහිත වාහන කොපමණ ද?

(8) ගෙවල් 150 ක් තිබෙන වීදියක පත්තර කියවීම සම්බන්ධව කළ සමීක්ෂණයක දී පහත තොරතුරු ලැබුණි.

- T, M G යන පත්තර වර්ග තිකුත් කරණු ලැබේ.
- T වර්ගයේ පත්තර මිලට ගන්නා ගෙවල් 40 කි.
- G වර්ගයේ පත්තර මිලට ගන්නා ගෙවල් 35 කි.
- ගෙවල් 60 ක M වර්ගයේ පත්තර මිලට ගැනේ.
- ගෙවල් 7 ක T හා G ද
- ගෙවල් 10 ක G හා M මිලයට ලබා ගන්නා අතර මින් 8 ක T මිලයට නො ගැනේ.
- ගෙවල් 4 ක T හා M මිලයට ගැනේ.
- ගෙවල් 34 ක මෙම වර්ග එකක්වත් මිලයට ගන්නේ නැත.

පත්තර තුන් වර්ගය ම මිලයට ගන්නා ගෙවල් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(9) රූපවාහිනී නරඹන 60 දෙනෙකුගෙන් කළ විමසුමක දී පහත සඳහන් තොරතුරු ලැබුණි.

25 දෙනෙක් සිංහල විකාශය ද 26 දෙනෙක් දෙමළ විකාශය ද නරඹති. 9 දෙනෙකු සිංහල හා ඉංග්‍රිසි විකාශයන් ද, 11 දෙනෙක් සිංහල හා දෙමළ විකාශයන් ද, 8 දෙනෙකු දෙමළ හා ඉංග්‍රිසි විකාශයන් ද නරඹන අතර, 8 දෙනෙකු මෙයින් කිසිවක් නරඹන්නේ නැත. 10 දෙනෙක් දෙමළ විකාශය පමණක් නරඹති.

මෙම තොරතුරු වෙන් සටහනක සටහන් කර පහත ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

(i) විකාශයන් තුන ම නරඹන අය කීදෙනෙක් ද?

(ii) එක් විකාශයක් පමණක් නරඹන අය කීදෙනෙක් ද?

(iii) සිංහල විකාශය පමණක් නරඹන අය කීදෙනෙක් ද?

25 සම්භාවිතාව

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට
- රුක් සටහන් හඳුන්වා දීම සහ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දැක්වීම
- රුක් සටහන් මගින් ගැටලු විසඳීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

විය හැකියාවන් නිරූපණය කිරීමේ විවිධ ක්‍රම මගින් එදිනෙදා ජීවිතයේ දී හමු වන සිද්ධිවලට අදාළ අර්ථ දැක්වීම් සම්බන්ධ ව ඔබ උගත් කරුණු සිහිපත් කර ගැනීම ඉතා වැදගත් වේ.

25.1 නියැදි අවකාශය

සසම්භාවී පරීක්ෂණයක දී විය හැකි සියලු ප්‍රතිඵල අඩංගු කුලකය එම පරීක්ෂණයේ **නියැදි අවකාශය** නම් වේ. මෙය සාමාන්‍යයෙන් "S" මගින් අංකනය කෙරේ.

නිදසුන 1.

(i) නොනැඹුරු කාසියක් උඩ දැමීම යන සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය $S = \{H,T\}$, මෙහි සිරස වැටීම H ලෙස ද, අගය වැටීම T ලෙසද හැඳින්වේ.

(ii) පැති 1 සිට 6 තෙක් නම් කර ඇති සාධාරණ දදු කැටයක් උඩ දැමීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ වේ.

(iii) අලුත ඉපදුණ දරුවා ගැහැනු දරුවකු ද පිරිමි දරුවකු ද යන්න සෙවීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය

$S = \{ M,F \}$, මෙහි ගැහැනු දරුවකු වීම F මගින්,
පිරිමි දරුවෙකු වීම M මගින් ද දැක්වේ.

25.2 සිද්ධි

සිද්ධි : සිද්ධියක් යනු නියැදි අවකාශයේ උපකුලකයකි.

නිදසුන 2.

(i) කාසියක් උඩ දැමීමේ දී සිරස ලැබීම සිද්ධියක් වේ. මෙය A ලෙස හැඳින්වුවහොත් $A = \{H\}$ වේ. පැහැදිලි ව ම මෙය $S = \{H, T\}$ යන නියැදි අවකාශයේ උපකුලකයක් වේ.

(ii) දාදු කැටයක් උඩ දැමීමේ දී ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම ද සිද්ධියක් වේ. මෙය B මගින් හැඳින්වුව හොත්,

$B = \{1, 3, 5\}$ වේ. පැහැදිලි ව ම මෙය

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ නියැදි අවකාශයේ උපකුලකයකි.

25.3 සරල සිද්ධි

යම් සිද්ධියක් සිද්ධීන් වශයෙන් තව දුරටත් බෙදිය නොහැකි නම් එවැනි සිද්ධියකට සරල සිද්ධියක් යැයි කියනු ලැබේ. එනම් සිද්ධියක් සරල සිද්ධියක් වන විට එහි අඩංගු වන්නේ එක් අවයවයක් පමණි.

නිදසුන 3.

(i) කාසියක් උඩ දැමීමේ දී සිරස ලැබීමේ සිද්ධිය සරල සිද්ධියක් වේ. මෙහි ඇත්තේ H යන අවයවය පමණි.

(ii) දාදු කැටයක් උඩදැමීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශයේ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ වේ. මෙහි සරල සිද්ධි මෙසේ දැක්විය හැක.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

ඕනෑ ම සිද්ධියක් සරල සිද්ධිවල මේලයක් ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

නියැදි අවකාශය ද සිද්ධියකි. ඉහත (ii) නිදසුනට අනුව

$S = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$ වේ.

25.4 සංයුක්ත සිද්ධි

යම් සිද්ධියක් සිද්ධීන් දෙකකට හෝ ඊට වැඩි ගණනකට බෙදිය හැකි නම් එම සිද්ධිය සංයුක්ත සිද්ධියක් ලෙස හැඳින්වේ.

නිදසුන 4.

(i) දදු කැටයක් උඩ දැමීමේ දී ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සිද්ධිය සංයුක්ත සිද්ධියක් වේ.

A = දදු කැටයක් උඩ දැමීමේ දී ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම.

$A = \{1, 3, 5\}$

මෙය $\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}$

ලෙස සිද්ධීන් ගණනාවකට බෙදිය හැක.

25.5 අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධීන්

නියැදි අවකාශයක සිද්ධීන් දෙකක් හෝ ඊට වැඩි ගණනක් අතර පොදු සරල සිද්ධි කිසිවක් නොමැති නම් ඒවා අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි ලෙස හැඳින් වේ.

A හා B ඕනෑ ම සිද්ධි දෙක සඳහා $A \cap B = \phi$ නම්, A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ.

නිදසුන 5.

දදු කැටයක් උඩ දැමීම පිළිබඳ සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ දී

A – ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම,

B – ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීම.

යන සිද්ධීන් දෙක සැලකීමේ දී

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ නිසා

$A \cap B = \phi$ වේ.

(ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම හා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම එකවර සිදු විය නොහැකි ය.)

$\therefore$ A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි වේ.

25.6 සම්භාවිතාව

සම්භාවිතාව පිළිබඳ ඔබ මෙතෙක් ඉගෙන ගත් කරුණු නැවත ආවර්ජනය කරමු. සිද්ධියක සම්භාවිතාව යනු එම සිද්ධිය සිදු වීමට ඇති හැකියාව වේ. මෙහි දී අප මුලින් ම සම්භාවිතාව අර්ථ දක්වන ලද්දේ සම සේ භව්‍ය සිද්ධිවලටයි.

නිදසුන 6.

නොනැඹුරු දදු කැටයක් උඩ දැමීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණය සලකමු.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

මෙම නියැදි අවකාශයට අනුරූප සරල සිද්ධි මෙසේයි.

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$$

A= {2} නම් A නම් සරල සිද්ධිය සිදුවීමේ සම්භාවිතාව $P(A)$ ලෙස සටහන් කරනු ලබන අතර

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ ලෙස අර්ථ දක්වූ බව ඔබට මතක ඇති. මෙහි $n(s)$ මගින්

S නියැදි අවකාශයේ අවයව ගණන දක්වේ. ඉහත සරල සිද්ධි සියල්ලේ ම සම්භාවිතාව $\frac{1}{6}$ වන බව ඔබට පැහැදිලි ය. මෙසේ නියැදි අවකාශයේ වූ සියලු ම සරල සිද්ධි සඳහා එක ම සම්භාවිතායක් ඇත්නම් එම සිද්ධිවලට **සම සේ භව්‍ය** සිද්ධි යයි කියනු ලැබේ.

> සරල සිද්ධින් සියල්ල අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වන අතර ඒවා සම සේ භව්‍ය නම් සම්භාවිතාවන්ගේ ඓක්‍යය එකට සමාන වේ.

දැන් සමසේ භව්‍ය සරල සිද්ධිවලින් සමන්විත වූ සංයුක්ත සිද්ධියක් සලකමු.

X − ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම.

$X = \{1, 3, 5\}$

මෙවැනි සංයුක්ත සිද්ධියක සම්භාවිතාව

$P(X) = \frac{n(X)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ වේ.

> සම සේ භාව්‍ය සරල සිද්ධීන් ගෙන් සමන්විත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක නියැදි අවකාශය S ද එහි ඕනෑ ම සංයුක්ත සිද්ධියක් M යැයි ද ගනිමු.
>
> $n(S) = N$ ද $n(M) = m$ ද නම්
>
> $P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{m}{N}$ වේ.
>
> මෙහි $o \leqslant P(M) \leqslant 1$

තවද A හා B ඕනෑ ම සිද්ධීන් දෙකක් නම්

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව ද

A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි නම්

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ බව ද ඔබ උගෙන ඇත.

නිදසුන 7.

(1) විදුලි උපකරණ වෙළඳ සැලක පාරිභෝගිකයන් 75 දෙනෙකු සම්බන්ධ කරමින් සිදු කරන ලද සමීක්ෂණයක දී පහත සඳහන් තොරතුරු සොයා ගන්නා ලදී. 12 දෙනෙකු රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් මිල දී ගන්නා බව ද 18 දෙනෙකු ශිතකරණයක් මිල දී ගන්නා බව ද 24 දෙනෙකු නව රූපවහිනි යන්ත්‍රයක් මිල දී ගන්නා බව ද 6 දෙනෙකු රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් හා ශිතකරණයක් මිල දී ගන්නා බව ද 4 දෙනෙකු රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් හා රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක් මිල දී ගන්නා බව ,ද 10 දෙනෙකු රූපවහිනියක් හා ශිතකරණයක් මිල දී ගන්නා බව ද පෙනුණි. එක් පුද්ගලයෙකු පමණක් ඉහත උපකරණ තුන ම මිල දී ගන්නා බව ද පෙනුණි.

(i) මෙම තොරතුරු වෙන් රූප සටහනක දක්වන්න.

(ii) මෙම පුද්ගලයන්ගෙන් අහඹු ලෙස පුද්ගලයකු ගත් විට ඔහු,

(a) මෙහි සඳහන් උපකරණයක් මිල දී නොගත්තකු වීමේ

(b) රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් පමණක් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ

(c) රූපවාහිනියක් පමණක් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ

(d) ශීතකරණයක් පමණක් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ

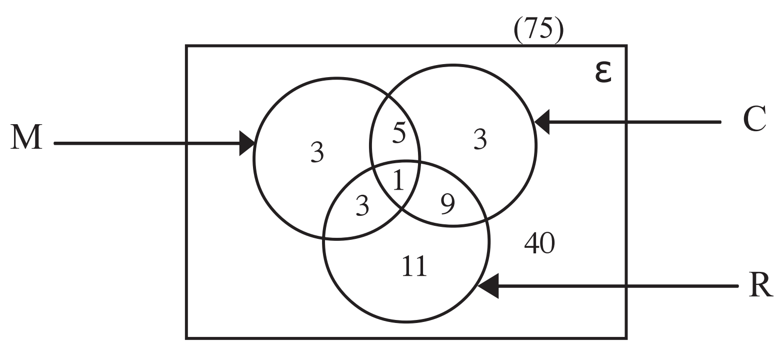
(e) රූපවාහිනි යන්ත්‍රයක් හා ශීතකරණයක් යන උපකරණ දෙකින් යටත් පිරිසෙයින් එක් උපකරණයක්වත් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

M - රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් මිල දී ගන්නා අය කුලකය

R - රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක් මිල දී ගන්නා අය කුලකය

C - ශීතකරණයක් මිල දී ගන්නා අය කුලකය

(i)



(ii) (a) මෙහි සඳහන් උපකරණයක් මිල දී නොගන්නා අයකු වීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(M \cup C \cup R)'$$

$$= \frac{n(M \cup C \cup R)'}{n(S)} = \frac{40}{75} = \frac{8}{15}$$

(b) රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් පමණක් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(M \cap (C \cup R)^{/}) = \frac{3}{75} = \frac{1}{25}$$

(c) රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක් පමණක් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(R \cap (M \cup C)^{/}) = \frac{11}{75}$$

(d) ශීතකරණයක් පමණක් මිල දී ගන්නා අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(C \cap (M \cup R)^{/}) = \frac{3}{75}$$

(e) රූපවාහිනි යන්ත්‍රයක් හා ශීතකරණයක් යන දෙකෙන් යටත් පිරිසෙන් එක් උපකරණයක්වත් මිල දී ගන්නා අයකු වීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(C \cup R) = \frac{n(C \cup R)}{n(S)}$$

$$= \frac{32}{75}$$

25.1 ක්‍රියාකාරකම

ඉහත (7) නිදසුනෙහි ඇති තොරතුරුවලින්

$P(M \cup R \cup C) = P(M) + P(R) + P(C) - P(M \cap R)$

$- P(M \cap C) - P(R \cap C) + P(M \cap R \cap C)$ සමීකරණය සත්‍යාපනය කරන්න.

25.1 අභ්‍යාසය

(1) පාබල හමුදාව, ගුවන් හමුදාව, නාවික හමුදාව අතරින් තමන් බැඳීමට කැමති කිනම් හමුදාවට දැයි සිසුන් 46 දෙනෙකුගෙන් විමසූ විට පාබල හමුදාවට කැමති 21 දෙනෙකු ද, ගුවන් හමුදවට බැඳීමට කැමති 14 දෙනෙක් ද, නාවික හමුදවට බැඳීමට කැමති 23 දෙනෙකු ද, මෙම තුනට ම බැඳීමට කැමති අය 5 දෙනෙකු ද, පාබල හමුදාව හා ගුවන් හමුදවට බැඳීමට කැමති අය 7 දෙනෙකු ද පාබල හමුදාව හා නාවික හමුදවට පමණක් බැඳීමට කැමති අය 8 දෙනෙකු ද ගුවන් හමුදවට පමණක් බැඳීමට කැමති අය 4 දෙනෙකු ද සිටි බව පෙනුණි.

- මෙම තොරතුරු වෙන් සටහනක් මගින් දක්වන්න.
- මෙම සිසුන්ගෙන් අහඹු ලෙස සිසුවකු තෝරූ විට ඔහු,

  (a) පාබල හමුදවට බැඳීමට පමණක් කැමති කෙනෙකු වීමේ
  (b) නාවික හමුදවට පමණක් බැඳීමට කැමති කෙනෙකු වීමට
  (c) මෙම තුනෙන් එකකටවත් බැඳීමට කැමති නැති, කෙනෙකු වීමේ සම්භාවිතා සොයන්න.

(2) බෑගයක හැඩයෙන් හා ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ කෘත්‍රිම මුතු ඇට 10ක් තිබේ. එයින් 5ක් සුදු පාටය. 3 ක් රතු පාට ය. 2 ක් කළු පාට ය. අහඹු ලෙස මුතු ඇටයක් ගෙන ආපසු නො දමා තවත් මුතු ඇටයක් ගන්නා ලදී.

- මෙම පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය කාටීසීය තලයක සටහන් කරන්න.
- ගන්නා ලද මුතු ඇට දෙක ම,

(a) සුදු පාට මුතු ඇට වීමේ
(b) රතුපාට මුතු ඇට වීමේ
(c) කළුපාට මුතු ඇට වීමේ
(d) එකක් සුදුපාට මුතු ඇටයක් වීමේ හා අනික රතුපාට මුතු ඇටයක් වීමේ
(e) දෙක ම වෙනස් පාටවලින් යුක්ත මුතු ඇට වීමේ

සම්භාවිතා සොයන්න.

25.7 ස්වායත්ත සිද්ධි

ස්වායත්තතාව සම්භාවිතාවේ දී එන ඉතා වැදගත් සංකල්පයකි. පහත සඳහන් නිදසුන් මගින් එය මෙසේ පැහැදිලි කළ හැකි ය.

නිදසුන 8.

ළමුන් 36 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත ශිෂ්‍ය කණ්ඩායමක් සලකන්න.

A – නිල්පාට ඇස් ඇති අයකු වීම.
B – පිරිමි ළමයකු වීම.

ඒ හා සම්බන්ධ තොරතුරු පහත වගුවේ ඇත.

	A	$A^/$	එකතුව
B	6	6	12
$B^/$	12	12	24
එකතුව	18	18	36

මෙහි $A^/$ නිල් පාට ඇස් ඇති අයකු නොවීම හා
$B^/$ පිරිමි ළමයකු නොවීම යන සිද්ධි නිරූපණය වේ. මේ අනුව ඉහත කණ්ඩායමෙන් අහඹු ලෙස ළමයෙකු තෝරා ගත හොත්, එම ළමයා සම්බන්ධ ව පහත සඳහන් සම්භාවිතාවන් සෙවිය හැකි ය.

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

තව ද $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{6}$$

$$= P(A \cap B)$$

$\therefore P(A \cap B) = P(A).P(B)$ වේ.

තවද ඉහත A හා B සිද්ධි දෙකේ , A සිද්ධියේ සිදු වීම හෝ සිදු නොවීම කෙරෙහි B සිද්ධිය බල නොපායි. එනම් කණ්ඩායමෙන් ළමයෙකු තෝරා ගත හොත්, එම ළමයා පිරිමි ළමයකු වීම හෝ නොවීම එම ළමයා නිල් ඇස් ඇති අයකු වීම හෝ නොවීම කෙරෙහි බල නො පායි

මෙවැනි සිද්ධිවලට **ස්වායත්ත සිද්ධි** යැයි කියනු ලැබේ.

A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් නම්

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ වේ.

මෙහි විලෝමය ද සත්‍ය වේ. එනම්

A හා B සිද්ධි දෙකක් සඳහා

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ නම් එම සිද්ධි ස්වායත්ත වේ.

නිදසුන 9.

(1) සර්වසම කාසි දෙකක් එක වර උඩ දමන්නේ යයි සිතමු

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ වේ.

A – පළමු කාසියේ අනිවාර්යයෙන් ම සිරස ලැබීම

B – දෙවන කාසියේ අනිවාර්යයෙන් ම සිරස ලැබීම

C – එක් කාසියකින් පමණක් සිරස ලැබීම

$\therefore A = \{HH, HT\}$, $B = \{HH, TH\}$

$C = \{HT, TH\}$

$\therefore P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ වේ.

$$P(A\cap C)=\frac{1}{4}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}, P(B\cap C)=\frac{1}{4}$$

$\therefore P(A\cap C)=P(A).P(C)$ ද $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ ද

$P(B\cap C)=P(B).P(C)$ ද වේ.

$\therefore$ A හා C ද A හා B ද B හා C ද යුගල වශයෙන් ස්වායත්ත වේ.

ඉහත නිදසුනේ $P(A\cap B\cap C)= P(A).P(B).P(C)$ යන්න සත්‍ය ද? සාකච්ඡා කරන්න.

25.2 අභ්‍යාසය

(1) පැති 1 සිට 6 තෙක් නම් කර ඇති එකක් රතු පාට සහ අනෙක කොළපාට වූ දදු කැට දෙකක් උඩ දැමීමේ දී ලැබෙන නියැදි අවකාශය ලක්ෂ්‍යය ප්‍රස්තාරයක දක්වන්න.

රතු පාට දදු කැටයෙන් 5 ලැබීම A නම් හා
කොළ පාට දදු කැටයෙන් 6 ලැබීම B නම්
A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි බව පෙන්වන්න.

(2) සාධාරණ කාසියක් තුන් වරක් උඩ දමනු ලැබේ.

(i) නියැදි අවකාශය ලියා දක්වන්න
(ii) පළමු වන වාරයේ දී අගය ලැබීම A ද
දෙවැනි වාරයේ දි අගය ලැබීම B ද
වාර තුනේ දීම සිරස දෙකක් පමණක් ලැබීම C ද නම්

A, B හා C සිද්ධිවලින් කුමන ඒවා ස්වායත්ත සිද්ධි ද?

(3) ප්‍රමාණාත්මක යම් භාණ්ඩයක් A නම් පෙට්ටියක 8 ක් ද , මෙයින් 3ක් දෝෂ සහිත ව ද, B නම් පෙට්ටියක 5 ක්ද, එයින් 2 ක් දෝෂ සහිත ව ද පවතී . එක් එක් පෙට්ටියෙන් එක් භාණ්ඩය බැගින් අහඹු ලෙස පිටතට ගනු ලැබේ.

(a) භාණ්ඩ දෙක ම දෝෂ රහිත ඒවා වීමේ
(b) එක් භාණ්ඩයක් දෝෂ සහිත ද, අනෙක දෝෂ රහිත ද වීමේ
(c) A පෙට්ටියෙන් දෝෂ සහිත භාණ්ඩයක් ලැබීමේ
(d) B පෙට්ටියෙන් දෝෂ සහිත භාණ්ඩයක් වීමේ

සම්භාවිතා සොයන්න.

(4) A හා B දෙදෙනා ඉලක්කයට වෙඩි තැබීමේ ක්‍රීඩාවේ යෙදෙති. A ඉලක්කයට වෙඩි තැබීම සාර්ථක වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{4}$ ද

B ඉලක්කයට වෙඩි තැබීම සාර්ථක වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ ද වේ.

(i) දෙදෙනා ම ඉලක්කයට වෙඩි තැබීම සාර්ථක වීමේ

(ii) යටත් පිරිසෙන් එක් අයකු හෝ ඉලක්කයට වෙඩි තැබීම සාර්ථක වීමේ

(5) A, B හා C නම් අශ්වයන් 3 දෙනෙකු දිවීමට තරඟයකට සහභාගි කෙරෙයි. ඒ ඒ අශ්වයා දිනීමේ සම්භාවිතාවය $P(A)=\frac{1}{2}$ ද, $P(B)=\frac{1}{3}$ හා $P(C)=\frac{1}{6}$ ද වේ. තරඟය දෙවතාවක් පැවැත්වේ නම් විය හැකි සියලු සිදු වීම් කුලකය ලියන්න. AB යනු පළමු තරඟයෙන් A දිනීම හා දෙවන තරඟයෙන් B දිනීමේ සිද්ධිය නම් පහත සම්භාවිතාවන් සොයන්න.

$P(AB)$, $P(AC)$, $P(BA)$, $P(BB)$, $P(BC)$

$P(AA)$, $P(CA)$, $P(CB)$, $P(CC)$

නිදසුන 10

රුපියල් දෙකේ හා රුපියලේ නොනැඹුරු කාසි දෙකක් උඩ දැමූවිට ලැබිය හැකි ප්‍රතිඵල

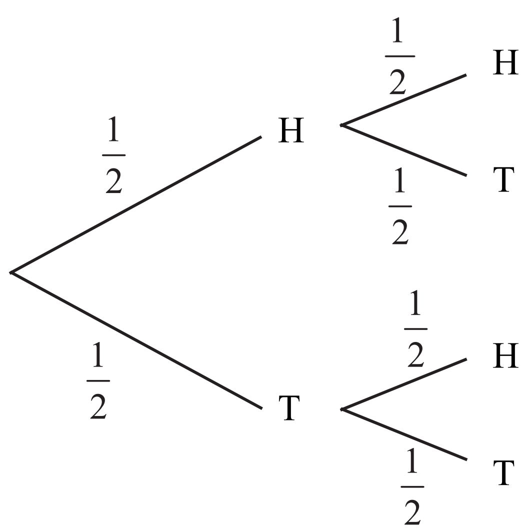
(i) රුක් සටහන් මගින් පෙන්වන්න.

(ii) කාසි දෙකෙහි ම සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න

(iii) එකකවත් සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

සිරස ලැබීම H ලෙස ද අගය ලැබීම T ලෙස ද යෙදූ විට.

රුපියල් දෙකේ කාසිය | රුපියලේ කාසිය | ප්‍රතිඵලය | සම්භාවිතාව



$(H,H) \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$(H,T) \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$(T,H) \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$(T,T) \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$S = \{ (H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T) \}$

කාසි දෙකෙහි ම සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(H,H)$

$$P(H,H) = P(H)\times P(H) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(රුපියලේ කාසියේ සිරස ලැබීම හා රුපියල් දෙකේ කාසියේ සිරස ලැබීම ස්වායත්ත සිද්ධීන් වේ.)

[සටහන : රුක් සටහනේ අතු උඩ ඊට අදාළ සම්භාවිතාව ලියා ඇත.]

එක් කාසියකවත් සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(H,H) + P(H,T) + P(T,H)$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

නමුත් ඉහත නිදසුනේ

$$S = \{ (H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T) \}$$

$P(S)=1$ නිසා,

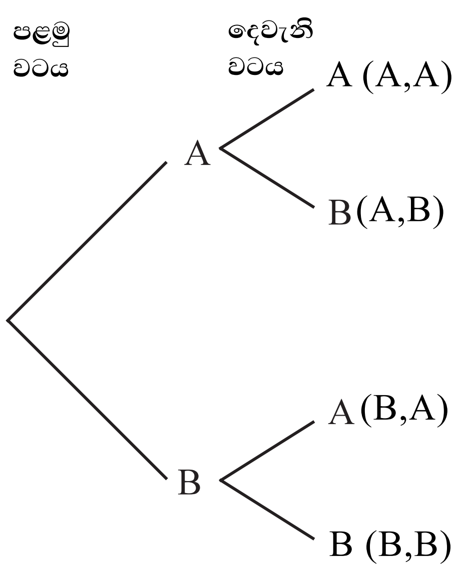
(iii) එක් කාසියකවත් සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= 1 - P(T,T) = 1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

ලෙස ද ගණනය කළ හැකි ය.

නිදසුන 11.

A හා B නම් පුද්ගලයන් දෙදෙනා ටෙනිස් තරගයකට සහභාගී වීමට නියමිත ය. එක ළඟ පිහිටි තරග වාර දෙකක දි දිනන තැනැත්තා ජයග්‍රාහකයාවේ. නියැදි අවකාශය රුක් සටහනකින් ලියා දක්වන්න.



නියැදි අවකාශය මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

$$S=\{ (A,A) , (A,B) , (B,A) , (B,B) \}$$

$$n(S)= 4$$

ඉහත නිදසුන් දෙක මගින් පැහැදිලි කළ අයුරු නියැදි අවකාශය ඉහත ආකාරය සටහන මගින් ඉදිරිපත් කළ හැක. මෙවැනි සටහනකට **රුක් සටහනක්** යයි කියනු ලැබේ. පියවර එකකට වැඩි ප්‍රමාණයකින් සිදුකරන සසම්භාවී පරීක්ෂා සඳහා අදාල නියැදි අවකාශය සොයා ගැනීමේ දී රුක් සටහන ඉතා වැදගත් වේ. තවද එවැනි සසම්භාවී පරික්ෂාවක වූ සිද්ධියක සම්භාවිතාව සොයා ගැනීමද රුක් සටහන භාවිතයෙන් ඉතා පහසුවෙන් කළ හැක.

සටහන

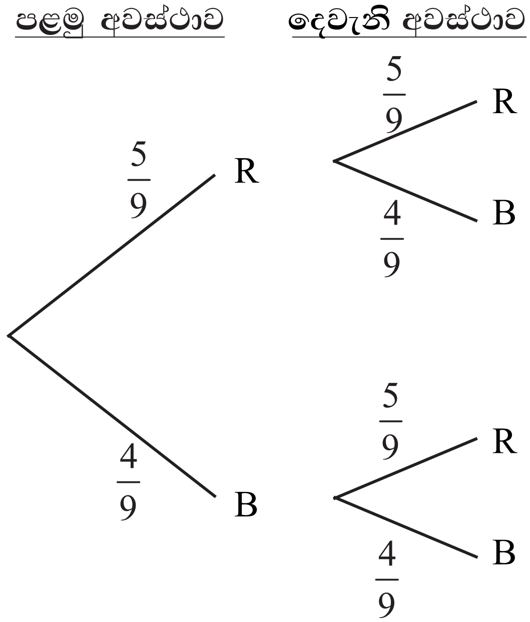
- නොනැඹුරු කාසි දෙකක් එකවර උඩ දැමීමේ දී උඩට හැරෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කිරීමත්
- නොනැඹුරු කාසි දෙකක එකක් උඩ දමා අනතුරුව අනික දැමීමේ දී උඩට හැරෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කිරීමත්
- එක කාසියක් දෙවරක් උඩ දමා උඩට හැරෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කිරීමත් එකම නියැදි අවකාශයක් ලැබිය හැකි පරීක්ෂණ වේ.

25.8 ප්‍රතිස්ථාපන සහිත අවස්ථා

නිදසුන 12.

බෑගයක හැඩයෙන් හා ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ රතුපාට බෝල 5 ක් හා නිල්පාට බෝල 4 ක් තිබේ. බෑගයෙන් අහඹු ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි පාට සටහන් කර ගෙන එය බෑගයට දමා දෙවැනි වරටත් බෝලයක් අහඹු ලෙස ඉවතට ගනු ලැබේ. රුක් සටහනක් මගින් පහත සඳහන් සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන්න

1. බෝල දෙක ම රතුපාට බෝල වීම.
2. බෝල දෙක ම නිල් පාට බෝල වීම.
3. එකක් නිල් පාට බෝලයක් ද අනික රතුපාට බෝලයක් ද වීම.
4. යටත් පිරිසෙයින් එකක්වත් රතු පාට බෝලයක් වීම.
5. පළමු ව ගත් බෝලය රතු පාට බෝලයක් වීම.



ප්‍රතිඵල	සම්භාවිතාව
(R,R)	$\frac{25}{81}$
(R,B)	$\frac{20}{81}$
(B,R)	$\frac{20}{81}$
(B,B)	$\frac{16}{81}$

(i) $P(R,R) = \frac{25}{81}$

(ii) $P(B,B) = \frac{16}{81}$

(iii) $P(R,B) + P(B,R) = \frac{20}{81} + \frac{20}{81} = \frac{40}{81}$

(iv) $P(R,R) + P(B,R) + P(R,B) = \frac{25}{81} + \frac{20}{81} + \frac{20}{81} = \frac{65}{81}$

හෝ

$$1 - P(B,B) = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

(v) $P(R,R) + P(R,B) = \frac{25}{81} + \frac{20}{81} = \frac{45}{81} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$

25.3 අභ්‍යාසය

(1) බෑගයක එකම ප්‍රමාණයේ වීදුරු බෝල 5 ක් තිබේ. එහි 4ක් කොළ පාටය. අනික කහ පාටය. බෝලයක් බෑගයෙන් ගෙන එහි පැහැය සටහන් කර නැවත බෑගයටම දමා නැවතත් බෝලයක් අහඹු ලෙස ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) මෙම පරීක්ෂණයට අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක් මගින් පෙන්වන්න.

(ii) පහත සඳහන් එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(a) බෝල දෙක ම කොළ පාට බෝල වීම
(b) බෝල දෙක ම කහ පාට බෝල වීම
(c) බෝල දෙක ම එක ම පාට බෝල වීම

(2) ඉලක්කයට වෙඩි තබන තරගයක දී කෙනෙකුගේ සාර්ථක ව ඉලක්කයට වෙඩි තැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{4}{7}$ වේ.

ඔහු දෙවතාවක් ඉලක්කයට වෙඩි තැබුවේ ය.

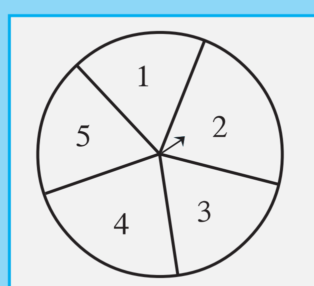
(i) නියැදි අවකාශය දක්වන්න.
(ii) පහත සඳහන් සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන්න.

(a) දෙවතාවක් ම සාර්ථක වීම.
(b) දෙවතාවක් ම අසාර්ථක වීම.
(c) යටත් පිරිසෙයින් එක් වතාවක්වත් සාර්ථක වීම.
(d) එක් වතාවක් පමණක් සාර්ථක වීම.

(3) විදුලි බල්බ නිෂ්පාදනය කරන ආයතනයක් බල්බයක ජීව කාලය පැය 1000 ට අඩු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{100}$ යැයි ප්‍රකාශ කරයි. පාරිභෝගිකයෙකු ගත් විදුලි බල්බ දෙකක ජීව කාලය දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න.

(i) විදුලි බල්බ දෙක ම පැය 1000 ට කලින් දැවීයාමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(ii) විදුලි බල්බ දෙක ම පැය 1000 ට වැඩි කාලයක් නො දැවී පැවතීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(iii) අඩුම තරමින් එක බල්බයක්වත් පැය 1000 ට වැඩි කාලයක් නො දැවී පැවතීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(4)



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වෘත්තාකාර තහඩු කැබැල්ලක් සමාන වෘත්ත ඛණ්ඩ 5 කට බෙදා 1 සිට 5 දක්වා අංකනය කොට ඇත. ඊ හිසක් භ්‍රමණය වන සේ තහඩුවේ හරි මැදට සවිකොට ඇත. ඊහිස කරකවා නිදහසේ නැවතීමට සැලැස්වූ විට එය නවතින්නේ ඔත්තේ සංඛ්‍යාවකින් දැක්වෙන කොටසක් මත ද , නැත හොත් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවකින් දැක්වෙන කොටසක් මත ද යන්න සටහන් කරනු ලැබේ. මෙසේ දෙවරක් කැරකවීමෙන් ලැබෙන ප්‍රතිඵල පෙන්වීමට

(i) රුක් සටහනක් අඳින්න.

(ii) වාර දෙකෙහි ම ඔත්තේ සංඛ්‍යාවකින් දැක්වෙන කොටසක් මත නැවතීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) පළමු වාරයේ ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවකින් දැක්වෙන කොටසක් මත නැවතීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(5) 11 ශ්‍රේණියේ සිසුන් 35 දෙනෙක් චිත්‍ර , සංගීත යන විෂයයන් දෙකින් එකක් තෝරා ගැනීම පිළිබඳ ව සංඛ්‍යාත්මක තොරතුරු පහත දැක්වේ

	චිත්‍ර	සංගීත
පිරිමි	3	12
ගැහැනු	7	13

(i) නියැදි අවකාශය දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න.

(ii) මෙම පන්තියෙන් ශිෂ්‍යයකු අහඹුලෙස තේරුවේ නම් එම ශිෂ්‍යයා

(a) පිරිමි ළමයකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) චිත්‍ර විෂයය තෝරා ගත් පිරිමි ළමයකු වීමේ සම්භාවිතාව

(c) සංගීතය තෝරා ගත් ගැහැනු ළමයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න

25.9 ප්‍රතිස්ථාපන රහිත අවස්ථාව

නිදසුන 13.

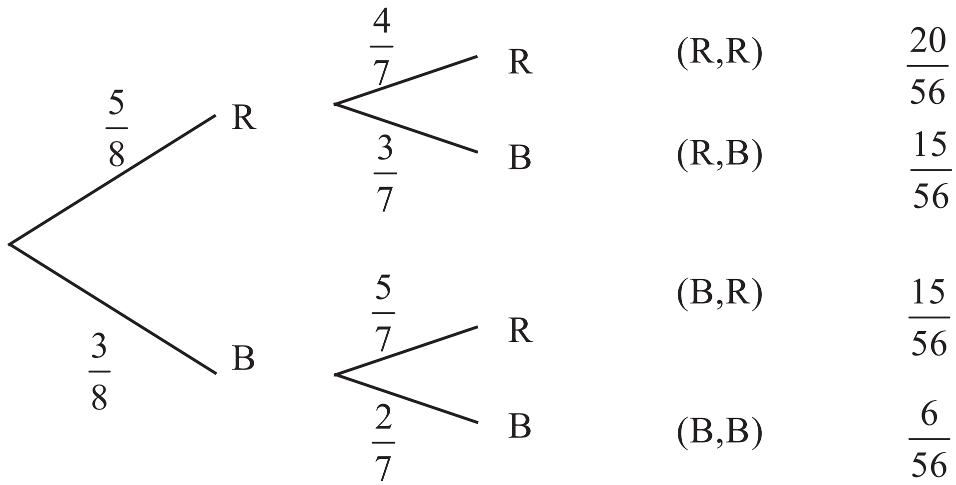
බෑගයක තිබෙන එක ම හැඩය හා එක ම ප්‍රමාණයේ බෝලවලින් 5ක් රතු පාට බෝල විය. ඉතුරු තුන නිල්පාට බෝල විය. අහඹු ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන ආපසු නො දමා තවත් බෝලයක් අහඹු ලෙස ඉවතට ගන්නා ලදී

නියැදි අවකාශය දැක්වෙන රුක් සටහනක් ඇඳ

(i) බෝල දෙක ම රතු පාට බෝල වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න

(ii) එක බෝලයක් පමණක් රතුපාට බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

පළමු ගැනීම   දෙවැනි ගැනීම   ප්‍රතිඵල   සම්භාවිතාව



(i) $P(R,R) = \frac{20}{56}$

(ii) $P(R,B) + P(B,R) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

25.4 අභ්‍යාසය

(1) පෙට්ටියක ඇති එක ම වර්ගයේ පැන්වලින් 6ක් කළු පාට පැන් ද ඉතිරි තුන රතු පාට පැන් ද වේ. පැන් දෙකක් එකකට පසු එකක් ඉවතට ගනු ලැබේ. ඉවතට ගත් පැන් අපසු දැමුවේ නැත.
නියැදි අවකාශය දැක්වෙන රුක් සටහන අඳින්න.
  i පැන් දෙක ම කළු පාට පැන් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න
  ii පැන් දෙක ම රතු පාට පැන් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
  iii එක් පැනක් රතුපාට පැනක් වී අනෙක කළු පාට පැනක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(2) කඩදාසි බෑගයක් තුළ හැඩයෙන් හා ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ බෝල 10ක් ඇත. එහි 6ක් සුදුපාට ය. 3ක් රතුපාට ය. 1ක් කළු පාට ය. බොලයක් ඉවතට ගෙන ආපසු නො දමා තවත් බොලයක් ඉවත ගන්නා ලදී. නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක් මගින් දක්වන්න.
  i ඉවතට ගත් බෝල දෙක ම සුදු පාට බෝල වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
  ii ඉවතට ගත් බෝල දෙක ම රතුපාට බෝල වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
  iii එක් බෝලයක් සුදු පාට බෝලයක් වී අනෙක රතුපාට බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
  iv බෝල දෙක වෙනස් පාට බෝල වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(3) කාර්යාලයක පිරිමි 7 දෙනෙකුත් කාන්තාවෝ 4 දෙනෙකුත් සේවය කරති. එක් දිනක සේවකයෝ දෙදෙනෙක් කෙටි නිවාඩු ලබා කාර්යාලයෙන් නික්ම ගියෝ ය. මෙම සිදු වීමට අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක් මගින් දක්වන්න.

එමගින්

(i) පිටත් ව ගිය දෙදෙනා ම පිරිමින් වීම.

(ii) පිටත් ව ගිය දෙදෙනා ම කාන්තාවන් වීම.

(iii) පිටත් ව ගිය දෙදෙනාගෙන් එක්කෙනෙකු වත් කාන්තාවකු වීම .

යන සම්භාවිතාව සොයන්න

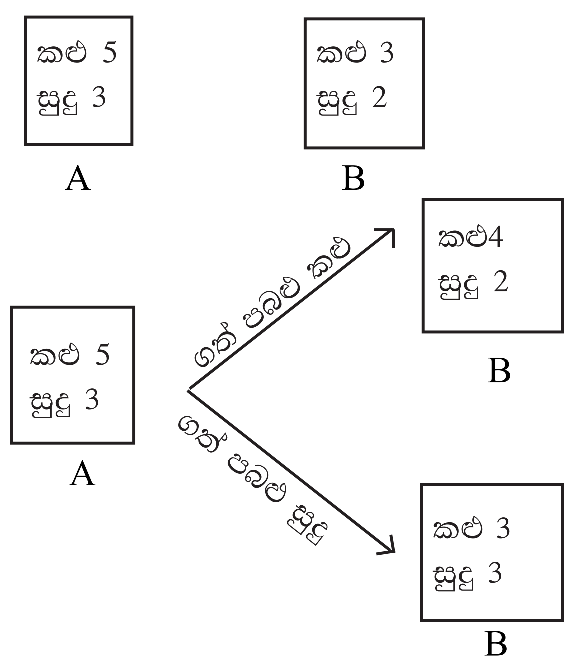
(4) බසයක සියලු ආසනවල මගීහු අසුන් ගෙන සිටියහ. පිරිමි 6 දෙනෙක් හා කාන්තාවක් සිටගෙන සිටිය හ. එක්තරා නැවතුමක අසුන්ගෙන සිටි දෙන්නෙක් බැස ගියෝ ය. සිට ගෙන සිටි මගීන් අතරින් දෙදෙනෙක් එම ආසනවල අසුන් ගත්තෝ ය. අදළ නියැදි අවකාශය රුක්සටහනක් මගින් දක්වන්න.

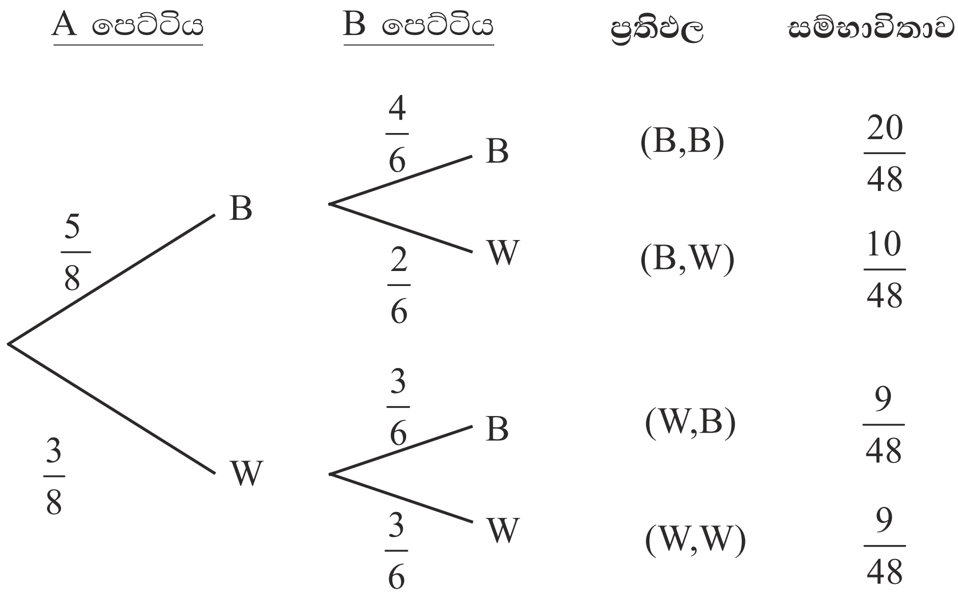
(i) අසුන්ගත් දෙදෙනා ම පිරිමින් වීම.

(ii) එක්කෙනෙකු වත් පිරිමියකු වීම යන සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන්න.

නිදසුන 14.

A නම් පෙට්ටියක සමාන හැඩය හා ප්‍රමාණයෙන් යුත් කළු පාට පබළු 5 ක් හා සුදු පාට පබළු 3 ක් ද B නම් පෙට්ටියක එම හැඩය හා ප්‍රමාණයෙන් යුත් කළු පාට පබළු 3ක් හා සුදු පාට පබළු 2 ක් තිබේ A නම් පෙට්ටියෙන් අහඹු ලෙස පබළුවක් අරගෙන B නම් පෙට්ටියට දමා අනතුරු ව B නම් පෙට්ටියෙන් අහඹු ලෙස පබළුවක් ගන්නා ලදී. මෙම පරීක්ෂණයට අදළ රුක් සටහනක් ඇඳ එය මගින් B පෙට්ටියෙන් ගන්නා පබළුව කළු පබළුවක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.





B පෙට්ටියෙන් කළු පබළුවක් ගැනීමේ සම්භාවිතාව

$$P\,(B,B) + P\,(W,B) = \frac{20}{48} + \frac{9}{48} = \frac{29}{48}$$

25.5 අභ්‍යාසය

(1) නිල් පාට පෙට්ටියක් තුළ කළු පබලු 5ක් හා සුදු පබළු 3ක් ඇත. කහ පාට පෙට්ටියක් තුළ කළු පබලු 2 ක් හා සුදු පබලු 3 ක් ඇත. පබළු සමාන ඒවා වේ. නිල් පාට පෙට්ටියෙන් පබළුවක් ගෙන පාට සටහන් කර ගෙන කහ පාට පෙට්ටිය තුළට දමනු ලැබේ. අනතුරු ව කහ පාට පෙට්ටියෙන් පබලුවක් ගන්නා ලදී. මෙම තොරතුරුවලට අදාළ නියැදි අවකාශය පෙන්වීමට රුක් සටහනක් අඳින්න.
එමගින්

(i) ගත් පබළු දෙක ම කළු පාට පබළු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(ii) කහ පාට පෙට්ටියෙන් ගත් පබළුව කහ පාට පබළුවක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(2) පෙට්ටියක රතු පාට පෑන් 5 ක් හා නිල් පාට පෑන් 2 ක් ඇත. තවත් පෙට්ටියක එම වර්ගයේ ම නිල් පාට පෑන් 2 ක් ඇත. පළමු පෙට්ටියෙන් පෑනක් අහඹු ලෙස ඉවතට ගෙන දෙවැනි පෙට්ටිය තුළට දමන ලදී. අනතුරු ව දෙවැනි පෙට්ටියෙන් අහඹු ලෙස පෑනක් ගන්නා ලදී. මෙම සිද්ධියට අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක් මගින් දක්වන්න. එමගින්

(i) ගත් පෑන් දෙක ම නිල් පාට පෑන් වීමේ
(ii) දෙවැනි පෙට්ටියෙන් ගත් පෑන රතු පෑනක් වීමේ

යන සිද්ධිවල සම්භාවිතාව සොයන්න.

(3) A ගොවිපොළෙහි සිටින සතුන් අතරෙන් 6 දෙනෙක් පිරිමි සතුන් වන අතර ඉතිරි 5 දෙනා ගැහැනු සත්තු වෙති. B ගොවිපොළෙහි 7 දෙනෙක් පිරිමි සතුන් වන අතර දෙදෙනෙක් ගැහැනු සත්තු වෙති. A ගොවිපොළෙන් අහඹු ලෙස ගැහැණු සතෙක් තෝරා B ගොවිපොළට යවන ලදී. අනතුරු ව B ගොවිපොළෙන් සතෙක් අහඹු ලෙස තෝරා ගනු ලැබී ය. මෙම සිද්ධියට අදාළ රුක් සටහනක් අඳින්න. B ගොවිපොළෙන් අවසානයට ගන්නා සතා ගැහැනු සතකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

											මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

ලඝුගණක

மடக்கைகள்

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences								
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	.0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	.0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	.0872	85	3	6	9	12	15	17	20	23	26
5	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	.1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.334	.1363	.1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	.1564	81	3	6	9	11	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	.1736	80°	3	6	9	11	14	17	20	23	26
10°	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880	0.1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	.2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	.2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	.2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	.2588	75	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728	0.2756	74	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	.2924	73	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	.3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	.3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	.3420	70	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	.3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	.3907	67	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	.4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	.4226	65	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	.5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	.5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	.5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	.6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	.6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	.6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	.6428	50°	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539	0.6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	.6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	.6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6848	.6905	.6926	.6947	46	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	.7071	45	2	4	6	8	10	12	15	17	19
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	.7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	.7660	40°	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	.8387	.8403	.8418	.8434	.8450	.8465	.8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557	.8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646	.8660	30°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	.8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124	0.9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194	.9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261	.9272	22	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325	.9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387	.9397	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70°	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	.9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	.9563	17	1	2	3	4	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	.9848	10°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	(අන්තරය ඉතා කුඩා බැවින් වගු ගත කිරීම අනවශ්‍යය.)								
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495	.0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670	.0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	.0699	.0729	.0758	.0787	.0816	.0846	.0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.1051	84	3	6	9	12	15	18	21	24	26
6	.1051	.1080	.1110	.1139	.1169	.1198	.1228	83	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	.1228	.1257	.1287	.1317	.1346	.1376	.1405	82	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554	.1584	81	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1733	.1763	80°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10°	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.1944	79	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	.1944	.1974	.2004	.2035	.2065	0.2095	0.2126	78	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2247	.2278	.2309	77	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2462	.2493	76	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	.2493	.2524	.2555	.2586	.2617	.2648	.2679	75	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	.2867	.2899	.2931	.2962	.2994	.3026	.3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217	.3249	72	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411	.3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	.3443	.3476	.3508	.3541	.3574	.3607	.3640	70°	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20°	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006	.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	.5774	60°	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30°	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766	.7813	52	5	9	14	19	23	28	32	37	42
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050	.8098	51	5	10	14	19	24	29	33	38	43
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342	.8391	50°	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40°	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.8693	49	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952	.9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44°	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62
50°	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39	7	14	22	29	36	43	50	58	65
51	.2349	.2423	.2497	.2572	.2647	.2723	.2799	38	8	15	23	30	38	45	53	60	68
52	.2799	.2876	.2954	.3032	.3111	.3190	.3270	37	8	16	24	31	39	47	55	63	71
53	.3270	.3351	.3432	.3514	.3597	.3680	.3764	36	8	16	25	33	41	49	58	66	74
54	.3764	.3848	.3934	.4019	.4106	.4193	.4281	35	9	17	26	35	43	52	60	69	78
55	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.4733	1.4826	34	9	18	27	36	45	54	63	73	82
56	.4826	.4919	.5013	.5108	.5204	.5301	.5399	33	10	19	29	38	48	57	67	76	86
57	.5399	.5497	.5597	.5697	.5798	.5900	.6003	32	10	20	30	40	50	60	71	81	91
58	.6003	.6107	.6212	.6319	.6426	.6534	.6643	31	11	21	32	43	53	64	75	85	96
59	.6643	.6753	.6864	.6977	.7090	.7205	.7321	30°	11	23	34	45	56	68	79	90	102
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1.804	29	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21	2	4	6	9	11	13	15	17	20
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20°	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	23
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	16	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	3.732	15	4	8	12	16	20	24	29	33	37
75	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	4.011	14	5	9	14	19	23	28	33	37	42
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	4.331	13	5	11	16	21	27	32	37	43	48
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	4.705	12	6	12	19	25	31	37	44	50	56
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066	5.145	11	7	15	22	29	37	44	51	59	66
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576	5.671	10°	9	18	26	35	44	53	61	70	79
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197	6.314	9									
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968	7.115	8									
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953	8.144	7	අන්තර ශීඝ්‍රයෙන් වෙනස් වෙයි								
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	9.514	6									
84	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059	11.430	5	வித்தியாசங்கள் விரைந்து மாறுவன								
85	11.43	11.83	12.25	12.71	13.20	13.73	14.30	4									
86	14.30	14.92	15.60	16.35	17.17	18.07	19.08	3	Differences change rapidly								
87	19.08	20.21	21.47	22.90	24.54	26.43	28.64	2									
88	28.64	31.24	34.37	38.19	42.96	49.10	57.29	1									
89	57.29	68.75	85.94	114.59	171.89	343.77	∞	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS