අ. පො. ස. උසස් පෙළ විභාගය, 2010 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය I

පිළිතුරු

එක් එක් ප්‍රශ්නයට ලකුණු 100 බැගින්.

---

1. (a)

$y(p-x)=p+x$ වන විට, $p(y-1)=x(y+1)$

$\therefore \quad x=\dfrac{p(y-1)}{(y+1)}; \qquad y\neq -1$

$f(x)=x^2+px+q=o$ හි x වෙනුවට ඉහත අගය ආදේශ කරමු.

$$f(x)=x^2+px+q=p^2\frac{(y-1)^2}{(y+1)^2}+p^2\frac{(y-1)}{(y+1)}+q=0$$

එවිට, $\quad p^2(y-1)^2+p^2(y^2-1)+q(y+1)^2=0$

$g(y)=p^2(y-1)^2+p^2(y^2-1)+q(y+1)^2=0$ යයි ගනිමු.

එවිට, $g(y)=(2p^2+q)y^2+2(q-p^2)y+q=0$

α සහ β යනු $f(x)=x^2+px+q=o$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වන බැවින් මූල එකතුව සහ මූල ගුණිතය සැලකීමෙන්,

$\alpha+\beta=-p$ සහ $\alpha\beta=q$

$x=\alpha$ යන්න $y=\dfrac{(p+x)}{(p-x)}$ හි ආදේශයෙන්,

$$y=\frac{(p+\alpha)}{(p-\alpha)}$$

$$=\frac{-\alpha-\beta+\alpha}{-\alpha-\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

මෙලෙස $x=\beta$ යන්න $y=\dfrac{(p+x)}{(p-x)}$ හි ආදේශයෙන්,

$$y=\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

එවිට, $y=\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$ යනු $g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූලයකි.

$y=\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ ද, $g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූලයකි.

ඒ අනුව $y=\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ සහ $y=\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$ යනු $g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක වෙයි.

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2-2\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)$$

$g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල එකතුව සහ මූල ගුණිතය සැලකීමෙන්,

$$\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{2(p^2-q)}{(2p^2+q)} \quad \text{සහ}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)=\frac{q}{2p^2+q} \quad \text{වෙයි.}$$

$$\therefore\ \left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\left[\frac{2(p^2-q)}{2p^2+q}\right]^2-2\left(\frac{q}{2p^2+q}\right)$$

$$=\frac{4p^4-8p^2q+4q^2-4p^2q-2q^2}{(2p^2+q)^2}$$

$$=\frac{2q^2-12p^2q+4p^4}{(2p^2+q)^2}$$

තවත් ක්‍රමයක්

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2(2\alpha+\beta)^2+\beta^2(2\beta+\alpha)^2}{(2\beta+\alpha)^2(2\alpha+\beta)^2}$$

$$=\frac{4(\alpha^4+\beta^4)+2\alpha^2\beta^2+4\alpha^3\beta+4\beta^3\alpha}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)^2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)=\frac{\alpha\beta}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}=\frac{q}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}=\frac{q}{2p^2+q}$$

$$\therefore\quad (2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)=2p^2+q$$

$$4(\alpha^4+\beta^4)+2\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=4\left[(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\right]+2\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p^2)-2q=p^2-2q$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\frac{4[(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2]+2\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{(2p^2+q)^2}$$

$$=\frac{4[(p^2-2q)^2-2q^2]+2q^2+4q(p^2-2q)}{(2p^2+q)}$$

$$=\frac{4p^4-\square p^2q+\square q^2-\square q^2+2q^2+4p^2q-\square q^2)}{(2p^2+q)^2}$$

$$=\frac{4p^4-\square 2p^2q+2q^2}{(2p^2+q)^2}$$

(b)

$$(y+ax)(y+bx)(y+cx)=[y^2+(a+b)xy+abx^2](y+cx)$$

$$=[y^2+(a+b)xy+abx^2](y+cx)$$
$$=y^3+(a+b)xy^2+abx^2y+cxy^2+c(a+b)x^2y+abcx^3$$
$$=y^3+(a+b+c)y^2x+(ab+bc+ca)yx^2+abcx^3$$

$(a+b+c)=0$ සහ $(ab+bc+ca)=-3m$ ආදේශයෙන්

$$(y+ax)(y+bx)(y+cx)=y^3+0-3myx^2+abcx^3$$

$y=x^2+m$ ආදේශයෙන්,

$$(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)(x^2+cx+m)$$
$$=(x^2+m)[(x^2+m)^2-3mx^2]+abcx^3$$
$$=(x^2+m)[x^4+2mx^2+m^2-3mx^2]+abcx^3$$
$$=x^6+2mx^4+m^2x^2-3mx^4+mx^4+2m^2x^2+m^3-3m^2x^2+abcx^3$$
$$=x^6+abcx^3+m^3$$

$g(x)=x^6+16x^3+64$ සමීකරණයෙන් සාධක, (x^2-2x+m), (x^2+ax+m) සහ (x^2+bx+m) වන විට,

$g(x)=(x^2-2x+m)(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එනම්, $x^6+16x^3+64 \equiv (x^2-2x+m)(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)$

මුල් කොටස සමග සැසඳීමේ, $m^3=64$ සහ $-2ab=16$ වෙයි.

$\therefore \quad m=4$ සහ $ab=-8$

තවද, $-2+a+b=0$ වන අතර $a+b=2$ වෙයි.

$ab=-8$ සහ $a+b=2$ සමීකරණය විසඳීමෙන් a සහ b සොයමු.

$$a(2-a)=-8 \quad \Rightarrow \quad a^2-2a-8=0$$
$$\Rightarrow \quad (a-4)(a+2)=0$$

$a=4$ හෝ -2

$a=4$ දී $b=-2$ ද, $a=-2$ දී $b=4$ ද වේ

ඉහත a සහ b අගයන් ආදේශයෙන්,

(i) $g(x)=(x^2-2x+4)(x^2+4x+4)(x^2-2x+4)$
$$=(x^2-2x+4)^2(x^2+4x+4)$$
$$=(x^2-2x+4)^2(x+2)^2$$

සියලු x සඳහා $(x^2-2x+4)^2>0$ සහ $(x+2)^2\geq 0$ නිසා,

$g(x)\geq 0$ වේ.

(ii) $g(x)=(x^2-2x+4)^2(x+2)^2=0$ සමීකරණයේ මූල

$x^2-2x+4=0$ සහ $(x+2)^2=0$ සමීකරණ විසඳීමෙන් ලැබේ.

එවිට,

$$x=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i \quad \text{සහ} \quad x=-2 \quad \text{වේ.}$$

---

2. (a)

(i) දී ඇති 1, 2, 4, 5, 6, 8 සහ 9 සංඛ්‍යාංක හතෙන්, පුනරාවර්තනය සහිතව සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි ගණන,

$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

(ii) පුනරාවර්තනය රහිතව සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි ගණන,

$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

(i) අවස්ථාවේදී, එකම සංඛ්‍යාංකයක් තුන්වරක් ද, ඊට වෙනස් සංඛ්‍යාංකයකද ඇතුළත් වන සේ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 7 \times 6 = 42$

ඉහත දැක්වෙන ආකාරයට, සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යාවක් පිළියෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන $= \dfrac{4!}{3!}$

(එනම් සංඛ්‍යාංක හතරෙන් තුනක් සමානවන අවස්ථාව) $= 4$

සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යාවක්, සංඛ්‍යාංක 3 ක් සමානද එකක් වෙනස් ද වනසේ සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන,

$$= 42 \times 4$$
$$= 168$$

එනම් සංඛ්‍යාංකය, හතර වරක් වනසේ සංඛ්‍යා 7 ත් සෑදෙන වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන $= 7$

එවිට සංඛ්‍යාංක හතරෙන්, 3 ක් සමාන වනසේ ද, 4 ක් සමාන වනසේ ද සෑදිය හැකි මුළු සංඛ්‍යා ගණන

$$= 168 + 7$$
$$= 175$$

එකම සංඛ්‍යාංක දෙවතාවකට වඩා වැඩියෙන් නොමැති වනසේ සෑදිය හැකි මුළු සංඛ්‍යා ගණන

$$= 2401 - 175 = 2226$$

තවත් ක්‍රමයක්

එකිනෙකට වෙනස් සංඛ්‍යාංක සහිත සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි මුළු ගණන $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

සංඛ්‍යාංක දෙකක් සමානවද, ඉතිරි සංඛ්‍යාංක දෙක අසමානද වනසේ දී ඇති සංඛ්‍යාවලින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$$= {}^7C_1 \times {}^6C_2 = \frac{7\times 6\times 5}{1\times 2} = 105$$

සංඛ්‍යාංක 4 ක, එවැනි සංඛ්‍යාවක් වෙනස් පිළියෙළ කිරීමේ කළ හැකි ආකාර ගණන $= \dfrac{4!}{2!} = 4\times 3 = 12$

එවිට සංඛ්‍යාංක 4 ක, එවැනි සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි ගණන $= 105 \times 12$

$$= 1260$$

වෙනස් සංඛ්‍යාංක දෙකක් සමාන ඒවා දෙක බැගින් වන සේ ගෙන සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= {}^7C_2 = \dfrac{7\times 6}{1\times 2} = 21$

එවැනි සංඛ්‍යාවක් වෙනස් පිළියෙල කිරීම් කළ හැකි ආකාර ගණන

$$= \frac{4!}{2!\,2!}$$
$$= 6$$

මේ ආකාරයට සකස් කළ හැකි මුළු සංඛ්‍යා ගණන $= 21 \times 6$

$$= 126$$

එකම සංඛ්‍යාංකයක් වාර දෙකකට වඩා නොමැති වනසේ සංඛ්‍යාංක හතරේ වෙනස් සංඛ්‍යා මුළු ගණන $= 840 + 1260 + 126$

$$= 2226$$

(ii) අවස්ථාවේදී, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 සංඛ්‍යාංකවල ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 3 ක් ද, ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක 4 ක් ද ඇත.

එබැවින් ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක දෙකක්ද, ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක දෙකක්ද වනසේ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= {}^3C_2 \times {}^4C_2$

$$= 3\times 6$$
$$= 18$$

ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 2ක් සහ ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක 2ක සංඛ්‍යාවක සංඛ්‍යාංක හතරම එකිනෙකට අසමාන වන බැවින් එවැනි සංඛ්‍යාවක් පිළියෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන $= 4!$

එබැවින් ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 2 ක් සහ ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක දෙකක් සහිතව සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 18 \times 4!$

$$= 432$$

සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යාවක් ඉරට්ටේ වීමට, අවසාන සංඛ්‍යාංකය ඉරට්ට විය යුතුය. එබැවින් අවසාන සංඛ්‍යාව ඉරට්ට වන සේ සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා ගණන $= {}^4C_1$

$$= 4$$

සංඛ්‍යාංක 4 න් දෙකක ඔත්තේ ද, තවත් එකක් ඉරට්ටේ ද වන සේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $= {}^3C_2 \times {}^3C_1$

$$= 9$$

සංඛ්‍යාංක 2 ක් ඔත්තේ ද, එකක් ඉරට්ට ද, අවසාන සංඛ්‍යාංකය ඉරට්ට ද වනසේ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 9 \times 4$

$$= 36$$

මෙම එක් සංඛ්‍යාවක් පිළියෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන $= 3!$

එබැවින් ඔත්තේ සංඛ්‍යා 2 ක් ද, ඉරට්ට සංඛ්‍යා දෙකක් ද ඇති සංඛ්‍යාවක වෙනස් ඉරට්ට සංඛ්‍යා මුළු ගණන $= 36 \times 3!$

$= 216$

(b)

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_rx^r + \ldots\ldots {}^nC_nx^n$$

$$(1+x)^{n-1} = {}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1x + {}^{n-1}C_2x^2 + \ldots\ldots + {}^{n-1}C_rx^r + \ldots\ldots {}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1}$$

$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$ වන බැවින්,

$$\begin{aligned}
&{}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_rx^r + \ldots\ldots {}^nC_nx^n \\
&= (1+x)[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1x + {}^{n-1}C_2x^2 + \ldots\ldots + {}^{n-1}C_rx^r + \ldots\ldots {}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1}] \\
&= {}^{n-1}C_0 + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_0)x + ({}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1)x^2 + \ldots\ldots \\
&\qquad + ({}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1})x^r + \ldots\ldots {}^{n-1}C_{n-1}x^n
\end{aligned}$$

x^r පදයේ සංගුණකය සැසඳීමෙන්,

$${}^nC_r = {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} \quad ; \quad r = 1, 2, \ldots\ldots, n-1$$

${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$ සෙවීම,

$${}^nC_1 = {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_0$$

$${}^nC_2 = {}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1$$

$${}^nC_3 = {}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_2$$

....

$${}^nC_{n-2} = {}^{n-1}C_{n-2} + {}^{n-1}C_{n-3}$$

$${}^nC_{n-1} = {}^{n-1}C_{n-1} + {}^{n-1}C_{n-2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ &{}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n \\
&= 1 - ({}^{n-1}C_1 + 1) + ({}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1) - ({}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_2) + \ldots\ldots \\
&\qquad + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\,{}^{n-1}C_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n \\
&= 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n = 0; \qquad {}^nC_n = 1, \qquad {}^{n-1}C_{n-1} = 1
\end{aligned}$$

සත්‍යාපනය කිරීම

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_rx^r + \ldots\ldots {}^nC_nx^n$$

$x = -1$ යෙදීමෙන්,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \ldots\ldots + (-1)^r\,{}^nC_r + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$$

n ඉරට්ට වන විට ඉහත සම්බන්ධතාව අනුව,

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots\ldots - {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots {}^nC_nx^n$ හි

$x = 1$ ආදේශයෙන්,

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_{n-1} + \ldots\ldots {}^nC_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$(1) + (2)$; $2\,{}^nC_0 + 2\,{}^nC_2 + 2\,{}^nC_4 + \ldots\ldots + 2\,{}^nC_n = 0 + 2^n$

$$\therefore \quad {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^{n-1}$$

---

3. $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 \equiv n^4 - (n-1)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$n = 1$ වන විට,

වම් පැත්ත $= 4(1) - 6(1) + 4(1) - 1 = 1$

දකුණු පැත්ත $= 1^4 - (1-1)^4 = 1$

$\therefore$ වම් පැත්ත $=$ දකුණු පැත්ත

$\therefore n = 1$ වන විට, ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි.

$n = p$ වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට, $4p^3 - 6p^2 + 4p - 1 \equiv p^4 - (p-1)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) හි වම්පැත්තට $n = p+1$ ආදේශ කළ විට,

$$\begin{aligned}
\text{වම්පැත්ත} &= 4(p+1)^3 - 6(p+1)^2 + 4(p+1) - 1 \\
&= 4p^3 + 12p^2 + 12p + 4 - 6p^2 - 12p - 6 + 4p + 4 - 1 \\
&= 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\
&= (p+1)^4 - p^4 \\
&= \text{දකුණු පැත්ත}
\end{aligned}$$

$n = p+1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි.

එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන ක්‍රම මූලධර්ම අනුව n හි ඕනෑම ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$r = 1, 2, \ldots\ldots$ සඳහා $u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1 = r^4 - (r-1)^4$

එවිට, $u_r = r^4$ වෙයි.

$$u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$$

$$r = 1;\quad u_1 - u_0 = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1$$

$$r = 2;\quad u_2 - u_1 = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) - 1$$

$$r = 3;\quad u_3 - u_2 = 4(3)^3 - 6(3)^2 + 4(3) - 1$$

....

$$r = n-1;\quad u_{n-1} - u_{n-2} = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$$

$$r = n;\quad u_n - u_{n-1} = 4(n)^3 - 6(n)^2 + 4(n) - 1$$

$$\therefore u_n - u_0 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots n^2) + 4(1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots n) - n$$

$$\begin{aligned}
n^4 &= 4\left(\sum_{r=1}^{n} r^3\right) - 6\left(\sum_{r=1}^{n} r^2\right) + 4\left(\sum_{r=1}^{n} r\right) - n \\
&= 4\left(\sum_{r=1}^{n} r^3\right) - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} - n \\
&= 4\left(\sum_{r=1}^{n} r^3\right) - n(n+1)(2n+1) + 2n^2 + n
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}\left[n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n^2 - n\right]$$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} r^3 &= \frac{1}{4}\left[n^4 + (n^2 + n)(2n+1) - 2n^2 - n\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n - 2n^2 - n\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + n^2\right] \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
&= \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2
\end{aligned}$$

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \ldots\ldots$ ශ්‍රේණියේ,

r වන පදය $v_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + r^2$

$$= \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

$$= \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[n(n+1)+(2n+1)+1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[n^2+3n+2\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+1)}{12}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} v_r = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \to \infty$$

v_r පදය r වන පදය වන ශ්‍රේණියේ අනන්තයට ඓක්‍යය අපරිමිත වන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවේ.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \ldots\ldots$$ ශ්‍රේණියේ

r වන පදය $w_r = \dfrac{(2r+1)}{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots..+r^2}$

$$= \frac{(2r+1)}{\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}}$$

$$= \frac{6(2r+1)}{r(r+1)(2r+1)}$$

$$= \frac{6}{r(r+1)}$$

$$= 6\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$$

$$= 6[f(r) - f(r+1)]$$

මෙහි $f(r) = \dfrac{1}{r}$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} w_r = 6\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$$

$$= 6\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 6\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} S_n = \lim_{n\to\infty} 6\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= 6[1-0]$$

$$= 6$$

S_n හි අගය පරිමිත බැවින් මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරීවෙයි.

---

4. (a) $z = x + iy$ යයි ගනිමු.

එවිට $z + a = (x+a) + iy$ සහ $z - a = (x-a) + iy$ වෙයි.

$|z+a| = |z-a|$ වන විට

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$(x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$4ax = 0$$

$$\therefore x = 0$$

එවිට $z = iy$ වෙයි.

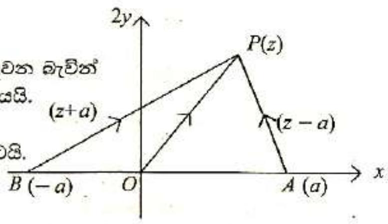
එවිට z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය ආර්ගන් තලයේ අතාත්වික අක්ෂය යයි.

තවත් ක්‍රමයක් (ජ්‍යාමිතික ක්‍රමය)

$|z+a| = |z-a|$ වන විට

$BP = AP$

APB ත්‍රිකෝණය සමද්විපාදවන බැවින් OP යනු ලම්බ සමච්ඡේදකයයි. එවිට, P ලක්ෂයට iy අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි.



$|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$ වන විට $\left|\dfrac{z_1}{z_2} - 2\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2} + 2\right|$

(a) කොටස අනුව $\dfrac{z_1}{z_2}$ ලක්ෂ්‍යය අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි.

එවිට $i\dfrac{z_1}{z_2}$ ලක්ෂ්‍යය තාත්විකඅක්ෂය මත පිහිටයි.

k තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට $i\dfrac{z_1}{z_2} = k$ ආකාරය ලිවිය හැකිය.

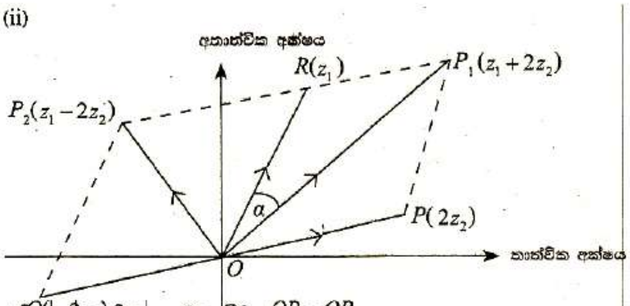
(i) $\dfrac{z_1}{z_2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටන බැවින්

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

වෙයි. $\dfrac{\pi}{2}$ හි ධන අගය අතාත්වික අක්ෂයේ ධන පැත්තේ ද ඍණ අගය අතාත්වික අක්ෂයේ ඍණ පැත්තේ ද පිහිටයි.

එවිට, $\left|\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right| = |\arg z_1 - \arg z_2| = \dfrac{\pi}{2}$

(ii)



$|z_1+2z_2| = |z_1-2z_2|$ වන විට $OP_1 = OP_2$

OP_1P_2 ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද වන අතර $OP = |2z_2| = OQ$ නිසා

$RP_2 = RP_1$ වෙයි. එවිට OR යනු P_1P_2 හි ලම්බ සමච්ඡේදකයයි.

එවිට, $O\hat{R}P_1 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\tan\alpha = \frac{RP_1}{OR} = \frac{OP}{OR} = \frac{|2z_2|}{|z_1|} = \frac{2}{|k|} \quad \left(i\frac{z_1}{z_2} = k \text{ නිසා}\right)$$

OP_1 සහ OP_2 ලම්බ නොවේ නම් $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$ සහ $\tan\alpha \neq \tan\dfrac{\pi}{4} (\neq 1)$

$$\therefore \frac{2}{|k|} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad |k| \neq 2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2.\dfrac{2}{|k|}}{1-\dfrac{2}{k^2}} = \frac{4|k|}{k^2-4}$$

$$\therefore \quad P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$$

තවත් ක්‍රමයක්

$$P_1\hat{O}P_2 = |\arg(z_1-2z_2) - \arg(z_1+2z_2)|$$

$$= \left|\arg\frac{z_1-2z_2}{z_1+2z_2}\right|$$

$z_1 = -ikz_2$ නිසා

$$P_1\hat{O}P_2 = \left|\arg\frac{-ikz_2-2z_2}{-ikz_2+2z_2}\right| = \left|\arg\frac{-ik-2}{-ik+2}\right|$$

$$= \left|\arg\frac{-(2+ik)(2+ik)}{(2-ik)(2+ik)}\right|$$

$$= \left|\arg\frac{(k^2-4)-4ik}{4+k^2}\right|$$

$$\therefore \quad P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$$

OP_1 සහ OP_2 ලම්බ වේ නම් $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$\tan\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{2}{|k|}$ නිසා $|k| = 2, \qquad \therefore k = \pm 2$

---

5. (a) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2} + \lim_{x\to 0} 3.\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= \lim_{2x\to 0} 8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + \lim_{3x\to 0} 3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 8\left(\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + 3\left(\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 8\times 1 + 3\times 1$$

$$= 11$$

මෙහි $\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$ සහ $\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$

(b)(i) $\quad y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ සහ $z = \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)^2} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2+1+x^2.-2\sqrt{1+x^2}+1} \times \frac{x.\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)} \times \frac{x^2-(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$z = \tan^{-1} x$ නිසා $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2(1+x^2)} \times (1+x^2) = \frac{1}{2}$$

තවත් ක්‍රමයක් [5. (b) (i)]

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ සහ $z = \tan^{-1} x$

$x = \tan z$ ආදේශයෙන්,

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sec z - 1}{\tan z}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos z}{\sin z}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}$$

(b) (ii)

$y = e^{m\sin^{-1}x}$; x විෂයයෙහි අවකලනය කිරීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\sin^{-1}x} \times \frac{d}{dx}(m\sin^{-1}x)$$

$$= e^{m\sin^{-1}x} \times \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = m\,e^{m\sin^{-1}x} = my$$

නැවත x විෂයයෙහි අවකලනය කිරීමෙන්,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{dy}{dx} = m\frac{dy}{dx}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} - m\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} - m^2y = 0 \text{..................................(1)}$$

(1) සමීකරණය නැවත x විෂයයෙහි අවකලනයෙන්,

$$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 2x.\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - m^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x.\frac{d^2y}{dx^2} - (1\square m^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$x = 0$ වන විට $y = 1\square\square$ $\frac{dy}{dx} = m\square$ $\frac{d^3y}{dx^3} = m\,1(\square m^2)$

(c) වෘත්තයේ පරිධිය x යයි දී තිබෙන බැවින් සමචතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $l-x$ ද, පාදයක දිග $\frac{l-x}{4}$ ද වෙයි. තවද වෘත්තයේ අරය $\frac{x}{2\pi}$ වෙයි.

එවිට වෘත්තයේ සහ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵල වල ඓක්‍යය

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{l-x}{4}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2(l-x).(-1)}{16}$$

$$= \frac{x}{2\pi} - \frac{(l-x)}{8} = \frac{4x - \pi l + \pi x}{8\pi} = \frac{(4+\pi)x - \pi l}{8\pi}$$

$\frac{dA}{dx} = 0$ වන විට, $x = \frac{\pi l}{\pi + 4}$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\pi+4}{8\pi}\left[x - \frac{\pi l}{\pi+4}\right]$$

$x < \frac{\pi l}{\pi+4}$ දී $\frac{dA}{dx} < 0$

$x > \frac{\pi l}{\pi+4}$ දී $\frac{dA}{dx} > 0$

එවිට $x = \frac{\pi l}{\pi+4}$ යනු A හි අවම අගයයි.

වෘත්තයේ විෂ්කම්භය $= \frac{x}{\pi} = \frac{l}{\pi+4}$ ද,

සමචතුරස්‍රයේ පාදයක දිග $= \frac{l-x}{4} = \frac{1}{4}\left[l - \frac{\pi l}{\pi+4}\right] = \frac{l}{\pi+4}$ වේ.

එනම් A අවම වන විට, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයත්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක දිගත් සමාන වේ.

---

6. (a) $$\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} \equiv \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

$$2x \equiv (Ax+B)((1+x)^2 + C(1+x^2)(1+x) + D(1+x^2)$$

$x = -1$ දී, $-2 = 2D \Rightarrow D = -1$.......................(1)

x^3 පදයේ සංගුණකය සැසඳීමෙන්;

$A + C = 0$..........................(2)

$x = 0$ දී, $B + C + D = 0$..........................(3)

x^2 පදයේ සංගුණකය සැසඳීමෙන්;

$2A + B + C + D = 0$..........................(4)

(3) සහ (4) න් $B + C + D$ ඉවත් කරමු. එවිට $A = 0$

(2) න්, $C = -A = 0$

(3) න්, $B = -C - D = 0 + 1 = 1$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$= \tan^{-1}x + \frac{1}{1+x} + k$$

---

6. (b)(i) $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ කොටස් වශයෙන් අනුකලනයෙන්,

$$I = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int a.e^{ax}\frac{\sin bx}{b}\,dx$$

$$bI = e^{ax}\sin bx - aJ$$

$$bI + aJ = e^{ax}\sin bx \text{...................................(1)}$$

(ii) $J = \int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \int a.e^{ax}\frac{\cos bx}{b}\,dx$$

$$bJ - aI = -e^{ax}\cos bx$$

$$aI - bJ = e^{ax}\cos bx \text{..................................(2)}$$

$(1)\times b + (2)\times a;$ $I(a^2+b^2) = ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx$

$$I = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$(1)\times a - (2)\times b$ $$J = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)}(a\sin bx - b\cos bx)$$

(c) $x^3t + 1 = 0$, ආදේශ කළ විට, $x^3 = -\frac{1}{t}$ වෙයි.

$x^3t + 1 = 0$, x විෂයයෙන් අවකලනය කළ විට,

$$3x^2t + x^3\frac{dt}{dx} = 0$$

$$3tdx = -xdt \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{3t}$$

$I = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(x^3-1)}$ අනුකලයේ $x = -1$ වන විට $t = 1$ ද, $x = -\frac{1}{2}$ වන

විට $t=8$ ද වේ.

$$I=\int_{1}^{8}\frac{-\frac{dt}{3t}}{\left(-\frac{1}{t}-1\right)}=\frac{1}{3}\int_{1}^{8}\frac{dt}{(t+1)}$$

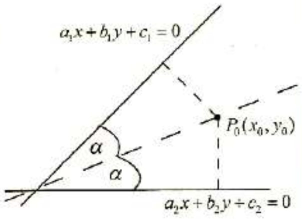
$$=\frac{1}{3}[\ln(t+1)]_{1}^{8}$$

$$=\frac{1}{3}[\ln 9-\ln 2]$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{9}{2}$$

7. (a) $P_0(x_0,y_0)$ යනු දී තිබෙන රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකි.

$P_0(x_0,y_0)$ සිට $a_1x+b_1y+c_1=0$ රේඛාවට



අඳින ලද ලම්බ දුර $=\dfrac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$

$P_0(x_0,y_0)$ සිට $a_2x+b_2y+c_2=0$

රේඛාවට අඳින ලද ලම්බ දුර

$=\dfrac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

$P_0(x_0,y_0)$ ලක්ෂ්‍යය කෝණ සමච්ඡේදකය මත පිහිටන බැවින්,

$$\frac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

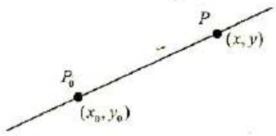
(x_0,y_0) වෙනුවට (x,y) යෙදීමෙන්,

$$\therefore\ \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

යනු රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණය වේ.

7. (b) $P_0P=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=t$ නිසා,



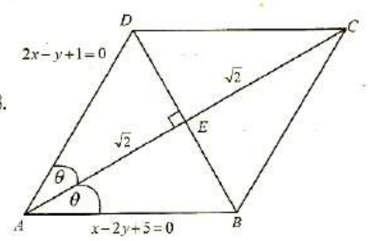
$x-x_0=at$ සහ $y-y_0=bt$ වෙයි.

$\therefore P_0P=\sqrt{a^2t^2+b^2t^2}=\sqrt{(a^2+b^2)t^2}$

$a^2+b^2=1$ යැයි දී තිබේ. එබැවින් $P_0P=|t|$

7. (c) AC කෝණ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය,

$$\frac{2x-y+1}{5}=\pm\frac{x-2y+5}{5}$$



යන සරල රේඛා දෙකින් එකකි.

එනම් $x+y-4=0$ හෝ

$y-x-2=0$ වේ.

තවද $2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ නිසා $\theta<\dfrac{\pi}{4}$

AD සහ $y-x-2=0$ අතර කෝණය සළකමු.

$$\tan\theta=\left|\frac{2-1}{2+1}\right|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$$

$\therefore y-x-2=0$ යනු AD සහ AB අතර සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය වන AC හි සමීකරණයයි.

$2x-y+1=0$

$x-2y+5=0$ සමීකරණ විසඳමු.

$x-2(2x+1)+5=0$

$x=1$ සහ $y=3$

එවිට, $A\equiv(1,3)$

C ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක (x',y') යයි ගනිමු.

(b) කොටස භාවිතයෙන්, $\dfrac{x'-1}{a}=\dfrac{y'-3}{b}=\left|2\sqrt{2}\right|$

AC රේඛාවේ අනුක්‍රමණය සැලකීමෙන්, $\dfrac{a}{b}=1 \quad\Rightarrow\quad a=b$ වන අතර

$a^2+b^2=1$ නිසා $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{x'-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y'-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\pm2\sqrt{2}$$

$x'=1+2=3,\qquad y'=3+2=5,$ හෝ $x'=-1,\ y'=1$

C ලක්ෂ්‍යය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන බැවින් $C\equiv(3,5)$ වෙයි.

BC රේඛාව AD ට සමාන්තර නිසා BC රේඛාවේ සමීකරණය,

$$2x-y=2(3)-5=1$$

CD රේඛාව AB ට සමාන්තර නිසා CD රේඛාවේ සමීකරණය,

$$x-2y=3-2(5)=-7$$

BC සහ CD රේඛාවල සමීකරණ, $2x-y-1=0$ සහ

$x-2y+7=0$ වෙයි.

$DE=AE\tan\theta=\sqrt{2}\,\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$ABCD$ හි වර්ගඵලය $=4$ (ADE හි වර්ගඵලය)

$=4\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$=\dfrac{4}{3}$ වර්ගඒකක

8. (a) වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර දුර d යයි ගනිමු.

එවිට වෘත්තවල අරය $r_1=\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$ සහ $r_2=\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}$

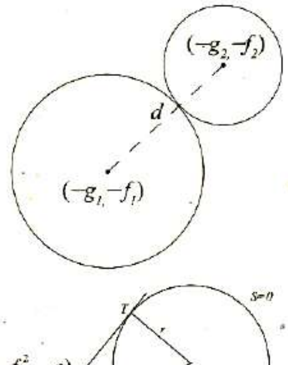
$$d=\sqrt{(g_1-g_2)^2+(f_1-f_2)^2}$$

වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වන විට

$d=r_1+r_2$ වන අතර

අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වන විට

$d=|r_1-r_2|$ ද වෙයි.



P_1T යනු $S=0$ වෘත්තයේ ස්පර්ශකය වන විට

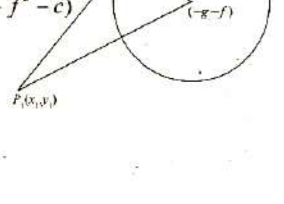
$P_1T^2=P_1C^2-CT^2$

$P_1C^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$

$CT^2=g^2+f^2-c$

$\therefore P_1T^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c)$

$=x_1^2+y_1^2+2gx+2fy+c$



$PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

$S_1 = 0$ හි කේන්ද්‍රය $(-2, 1)$ ද අරය $\sqrt{10}$ ද වන අතර

$S_2 = 0$ හි කේන්ද්‍රය $(4, 3)$ ද අරය $\sqrt{10}$ ද වේ.

$S_1 = 0$ සහ $S_2 = 0$ හි කේන්ද්‍ර පිළිවෙලින් C_1 සහ C_2 වන විට

$$C_1C_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{10}$$

වෘත්ත දෙකෙහි අරයන්ගේ එකතුව $= \sqrt{10} + \sqrt{10}$

$= 2\sqrt{10}$

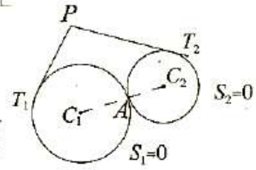
$=$ කේන්ද්‍ර අතර දුර

$\therefore$ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ කරයි.

වෘත්ත දෙකෙහි A ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය, කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

එවිට ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ වෙයි.

එනම් $A \equiv (1, 2)$



$PT_1 = k\,PT_2$ වන සේ $P(x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යයක් ගනිමු.

එවිට $PT_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 - 2y_0 - 5}$

$PT_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 6y_0 + 15}$ වන බැවින්

$x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 - 2y_0 - 5 = \lambda(x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 6y_0 + 15)$

$x_0^2(1-\lambda) + y_0^2(1-\lambda) + 2x_0(2+4\lambda) - 2y_0(1-3\lambda) - 5 - 15\lambda = 0$

P හි පථයේ සමීකරණය

$x^2(1-\lambda) + y^2(1-\lambda) + 2x(2+4\lambda) - 2y(1-3\lambda) - 5 - 15\lambda = 0 \quad (1)$

(i) $\lambda = 1$ නම් පථය $2x_0(6) - 2y_0(-2) - 20 = 0$

$3x_0 + y_0 - 5 = 0$

$A(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය $3x + y - 5 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බැවින් P ලක්ෂයේ පථය A හරහා යයි.

C_1C_2 හි අනුක්‍රමණය $= \frac{3-1}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

AP රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $= -3$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)(-3) = -1$ නිසා AP රේඛාව C_1C_2 ට ලම්බ වෙයි.

(ii) ඉහත (1) සමීකරණයේ වම්පැත්තට A හි ඛණ්ඩාංක ආදේශ කරමු.

වම්පැත්ත $= (1-\lambda) + 4(1-\lambda) + 2(2+4\lambda) - 4(1-3\lambda) - 5 - 15\lambda$

$= 1 - \lambda + 4 - 4\lambda + 4 + 8\lambda - 4 + 12\lambda - 5 - 15\lambda$

$= 0$

$= (1)$ සමීකරණයේ දකුණු පැත්ත

එබැවින් P ලක්ෂයේ පථය A හරහා යන අතර (1) සමීකරණයෙන් නිරූපණය වන්නේ වෘත්තයකි.

$(1-\lambda \neq 0)$

$\therefore$ P හි පථය A හරහා යන වෘත්තයකි.

$\lambda = \frac{1}{2}$, නම් P හි පථයේ සමීකරණය

$$x^2\left(\frac{3}{4}\right) + y^2\left(\frac{3}{4}\right) + 6x - \frac{y}{2} - \frac{35}{4} = 0$$

$$\Rightarrow\ 3x^2 + 3y^2 + 24x - 2y - 35 = 0$$

මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $C_3\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ ද අරය $r_3 = \sqrt{16 + \frac{1}{9} + \frac{35}{3}}$

$r_3 = \sqrt{\frac{250}{9}}$

$C_2(4, 3)$, $C_3\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ නිසා $\quad r_3 = \frac{5\sqrt{10}}{3}$

$$C_2C_3 = \sqrt{8^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$$

$$r_2 + r_3 = \sqrt{10} + \frac{5\sqrt{10}}{3} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$$

$\therefore C_2C_3 = r_2 + r_3$ නිසා $S_2 = 0$ වෘත්තය සහ P හි පථය බාහිරව ස්පර්ශ කරයි.

$C_1 \equiv (-2, 1)$ සහ $C_3\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ නිසා

$$C_1C_3 = \sqrt{2^2 + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$r_3 - r_1 = \frac{5\sqrt{10}}{3} - \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ නිසා

$\therefore C_1C_3 = r_3 - r_1$ වෙයි.

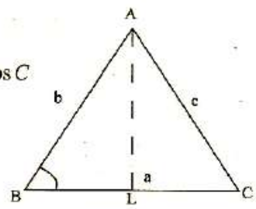
එබැවින් P පථය $S_1 = 0$ වෘත්තය අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි.

---

9. (a) කෝසයින් නීතිය $\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

සාධනය:

ABC ත්‍රිකෝණය සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සලකමු.



$AB^2 = AL^2 + LB^2$

$= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$

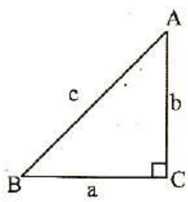
$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\therefore\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

ABC ත්‍රිකෝණය සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණක් වන අවස්ථාව සලකමු.

$C = \frac{\pi}{2}$, යැයි සලකමු.



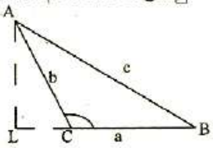
$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= b^2 + a^2$

$\therefore\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{2}$

$C = \frac{\pi}{2}$, වන විට $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

ABC ත්‍රිකෝණය මහා කෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සලකමු.



$$AB^2 = AL^2 + LB^2$$
$$AL = b\sin(\pi - C)$$
$$= -\sin C$$
$$c^2 = [b\sin(\pi - C)]^2 + [a + b\cos(\pi - C)]^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2[\sin^2(\pi - C) + \cos^2(\pi - C)] + 2ab\cos(\pi - C)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(i)

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$
$$\therefore 2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

(ii) $\quad \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c}$ නම්,

$$(a+b+c)(b+c) + (a+c)(a+b+c) = 3(a+c)(b+c)$$
$$ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 + a^2 + ab + ac + ac + bc + c^2 = 3ab + 3bc + 3ca + 3c^2$$
$$ab = -c^2 + a^2 + b^2$$
$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{3}$$

(b)

$$\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right]$$
$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right]$$
$$= 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$R\cos(\theta - \alpha)$ හි $\quad R = 2 \quad$ සහ $\quad \alpha = \dfrac{\pi}{6} \quad$ වේ.

$$\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta = \cos\theta - \sin\theta$$
$$(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)$$
$$(\cos\theta - \sin\theta)\left[\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta - 1\right] = 0$$

$(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \quad$ හෝ $\quad \left[\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta - 1\right] = 0$

$\tan\theta = 1$

සාධාරණ විසඳුම

$\theta = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

$$\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$$
$$2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\theta = \square\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2\square\pi$$
$$= 2\square\pi + \frac{\pi}{6}\square\frac{\pi}{3}$$

මෙහි m යනු ධන නිඛිලයකි

---

9. (c) $x > 0$ යයි ගනිමු. $\cos^{-1}x = \theta$ යයි ගනිමු.

$0 \le x \le 1$ නිසා $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

එවිට $x = \cos\theta$

$-x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\pi - \theta$ ද, 0 සහ π අතර පවතී.

$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(x)$

$\pi - \theta$ ද, 0 සහ π අතර පවතී.

$x < 0$ යැයි ගනිමු.

$x = -y$ ලෙස ගත් විට y ධන වේ. එවිට

$\cos^{-1}(-y) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(y)$

මෙහි $x = -y$ ආදේශයෙන්,

$\cos^{-1}x = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(-x)$

$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

$x = 0$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $\cos^{-1}x = \cos^{-1}0 = \dfrac{\pi}{2}$ සහ

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}0 = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$

$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

අ. පො. ස. උසස් පෙළ විභාගය, 2010 අගෝස්තු

සංයුක්ත ගණිතය II

පිළිතුරු

එක් එක් ප්‍රශ්නයට ලකුණු 100 බැගින්.

---

1. (a) M ස්කන්ධය වන P අංශුවේ චලිතය් ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ ABC රේඛාවෙන් දැක්වෙයි.

$OA = u, \quad CH = u \quad \tan\theta = g$ වෙයි.

$$\frac{AE}{OB} = \frac{u}{OB} = g$$

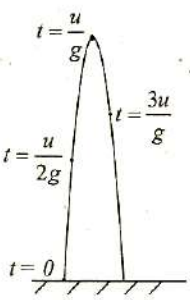
$$OB = \frac{u}{g}$$

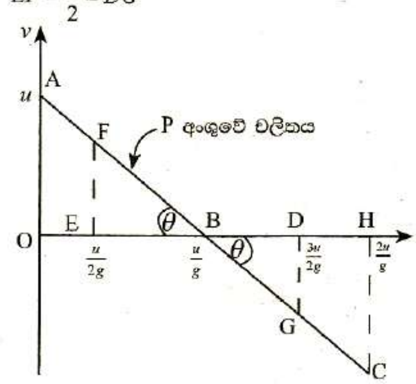
$$OE = \frac{u}{2g} = \frac{1}{2}OB$$

$$\frac{u}{BH} = \tan\theta = g$$

$$BH = \frac{u}{g}$$

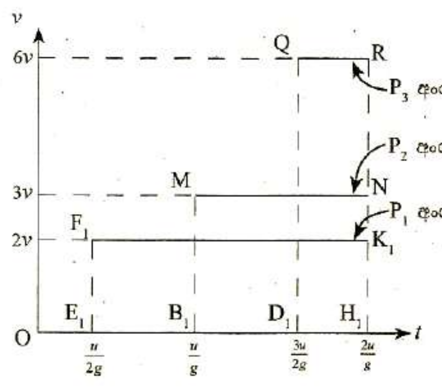
$$EF = \frac{u}{2} = DG$$





P_1, P_2, P_3 අංශුවල සිරස් ප්‍රවේග සංරචකයත් P අංශුවේ සිරස් ප්‍රවේග සංරචකයත් එකම වන බැවින් P අංශුවේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරත් P_1, P_2, P_3 අංශුවල සිරස් ප්‍රවේග ප්‍රස්ථාරයත් එකම වන්නේ අංශු සියල්ලම g ගුරුත්වජ ත්වරණය යටතේ චලිතය වන බැවිනි. එවිට P_1 අංශුවේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය FC ද, P_2 අංශුවේ BC ද, P_3 අංශුවේ GC ද වශයෙන් P අංශුවේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය සමග සමපාත වූ කොටස් ලැබේ.

P_1, P_2, P_3 අංශුවල තිරස් චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය



(i) P, P_1, P_2, P_3 අංශු හතරම $\frac{2u}{g}$ කාලයක දී පොළවට පැමිණෙයි.

(ii) P_1 අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර

$$= E_1H_1K_1F_1 \text{ වර්ගඵලය}$$

$$= 2v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{u}{2g}\right)$$

$$= 2v.\frac{3u}{2g}$$

$$= \frac{3uv}{g}$$

P_2 අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර $= B_1H_1NM$ වර්ගඵලය

$$= 3v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{u}{g}\right)$$

$$= 3v \times \frac{u}{g}$$

$$= \frac{3vu}{g}$$

P_3 අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර $= D_1H_1RQ$ වර්ගඵලය

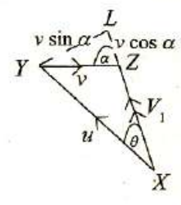
$$= 6v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{3u}{2g}\right)$$

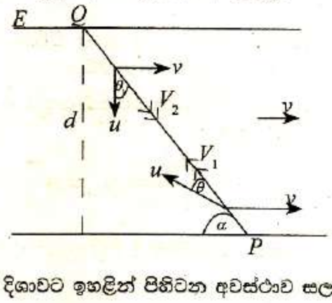
$$= 3v \times \frac{u}{g}$$

$$= \frac{3vu}{g}$$

අංශු සියල්ලම එකම සිරස් රේඛාවේ ගමන් කරන අතර P_1, P_2, P_3 අංශු ගමන් කරන තිරස් දුර ද සමාන වන බැවින් P අංශුව හැර P_1, P_2, P_3 අංශු තුන පොළවේ එකම ස්ථානයකට වැටේ.

(b) M - මිනිසා, R - ගඟ, E - ඉවුර (පොළොව) යයි ගනිමු.

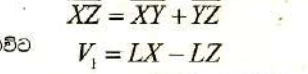




Q ලක්ෂ්‍යය ගඟ ගලන දිශාවට ඉහළින් පිහිටන අවස්ථාව සලකමු.

P සිට Q දක්වා චලිතය

$(M, E) \quad = \quad (M, R) + (R, E)$



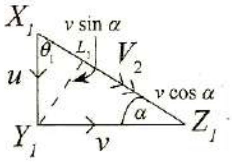
$$\overline{XZ} = \overline{XY} + \overline{YZ}$$

එවිට $\quad V_1 = LX - LZ$

$$V_1 = \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha$$

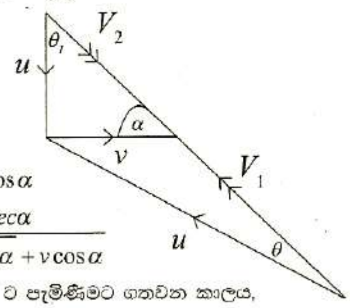
$$t_{PQ} = \frac{d\cos ec\alpha}{V_1} = \frac{d\cos ec\alpha}{\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha}$$

Q සිට P දක්වා චලිතය



$(M, E) \quad = \quad (M, R)+(R, E)$

$\overset{\alpha}{\searrow} V_2 \quad = \quad \overset{\theta_1}{\searrow} u + \longrightarrow v$



$$\overline{X_1Z_1} = \overline{X_1Y_1} + \overline{Y_1Z_1}$$

$$V_2 = L_1X_1 + L_1Z_1$$

$$V_2 = \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} + v\cos\alpha$$

$$t_{QP} = \frac{PQ}{V_2} = \frac{d\,\mathrm{cos}\,ec\alpha}{\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}+v\cos\alpha}$$

P සිට Q දක්වා ගොස් ආපසු P ට පැමිණීමට ගතවන කාලය,

$$= t_{PQ} + t_{QP}$$

$$= \frac{d\,\mathrm{cos}\,ec\alpha}{\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}-v\cos\alpha} + \frac{d\,\mathrm{cos}\,ec\alpha}{\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}+v\cos\alpha}$$

$$= \frac{d\,\mathrm{cos}\,ec\alpha\left[\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}+v\cos\alpha+\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}-v\cos\alpha\right]}{(u^2-v^2\sin^2\alpha)-v^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{d\,\mathrm{cos}\,ec\alpha \;.\; 2\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}}{u^2-v^2}$$

$$T = \frac{2d\sqrt{u^2\,\mathrm{cos}\,ec^2\alpha - v^2}}{u^2-v^2}$$

(i) Q ලක්ෂ්‍යය, ගඟ ගලන දිශාවේ පිහිටයි නම් ඉහත ප්‍රකාශනයේ α වෙනුවට $(\pi-\alpha)$ ආදේශ කළ විට අවශ්‍ය කාලය ලැබේ.

$$T' = \frac{2d\sqrt{u^2\,\mathrm{cos}\,ec^2(\pi-\alpha)-v^2}}{u^2-v^2}$$

$$\therefore T = T' = \frac{2d\sqrt{u^2\,\mathrm{cos}\,ec^2\alpha - v^2}}{u^2-v^2}$$

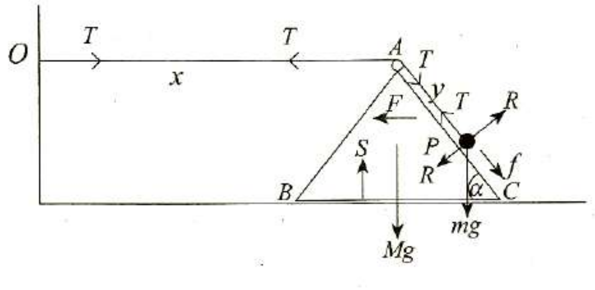
ඒ අනුව Q ලක්ෂ්‍ය ගඟ පහළ පිහිටන විට ද පිහිනීමට ගත වන කාලයේ වෙනසක් සිදු නොවේ.

(ii) T අවම වීමට $\mathrm{cosec}^2\alpha$ අවම විය යුතුය. එනම් $\sin^2\alpha$ උපරිම විය යුතුය. එවිට $\sin^2\alpha = 1$ නිසා,

$$T_{අවම} = \frac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}} \text{ ද, } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ද වේ.}$$

මෙම අවස්ථාවේ දී PQ ඉවුරට ලම්බ වෙයි.

2. $(M, E) = F \longleftarrow$ ද, $(m, M) = \overset{\alpha}{\searrow} f$ යයි දී තිබේ.



සාපේක්ෂ ත්වරණ මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$(m, E) \quad = \quad (m, M) + (M, E)$

$= \quad \overset{\alpha}{\searrow} f + F \longleftarrow$

$= \quad \overleftarrow{F} \quad \overset{\alpha}{\searrow} f$

$OA = x$ සහ $AP = y$ යයි ගනිමු.

එවිට, $l = OA + AP = x + y$

t විෂයෙන් දෙවරක් අවකලනය කිරීමෙන්,

$\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \;,\quad \ddot{x} = -\ddot{y}$

$\ddot{x} = -F$ ද, $\ddot{y} = f$ ද බැවින් $-F = -f \qquad \therefore F = f$

පද්ධතියට, $\leftarrow$; $T = MF + m(F - F\cos\alpha)$..............................(1)

P අංශුවට, $\searrow$; $mg\sin\alpha - T = m(F - F\cos\alpha)$..............................(2)

$(1)+(2)$; $mg\sin\alpha = MF + m(F - F\cos\alpha) + m(F - F\cos\alpha)$

$mg\sin\alpha = F[M + 2m(1-\cos\alpha)]$

$$\therefore F = \frac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$$

තවත් ක්‍රමයක් [$F = f$ බව පෙන්වීමට]

Aට සාපේක්ෂව P අංශුවේ විස්ථාපනයත්, O සාපේක්ෂව Aහි විස්ථාපනයත් විශාලත්වයෙන් සමාන වේ.

එවිට Aට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයත්, Oට සාපේක්ෂව Aහි ත්වරණයත් විශාලත්වයෙන් සමාන වෙයි.

Oට සාපේක්ෂව Aහි ත්වරණය යනු පොළොවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය වන අතර Aට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය යනු කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය වෙයි..

එවිට $F = f$ වේ.

එවිට කුඤ්ඤය $\dfrac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$ ත්වරණයෙන් බිත්තිය දෙසට චලිත වෙයි.

$PC > d$ නම් B හි සිට බිත්තියට ඇති දුර d ට වඩා වැඩි බැවින් කුඤ්ඤය B හිදී බිත්තියේ වදී.

කුඤ්ඤය බිත්තියේ වැදීමට ගත වන කාලය t යැයි ගනිමු.

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ යෙදීමෙන්,}$$

$$d = 0 + \frac{1}{2}Ft^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2d}{F}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2d[M+2m(1-\cos\alpha)]}{mg\sin\alpha}}$$

කුඤ්ඤය බිත්තියේ වදින වේගය u යැයි ගනිමු. $v = u + at$ යෙදීමෙන්,

$$\leftarrow u = 0 + Ft$$

$$= \frac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)} \times \sqrt{\frac{2d[M+2m(1-\cos\alpha)]}{mg\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2dmg\sin\alpha}{[M+2m(1-\cos\alpha)]}}$$

t කාලයේ දී P අංශුවේ කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂ ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

$$v = u + at$$

කුඤ්ඤට සාපේක්ෂව යෙදීමෙන්, $\searrow v = 0 + ft$

$$= Ft$$

$$= \sqrt{\frac{2dmg\ \sin\alpha}{[M + 2m(1-\cos\alpha)]}} = u$$

බිත්තියේ ගැටීමට මොහොතකට පෙර පොළොවට සාපේක්ෂව

P අංශුවේ ප්‍රවේගය $= \overleftarrow{u} \searrow^{\alpha} u$

P ගේ ප්‍රවේගයේ විශාලත්වය $v = \sqrt{u^2 + u^2 + 2u^2\cos(\pi - \alpha)}$

$$= \sqrt{2u^2 - 2u^2\cos\alpha}$$

$$= u\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

$$\therefore v = 2\sqrt{\frac{dmg\ \sin\alpha(1-\cos\alpha)}{[M + 2m(1-\cos\alpha)]}}$$

---

3. P සහ Q අංශු අතර තිරස් දුර d යැයි ගනිමු. P අංශුවේ ආරම්භක සිරස් සහ තිරස් ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙලින් $u\cos\alpha$ සහ $u\sin\alpha$ වෙයි. P සහ Q අංශු ගැටෙන විට P අංශුව තිරස් ලෙස චලිත වන බැවින්, $\uparrow v = u + at$ යෙදීමෙන්,

$$0 = u\sin\alpha - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u\sin\alpha}{g}$$

මෙහි t යනු තිරස් ලෙස d දුරක චලිතවීමට ගතවන කාලයයි.

P අංශුවට $\rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

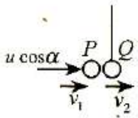
$$d = u\cos\alpha\ .\ t + 0$$

$$= u\cos\alpha . \left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right)$$

$$= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

P සහ Q අංශු ගැටීමට මොහොතකට පෙර තිරස් ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙළින් $u\cos\alpha$, 0 වන අතර ගැටීමෙන් මොහොතකට පසු v_1 සහ v_2 යයි ගනිමු.

රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයෙන්,



$$\rightarrow mv_1 + mv_2 = mu\cos\alpha$$

$$v_1 + v_2 = u\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්,

$$v_1 - v_2 = -eu\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

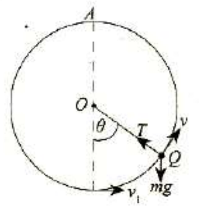
$$(1) + (2), \quad 2v_1 = u\cos\alpha(1-e)$$

$$v_1 = \frac{u}{2}(1-e)\cos\alpha$$

$$(1) - (2), \quad 2v_2 = u\cos\alpha(1+e) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{u}{2}(1+e)\cos\alpha$$

Q අංශුවේ වෘත්තාකාර චලිතයේ දී ශක්ති හානියක් සිදු නොවන බැවින් OQ තන්තුව යටි තිරස θ කෝණයක් ආනත කරන පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය T යයි ද Qගේ ප්‍රවේගය v යයි ද ගනිමු. O හරහා විභව ශක්තිය ශූන්‍ය මට්ටම ගනිමු.

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,



$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgl = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta$$

$$v^2 = v_2^2 - 2gl + 2gl\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$= \frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 2gl\cos\theta$$

Q අංශුවට $F = ma$ යොදමු.

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$T = mg\cos\theta + \frac{m}{l}\left(\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 2gl\cos\theta\right)$$

$$= \frac{m}{l}\left(\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 3gl\cos\theta\right)$$

තන්තුව ඇඳී පවතිමින්, වෘත්තයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි නම් Q අංශුව පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක චලිත වෙයි.

එවිට $\theta = \pi$ සහ $T_\pi \geq 0$ විය යුතුය.

$$T_\pi = \frac{m}{l}\left(\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 3gl\right)$$

$$= \frac{m}{l}\left(\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 5gl\right) \geq 0$$

$$\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha \geq 5gl$$

$$\Rightarrow u^2\cos^2\alpha \geq \frac{20gl}{(1+e)^2}$$

$$\Rightarrow u\cos\alpha \geq \frac{2\sqrt{5gl}}{1+e}$$

P සහ Q ගැටීම නිසා P අංශුවේ සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය වෙනස් නොවන බැවින් $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ සිරස්ව ඉහළට යෙදීමෙන් නැවත P අංශුව පොළොවට පැමිණීමට ගත වන කාලය වන T සොයමු.

$$\uparrow 0 = u\sin\alpha T - \frac{1}{2}gT^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

එබැවින් ගැටුම් මොහොතේ සිට P අංශුව පොළොවට වැටීමට ගත වන කාලය,

$$t' = T - t$$

$$= \frac{2u\sin\alpha}{g} - \frac{u\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{u\sin\alpha}{g}$$

P අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර $= d + v_1 t'$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} + \frac{u}{2}(1-e)\cos\alpha . \frac{u\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} + \frac{u^2(1-e)}{2g}\cos\alpha\sin\alpha$$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} + \frac{u^2}{4g}(1-e)\sin 2\alpha$$

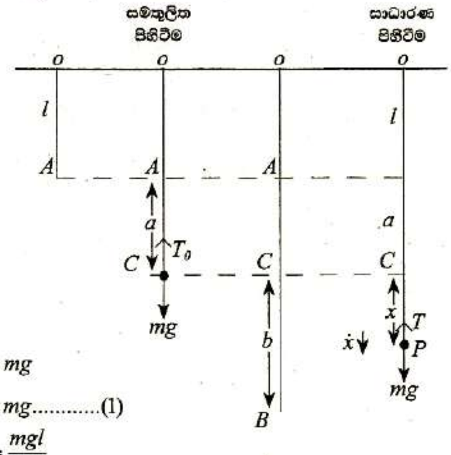
$$= \frac{u^2}{4g}\sin 2\alpha(3-e)$$

e=3 නම්, P අංශුව ගමන් කරන දුර ශූන්‍ය වන බැවින් අරම්භක ලක්ෂ්‍යයට

පැමිණෙයි.

---

4. අංශුවේ සමතුලිත පිහිටීම C යයි ගනිමු.
එවිට තන්තුවේ ආතතිය T_0 නම්,



$$T_0 = mg$$
$$\frac{\lambda}{l}a = mg \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\Rightarrow a = \frac{mgl}{\lambda}$$

තන්තුවේ දිග $l+a+x$ වන විට අංශුවේ ත්වරණය සිරස් ලෙස පහළට $\ddot{x}$ වෙයි. එවිට තන්තුවේ ආතතිය T නම් $F=ma$ යෙදීමෙන්,

$$\downarrow mg - \frac{\lambda}{l}(a+x) = m\ddot{x}$$
$$mg - \frac{\lambda}{l}a - \frac{\lambda}{l}x = m\ddot{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1)න් සහ (2)න් $\Rightarrow -\dfrac{\lambda}{l}x = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{\lambda}{ml}\right)x$$

(1)න් $\dfrac{\lambda}{ml} = \dfrac{g}{a}$ වන බැවින්, $\ddot{x} = -\left(\dfrac{g}{a}\right)x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$; මෙහි $-a \le x \le b$ වන සේ තන්තුව ඇදී පවතින විට P අංශුව සරල අනුවර්තීව චලිත වන අතර චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x=0$ වන C ලක්ෂ්‍යයයි.

(3) හි විසඳුම $x = A\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t + B\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$ යයි උපකල්පනය කළ විට,

$t=0$ දී $x=b$ වන නිසා, $b = A(1)+B(0) \Rightarrow A=b$

t වි. අ. කි, $\dot{x} = -A\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}t + B\sqrt{\dfrac{g}{a}}\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$

$t=0$ දී $\dot{x}=0$ වන නිසා,

$0 = A(0)+B(1) \Rightarrow B=0$ දී

$$\therefore x = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

තන්තුව හැකිලෙන තෙක් අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයක යෙදේ. තන්තුව හැකිලෙන විට $t=t_0$ සහ $x=-a$ වෙයි.

එවිට, $-a = b\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t_0$

$$-\frac{a}{b} = \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$
$$\alpha = \sin^{-1}\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\therefore\quad -\sin\alpha = \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0 \qquad \therefore\quad \sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0 = \frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$\Rightarrow\quad t_0 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් P ඉවත් වන විට $t=t_0$ සහ $\dot{x}=-v$ යයි ගනිමු. මෙහිදී P අංශුව උඩු අතට චලිත වෙයි.

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$
$$-v = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$
$$v = b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$
$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0}$$
$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$$
$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$
$$= \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{b^2-a^2}$$
$$= \sqrt{\frac{g}{a}\square b^2 - a^2\ \square}$$

තන්තුව හැකිලීමෙන් පසු P අංශුව v ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ලෙස ඉහළට චලිත වෙයි. අංශුව ඉහළ නගින උපරිම උස h යයි ගනිමු. එවිට, $\square v^2 = \square^2 + 2a\square$ යෙදීමෙන්,

$$0 = v^2 - 2g\square \Rightarrow \square = \frac{v^2}{2g}$$
$$\square = \frac{g}{a}\frac{\square b^2 - a^2}{2g} \square \frac{\square b^2 - a^2\square}{2a}$$

$\square\square$ l නම් P අංශුව සීලිමේ වදියි.

එනම්, $\dfrac{\square b^2 - a^2}{2a}\square\square$

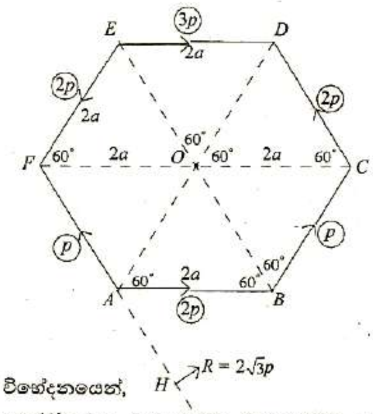
$$b^2 \square a^2 + 2a\square$$
$$b^2 \square a^2 + 2a\square\frac{\square a}{\square g}$$
$$b^2 \square a^2 + \frac{2a^2\square}{\square g}$$
$$b^2 \square a^2\left(1+\frac{2\square}{\square g}\right)$$
$$b \square a\sqrt{1+\frac{2\square}{\square g}}$$

අංශුව සීලිමේ වදින ප්‍රවේගය v_1 නම්

$$v_1^2 = v^2 - 2g\square$$
$$v_1^2 = \frac{g}{a}\square b^2 - a^2\ \square 2g\left(\frac{\square a}{\square g}\right)$$
$$= \frac{g}{a}\square b^2 - a^2 - \frac{2\square a^2}{\square a}\square$$
$$= \frac{g}{a}\square b^2 - \left(1+\frac{2\square}{\square a}\right)a^2\square$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{a}\square b^2 - \left(1+\frac{2\square}{\square a}\right)a^2\square}$$

$v_1 \square 0$ වීමට $b \square a\sqrt{1+\frac{2\square}{\square a}}$ විය යුතුය.

5. (a)



බල පද්ධතිය තිරස් විභේදනයෙන්,

$$\rightarrow X = 2p + p\cos 60^\circ + 3p - 2p\cos 60^\circ - 2p\cos 60^\circ - p\cos 60^\circ$$
$$= 5p - 4p\cos 60^\circ$$
$$= 3p$$

සිරස් විභේදනයෙන්,

$$\uparrow Y = p\sin 60^\circ + 2p\sin 60^\circ - 2p\sin 60^\circ + p\sin 60^\circ$$
$$= 2p\sin 60^\circ$$
$$= \sqrt{3}p$$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය

$$R = \sqrt{X^2+Y^2}$$
$$= \sqrt{(3p)^2 + (\sqrt{3}p)^2}$$
$$= \sqrt{12p^2}$$
$$= 2\sqrt{3}p\ N$$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය AB ට θ කෝණයක් ආනත යයි ගනිමු.

එවිට, $\tan\theta = \dfrac{Y}{X}$

$$= \frac{\sqrt{3}p}{3p}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \tan 30^\circ$$
$$\therefore\ \theta = 30^\circ$$

එවිට, R සම්ප්‍රයුක්ත බලය AC ට සමාන්තරය බල පද්ධතියට A වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$\overset{\curvearrowleft}{A}$ $G = p.2a\sin 60^\circ + 2p.4a\sin 60^\circ - 3p.4a\sin 60^\circ + 2p.2a\sin 60^\circ$

$$= pa\sqrt{3} + 4pa\sqrt{3} - 6pa\sqrt{3} + 2pa\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}pa\ \ Nm$$

එවිට සම්පයුක්ත බලය AC ඔස්සේ $2\sqrt{3}p\ N$ බලයක් වන අතර $\sqrt{3}pa\ Nm$ වාමාවර්ත අතට වූ බල යුග්මයකින්ද සමන්විතය. තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට බල පද්ධතිය තුල්‍ය වන විට, එමගින් FA පාදය H හිදී කපන්නේ යයි ගනිමු.

A වටා සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ඝූර්ණය $= 2\sqrt{3}p\,.\,AH$

A වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය $= \sqrt{3}pa$

A වටා සම්පයුක්ත බලයේ ඝූර්ණය $= A$ වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය

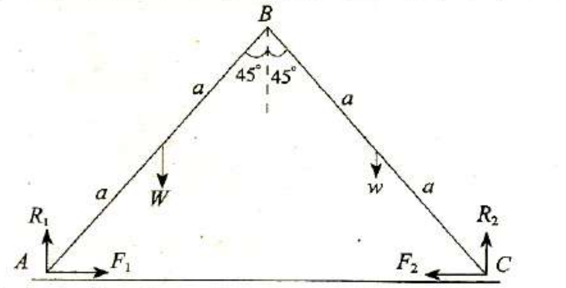
එවිට, $2\sqrt{3}p\,.\,AH = \sqrt{3}pa$

$$AH = -\frac{a}{2}$$

ඒ අනුව $2\sqrt{3}pa$ සම්ප්‍රයුක්ත බලය AC ට සමාන්තරව දික් කරන ලද FA රේඛාව $\dfrac{a}{2}$ දුරකදී කපන H හරහා වැටී ඇත.

H හරහා $\overline{CA}$ දිශාවට $2\sqrt{3}p\ N$ බලයක් බල පද්ධතියට යෙදූ විට, සමතුලිත වේ.

(b)



පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සලකමු.

$\rightarrow$; $F_1 - F_2 = 0$

$$F_1 = F_2 \text{......................(1)}$$

$\uparrow$; $R_1 + R_2 - W - w = 0$

$$R_1 + R_2 = W + w \text{..........(2)}$$

$\overset{\curvearrowleft}{A}$; $R_2.4a\sin 45^\circ - W.a\sin 45^\circ - w3a\sin 45^\circ = 0$

$$R_2 = \frac{W+3w}{4} \text{...........(3)}$$

(2) සහ (3) න් $R_1 = W + w - R_2$

$$= W + w - \frac{W+3w}{4}$$
$$= \frac{3W+w}{4}$$

$$R_1 - R_2 = \frac{3W+w}{4} - \frac{W+3w}{4} = \frac{2W-2w}{4} = \frac{W-w}{2}$$

$W > w$ නිසා $R_1 - R_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 > R_2$ නිසා

$\therefore\ \dfrac{F_1}{R_1} < \dfrac{F_2}{R_2}$ වෙයි.

පද්ධතිය සමතුලිතවීමට $\dfrac{F_2}{R_2} \le \mu$ විය යුතුය. F_2 සෙවීමට BC දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සලකා B වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$\overset{\curvearrowleft}{B}$; $R_2.2a\sin 45^\circ - F_2.2a\sin 45^\circ - w.a\sin 45^\circ = 0$

$$2R_2 - 2F_2 - w = 0$$
$$2F_2 = 2R_2 - w$$
$$= \frac{W+3w}{2} - w$$
$$= \frac{W+w}{2}$$

$$\therefore\ F_2 = \frac{W+w}{4}$$

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{W+w}{4} \Big/ \frac{W+3w}{4} = \frac{W+w}{W+3w}$$

පද්ධතිය සමතුලිතවීමට $\dfrac{F_2}{R_2} \le \mu$. එනම් $\dfrac{W+w}{W+3w} \le \mu$

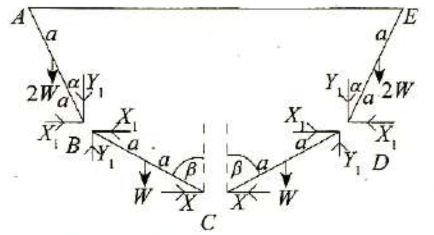
ඒ අනුව පද්ධතිය සමතුලිතවීමට μ ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය $\dfrac{W+w}{W+3w}$ වෙයි.

$\mu = \dfrac{W+w}{W+3w}$ නම්, $\dfrac{F_2}{R_2} = \mu$ වෙයි. එනම්, $\dfrac{F_1}{R_1} < \dfrac{F_2}{R_2} = \mu$

මෙහිදී $\dfrac{F_1}{R_1} < \mu$ ද, $\dfrac{F_2}{R_2} = \mu$ ද නිසා පළමුව ලිස්සන්නේ C හි දී ය.

---

6. (a)



C හරහා වූ සිරස් රේඛාව වටා පද්ධතිය සමමිතික වෙයි. එවිට C හිදී ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් දිශාවට ක්‍රියා කරයි. C හි දී ප්‍රතික්‍රියාව X යැයි ගනිමු.

B සහ D හි දී ප්‍රතික්‍රියා රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට X_1, Y_1 තිරස් සහ සිරස් සංරචක මඟින් ලකුණු කරමු. සමමිතික බව සැලකීමෙන් B සහ D හි දී ප්‍රතික්‍රියා සමාන වෙයි.

BC දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සලකා B වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$$X.2a\cos\beta - W.a\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{W}{2}\tan\beta$$

$$\rightarrow X - X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X = \frac{W}{2}\tan\beta$$

$$\uparrow \quad Y_1 - W = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_1 = W$$

AB දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සලකා A වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$$A, \quad X_1.2a\cos\alpha - Y_1.2a\sin\alpha - 2W.a\sin\alpha = 0$$

$$X_1\cos\alpha - Y_1\sin\alpha = W\sin\alpha$$

$X_1 = \dfrac{W}{2}\tan\beta$ සහ $Y_1 = W$ ආදේශයෙන්,

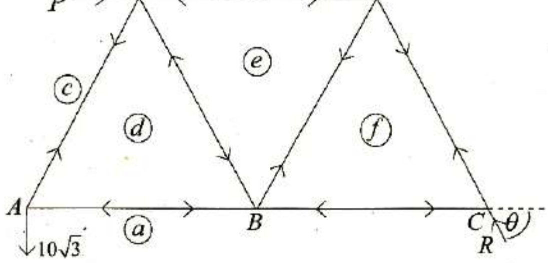
$$\frac{W}{2}\tan\beta.\cos\alpha - W\sin\alpha = W\sin\alpha$$

$\cos\alpha$ වලින් බෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}\tan\beta = 2\tan\alpha$$

$$\tan\beta = 4\tan\alpha$$

(b) දණ්ඩක දිග $2d$ යයි ගනිමු. C හිදී අසවුවේ ප්‍රතික්‍රියාව තිරසට θ ආනතව, R යයි ගනිමු.



(i) C වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්,

$$C, \quad 10\sqrt{3}.4d - P.2d\sin 60^\circ = 0$$

$$P = 40N$$

(ii) $\leftarrow R\cos\theta - 40 = 0$

$$R\cos\theta = 40 \text{............(1)}$$

$\uparrow R\sin\theta - 10\sqrt{3} = 0$

$$R\sin\theta = 10\sqrt{3} \text{............(2)}$$

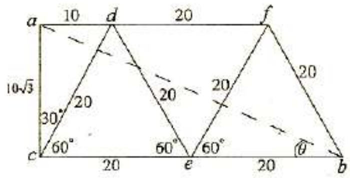
$\dfrac{(2)}{(1)}$; $\quad \dfrac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \dfrac{10\sqrt{3}}{40} \quad \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$(1)^2 + (2)^2$; $\quad R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 40^2 + (10\sqrt{3})^2$

$$= 1600 + 300$$

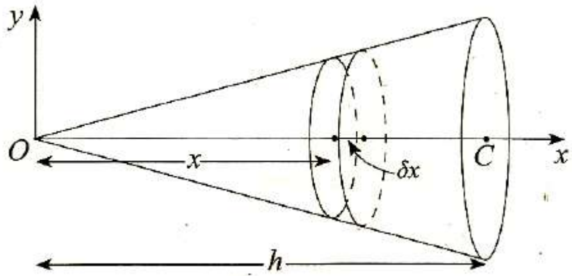
$$= 1900$$

$$R^2 = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19}$$



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	තෙරපුම	10N
BC	තෙරපුම	30N
CD	තෙරපුම	20N
DE	තෙරපුම	20N
EA	ආතතික	20N
EB	තෙරපුම	20N
DB	ආතතික	20N

7.



කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි OC අක්ෂය මත පිහිටයි. OC ඔස්සේ x අක්ෂය ගනිමු. කේතුවේ අර්ධ ශීර්ෂ කෝණය α යයි ද, O සිට x දුරින් වූ ද පළල δx වූද තුනී තැටියක් සලකමු.

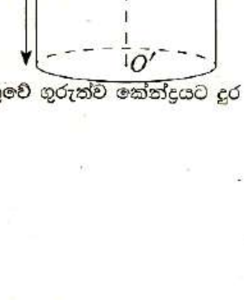
තැටියේ අංශු මාත්‍ර ස්කන්ධ $\delta m = \pi\,(x\tan\alpha)\,\delta x\rho$

ρ යනු කේතුවේ ඝනත්වයයි.

O සිට කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\overline{x}$ වන විට O වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්,

$$\overline{x} = \frac{\int_0^h x\pi(x\tan\alpha)^2 dx\rho}{\int_0^h \pi(x\tan\alpha)^2 dx\rho}$$

$$= \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h} = \frac{h^4/4}{h^3/3} = \frac{3h}{4}$$



එවිට C ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර

$$= h - \frac{3h}{4}$$

$$= \frac{h}{4}$$

සමමිතික බව සැලකීමෙන් අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OO' අක්ෂය මත පිහිටයි.

සිලින්ඩරයේ ස්කන්ධය $= \pi R^2 H \rho$

කුහරය සෑදීමට ඉවත් කරන ලද කේතුවේ ස්කන්ධය $= \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho$

සිලින්ඩරයේ සහ කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රවලට PQ සිට දුර පිළිවෙළින් $\frac{H}{2}$ සහ $\frac{h}{4}$ වෙයි. අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\bar{x}$ යයි ගනිමු.

O; $\left(\pi R^2 H\rho - \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho\right)\bar{x} = (\pi R^2 H\rho).\left(\frac{H}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho\right).\frac{h}{4}$

O; $$\bar{x} = \frac{(\pi R^2 H\rho).\left(\frac{H}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho\right).\frac{h}{4}}{\pi R^2 H\rho - \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho}$$

$$= \frac{\left(\frac{R^2H^2}{2}\right) - \left(\frac{r^2h^2}{12}\right)}{R^2H - \frac{1}{3}r^2h}$$

$$= \frac{\square R^2H^2 - r^2h^2}{12} \square \frac{3}{3R^2H - r^2h}$$

$$= \frac{\square R^2H^2 - r^2h^2}{4(3R^2H - r^2h)}$$

$R = 2r$ සහ $\bar{x} = h$ වන විට,

$$h = \frac{\square(4r^2)H^2 - r^2h^2}{4\left[3(4r^2)H - r^2h\right]} = \frac{24r^2H^2 - r^2h^2}{4\square r^2H - 4r^2h}$$

$$(4\square r^2H - 4r^2h)h = 24r^2H^2 - r^2h^2$$

$$4\square Hh - 4h^2 = 24H^2 - h^2$$

$$3h^2 - 4\square Hh \square 24H^2 = 0$$

$$h^2 - 1\square Hh \square \square H^2 = 0$$

$$(h - \square H)^2 = \square 4H^2 - \square H^2$$

$$(h - \square H)^2 = \square H^2$$

$$h - \square H = \square 2\sqrt{14}H$$

$$h = \square H \square 2\sqrt{14}H$$

$h \square H$ නිසා $h = \square H \square 2\sqrt{14}H$ පිළිගත නොහැකිය.

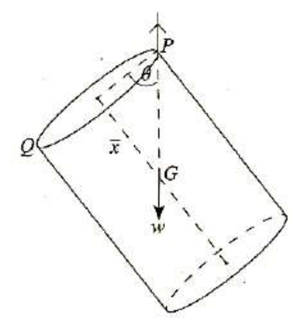
එබැවින් $h = \square H - 2\sqrt{14}H$

$$h = 2(4 - \sqrt{14})H$$

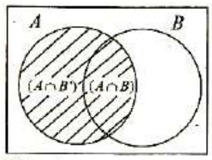
P හරහා සිරස් රේඛාව G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන අතර PQ හි සිරසට ආනති θ වන විට

$\tan\square = \frac{\bar{x}}{R}$, $h = 3R$ නම් $\tan\square = \frac{h}{2r} = \frac{2(4-\sqrt{14}).3r}{2r} = 3(4-\sqrt{14})$

$\therefore \square = \tan^{-1}\left[3(4-\sqrt{14})\right]$



8. (a)



$$A = (A\cap B)\cup(A\cap B')$$

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B')$$

$\therefore\ P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$...........(1)

$(A\cup B) = (A\cap B')\cup(B)$;

$P(A\cup B) = P(A\cap B') + P(B)$; $B\cap(A\cap B') = \phi$

$\therefore\ P(A\cap B') = P(A\cup B) - P(B)$

(1) ට ආදේශයෙන්, $P(A\cup B) - P(B) = P(A) - P(A\cap B)$

$\therefore\ P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

A හා B ස්වායත්ත විචල්‍ය නම්, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

(i) $P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$

$= P(A) - P(A)\times P(B)$

$= P(A)[1 - P(B)]$

$= P(A)\times P(B')$

$\therefore$ A සහ B' සිද්ධි ස්වායත්ත වෙයි.

(ii) $P(A'\cap B') = P(A\cap B)'$

$= 1 - P(A\cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$

$P(A'\cap B') = P(A') - P(B) + P(A)\times P(B)$

$= P(A') - P(B)[1 - P(A)]$

$= P(A') - P(B)\times P(A')$

$= P(A')[1 - P(B)]$

$= P(A')\times P(B')$

$\therefore A'$ සහ B' ස්වායත්ත සිද්ධි වෙයි.

N : X හෝ Y යන දෙදෙනාගෙන් කිසිවෙකුත් ආබාධයකට ලක් නොවීම.

A : X පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම.

B : Y පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම.

AB: X සහ Y යන දෙදෙනාම ආබාධයකට ලක්වීම.

X ආබාධයකට ලක්වීමේ සිද්ධිය C වන විට $P(C) = 0.2$

Y ආබාධයකට ලක්වීමේ සිද්ධිය D වන විට $P(D) = 0.1$ යයි දී තිබේ.

එවිට, X ආබාධයකට ලක්නොවීමේ සම්භාවිතාව

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Y ආබාධයකට ලක්නොවීමේ සම්භාවිතාව

$$P(D') = 1 - P(D) = 1 - 0.1 = 0.\square$$

$P(\square) = P(C'\cap D')$

$= P(C')\times P(D')$

$= 0.8\times 0.\square$

$= 0.\square 2$

$P(A) = P(C\cap D')$

$= P(C)\times P(D')$

$= 0.2\times 0.\square$

$= 0.18$

$P(B) = P(C'\cap D)$

$= P(C')\times P(D)$

$= 0.8\times 0.1$

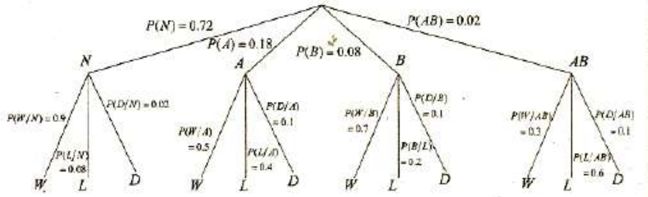
$= 0.08$

$P(AB) = P(C\cap D)$

$= P(C)\times P(D)$

$= 0.2\times 0.1$

$= 0.02$



W - ජය ගැනීම ; L - පරාජය වීම ; D - ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් වීම

(i) ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව

$$P(W) = P(N)\times P(W/N) + P(A)\times P(W/A) + P(B)\times P(W/B) + P(AB)\times P(W/AB)$$
$$= 0.72\times 0.9 + 0.18\times 0.5 + 0.08\times 0.7 + 0.02\times 0.3$$
$$= 0.648 + 0.090 + 0.56 + 0.006$$
$$= 0.8$$

(ii) තරඟාවලිය පරාජය වීමේ සම්භාවිතාව

$$P(L) = P(N)\times P(L/N) + P(A)\times P(L/A) + P(B)\times P(L/B) + P(AB)\times P(L/AB)$$
$$= 0.72\times 0.8 + 0.18\times 0.4 + 0.08\times 0.2 + 0.02\times 0.6$$
$$= 0.576 + 0.072 + 0.016 + 0.012$$
$$= 0.1576$$

ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම පරාජය වී ඇතැයි දී ඇති විට, Y ආබාධයට ලක්වීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව,

$$P(B/L) = \frac{P(B\cap L)}{P(L)} = \frac{P(B)\times P(L/B)}{P(L)} = \frac{0.08\times 0.2}{0.1576} = \frac{0.016}{0.1576} = \frac{16}{157} = 0.1$$

9. (a) මධ්‍යන්‍යය $= \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

විචලතාව $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

(i) $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{38}, x_{39}, x_{40}$ යන අගයන් 40 කි. අගයන් 40 න් අගයන් දෙකක් පමණක් සාවද්‍ය ලෙස ගෙන ඇත. එම අගයන් දෙක මිලිග්‍රෑම් 65 සහ මිලිග්‍රෑම් 53 වෙයි. ඒ අනුව,

$$\bar{x} = 58 = \frac{\sum_{i=1}^{38} x_i + 65 + 53}{40}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{38} x_i = 58\times 40 - 65 - 53 = 2202$$

නිවැරදි කිරීමෙන් පසු මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}'$ යයි ගනිමු. එවිට

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{38} x_i + 63 + 55}{40} = \frac{2202 + 118}{40} = \frac{2320}{40} = 58 \qquad \therefore \quad \bar{x} = \bar{x}'$$

$\therefore$ වරද නිසා මධ්‍යන්‍යයට බලපෑමක් නැත.

(ii) විචලතාව $= s^2 = (3.2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 + (65-58)^2 + (53-58)^2}{40}$

$$\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 = 40\times(3.2) - 49 - 25$$

නිවැරදි විචලතාව $= s'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 + (63-58)^2 + (55-58)^2}{40}$

$$= \frac{40\times(3.2) - 74 + 25 + 9}{40}$$
$$= \frac{40\times(3.2) - 40}{40}$$
$$= (3.2) - 1$$
$$= 2.2$$

එවිට විචලතාව අඩු වී ඇත.

9. (b)

මැද අගය (x)	සංඛ්‍යාතය (f)	$d = \dfrac{x-45}{10}$	fd
5	10	-4	-40
15	27	-3	-81
25	33	-2	-66
35	35	-1	-35
45	38	0	0
55	30	1	30
65	19	2	38
75	8	3	24
	200		-130

(i) මධ්‍යන්‍යය $\bar{x} = 45 + \left(-\dfrac{130}{200}\right)\times 10$

$$= 45 - \frac{13}{2}$$
$$= 45 - 6.5$$
$$= 38.5$$

මධ්‍යස්ථය $= l + \dfrac{\left(\dfrac{n}{2} - c\right)h}{f}$

l – මධ්‍යස්ථ පන්තියේ පහළ සීමාව $= 30$

h – පන්තියේ තරම $= 10$

f – මධ්‍යස්ථ පන්තියේ සංඛ්‍යාතය $= 35$

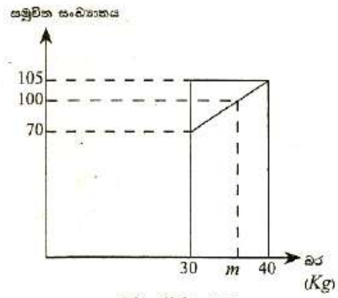
c – මධ්‍යස්ථ පන්තියට පෙර සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය $= 70$

මධ්‍යස්ථය $= 30 + \dfrac{100-70}{35}\times 10$

$$= 30 + \frac{300}{35} = 30 + \frac{60}{7} = 30 + 8.57 = 38.57$$

තවත් ක්‍රමයක්

$$\frac{m-30}{40-m} = \frac{100-70}{105-100} = \frac{30}{5} = 6$$
$$m - 30 = 6(40-m)$$
$$7m = 240 + 30$$
$$m = \frac{270}{7} = 38.57$$



මාතය $= l + \dfrac{h(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2} \Rightarrow$ මාතය $= 40 + \dfrac{10\times(38-35)}{2\times 38 - 35 - 30}$

$$= 40 + \frac{30}{76-65}$$
$$= 40 + \frac{30}{11} = 40 + 2.727 = 42.73$$

l – මාත පන්තියේ පහළ සීමාව $= 40$

h – මාත පන්තියේ තරම $= 10$

f_1 – මාත පන්තියේ සංඛ්‍යාතය $= 38$

f_0 – මාත පන්තියට පෙර සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය $= 35$

f_2 – මාත පන්තියට පසු සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය $= 30$

තවත් ක්‍රමයක්

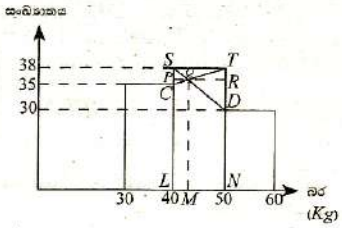
$$\frac{M-40}{50-M}=\frac{38-35}{38-30}$$

$$\left[\frac{LM}{MN}=\frac{PQ}{QR}=\frac{SC}{TD} \text{ වීම අනුව}\right]$$

$$8(M-40)=3(50-M)$$

$$11M=470$$

$$M=\frac{470}{11}=42.73$$



මධ්‍යස්ථ බර 38.5 වන බැවින් ප්‍රවාහන කළ හැකි මගීන් සංඛ්‍යාව $\frac{1500}{38.5}$ යන අගයෙන් නිර්ණය කළ හැකිය. එනම් $\frac{1500}{38.5}=38.96 \simeq 39$.

මෙලෙසම, මාතය 42.73 වන බැවින් උපරිම මගීන් සංඛ්‍යාව $\frac{1500}{42.73}$ මගින් ද නිර්ණය කළ හැකිය.

$$\frac{1500}{42.73}=35.$$

අගයන් දෙකෙන් වඩා කුඩා අගය වන 35 අගය පිළිගත හැකි වන අතර අරක්ෂිතව යා හැකි මගීන් ගණන 35 ලෙස තීරණය කළ හැකිය.

(ii)

මැද අගය (x)	සංඛ්‍යාතය (f)	$d=\frac{x-45}{10}$	fd	fd^2
5	10	−4	−40	160
15	27	−3	−81	243
25	33	−2	−66	132
35	35	−1	−35	35
45	38	0	0	0
55	30	1	30	30
65	19	2	38	76
75	8	3	24	72
	200		−130	748

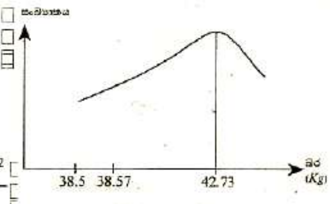
$$\text{විචලතාව} = 10^2\left[\frac{748}{200}-\left(-\frac{130}{200}\right)^2\right]$$

$$=100\left[\frac{748}{200}-\frac{130^2}{200^2}\right]$$

$$=100\left[\frac{748\times 200-130^2}{200^2}\right]$$

$$=100\left[\frac{132700}{200\times 200}\right]$$

$$=\frac{1327}{4}=331.75$$



සම්මත අපගමනය $=\sqrt{331.75}=18.21$

කුටිකතා සංගුණකය $=\dfrac{3\,(\text{මධ්‍යන්‍යය - මධ්‍යස්ථය})}{\text{සම්මත අපගමනය}}$

$$=\frac{3(38.5-38.57)}{18.21}$$

$$=\frac{-0.21}{18.21}=\frac{-21}{1821}=-0.0115$$

ව්‍යාප්තිය සෘණ කුටික ව්‍යාපතියකි.