අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2012

ඇගයීම් වාර්තාව

10 - සංයුක්ත ගණිතය

පර්යේෂණ හා සංවර්ධන ශාඛාව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව,
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව.

2.1.2 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** යොදගෙන, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, L.H.S. = 1 = R.H.S. වේ. **(05)**

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n=1$ ට සත්‍ය වේ.

$n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු. මෙහි p යනු ධන නිඛිලයකි.

එවිට, $1+2+\ldots+p=\dfrac{p(p+1)}{2}$ වේ. **(05)**

$n=p+1$ විට,

$$1+2+\ldots+p+(p+1)=\underbrace{\frac{p(p+1)}{2}}_{(05)}+(p+1)=\underbrace{\frac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}}_{(05)} \text{ වේ.}$$

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n=p+1$ ට සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ වේ.

(05) **[25]**

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

බොහෝ අපේක්ෂකයන් $n=p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය කිරීමේදී අවසාන ප්‍රතිඵලය නිවැරදිව ඉදිරිපත් කර නොතිබිණි. එම ප්‍රතිඵලය $\dfrac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}$ හෝ $\dfrac{(p+1)(\overline{p+1}+1)}{2}$ ලෙස දැක්විය යුතුව තිබුණ ද ඒ වෙනුවට $\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$ ලෙස පමණක් ලියා තිබිණි. එමගින්, ප්‍රතිඵලය $n=p+1$ සඳහා සත්‍ය බව සනාථ නොවේ. තවද පිළිතුර අවසානයේදී "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව දී ඇති ප්‍රකාශය සත්‍ය බව" බොහෝ පිළිතුරුවල සඳහන් කර නොතිබිණ. එසේ වුව ද පිළිතුරු සැපයීම හොඳ මට්ටමක පැවතුණි. "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය" යොදා ගනිමින්, දී ඇති ප්‍රතිඵලයක් ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා සත්‍ය බව සාධනය කිරීමේ හැකියාව සිසුන් සතුව තිබුණ ද එම ක්‍රියාවලියට අයත් පියවර සියල්ල නිවැරදිව, තර්කානුකූලව හා අනුපිළිවෙළින් ඉදිරිපත් කිරීමට සිසුන් හුරුවී නොතිබීම නිසා මුළු ලකුණු හිමිකරගත් පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අඩුවී ඇත. I පත්‍රයෙහි A කොටසෙහි දී ඇති කෙටි පිළිතුරු අපේක්ෂිත අනිවාර්ය ප්‍රශ්න 10 අතුරෙන් වඩාත්ම පහසු ප්‍රශ්නය වුව ද එහි පහසුතාව 61%කට සීමාවීමට සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල මෙමඅඩුපාඩු ද හේතු වී ඇත.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. ADDING යන වචනයේ අකුරු සියල්ලම යොදගෙන සෑදිය හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණ ගණනක ප්‍රාණාක්ෂර (vowels) වෙන්ව පවතී දැයි සොයන්න.

වචනයට අකුරු හයක් ඇති අතර එයින් අකුරු දෙකක් එකම වර්ගයේ වේ.

අකුරු සියල්ලම ගෙන කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \dfrac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

(05) **(05)** **[10]**

ප්‍රාණාක්ෂර දෙකක් ඇති අතර, නම් වශයෙන් ඒවා A හා I වේ.

මෙම ප්‍රාණාක්ෂර දෙක එක අකුරක් ලෙස ගනිමින් ප්‍රාණාක්ෂර එකට සිටින ලෙස කළ හැකි

මුළු පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ **(05)**

A හා I අතුරු මාරු කළ හැකි බැවින්, ප්‍රාණාක්ෂර එකට සිටින ලෙස කළ හැකි මුළු

පිළියෙල කිරීම් ගණන $= 2 \times 60 = 120$ **(05)**

එබැවින්, ප්‍රාණාක්ෂර වෙන්ව පවතින ලෙස කළ හැකි මුළු පිළියෙල කිරීම් ගණන

$= 360 - 120 = 240$ **(05)** **[15]**

---

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

සංකරණ සහ සංයෝජන ආශ්‍රිත මූලික සංකල්ප පිළිබඳ ප්‍රමාණවත් අවබෝධයක් නොතිබීම නිසා සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීමට සිසුනට නොහැකි වීමෙන් මෙම ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 31%කට සීමාවී තිබිණි. පන්ති කාමරයේදී සාමාන්‍යයෙන් භාවිත කෙරෙන සරල අභ්‍යාසවල නිරතවීමේ පරිචය තිබිණි නම්, මෙම ප්‍රශ්නයට ඉතා පහසුවෙන් නිවැරදි හා සම්පූර්ණ පිළිතුරු සැපයීමේ හැකියාව සිසුන් සතුවන බව නොඅනුමාන ය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. p නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් වන $(1+px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය හා x^2 හි සංගුණකය පිළිවෙළින් $-q$ හා $11q$ නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

$(1+px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x පදය ${}^{12}C_1\, px$ වේ.

x හි සංගුණකය : ${}^{12}C_1\, p = -q \Rightarrow 12p = -q \rightarrow (1)$ **(05)**

$(1+px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^2 පදය ${}^{12}C_2\, p^2x^2$ වේ.

x^2 හි සංගුණකය : ${}^{12}C_2\, p^2 = 11q \Rightarrow 66p^2 = 11q \Rightarrow 6p^2 = q \rightarrow (2)$ **(05)**

$(1) + (2) \Rightarrow p = -2$ හෝ 0 වේ. **(05)**

p යනු නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් බැවින් $p = -2$ වේ. **(05)**

(1) න් $q = 24$ යැයි ලැබේ. **(05)** **[25]**

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

ද්විපද ප්‍රසාරණය හා ${}^{n}C_{r}$ සුළු කිරීම පිළිබඳ දැනුම ප්‍රමාණවත් නොවීම ද, p යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයක් බව දී තිබුණ ද එය සැලකිල්ලට ගෙන නොතිබීම ද නිසා පිළිතුරු ප්‍රමාණවත් තරම් සතුටුදායක වී නැත. p නිශ්ශුන්‍ය බව සඳහන් නොකර බෙදීම නිසා ද ලකුණු නොලැබී ගොස් තිබුණි.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{2\sin^2 3x - x^2 \cos x} = \dfrac{1}{17}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{2\sin^2 3x - x^2 \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{2\dfrac{\sin^2 3x}{x^2} - \cos x} \quad \begin{matrix}\textbf{(05)} \\ \textbf{(05)}\end{matrix}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{18\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2 - \cos x} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}{\underbrace{18\left\{\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\right\}^2}_{\textbf{(05)}} - \lim\limits_{x \to 0} \cos x} = \underbrace{\frac{1}{18-1}}_{\textbf{(05)}} = \frac{1}{17}$$

[25]

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

සීමාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයවල නිවැරදි භාවිත හැකියාව හීනවීම නිසා බොහෝ පිළිතුරු ප්‍රමාණවත් තරම් සතුටුදායක මට්ටමක නොතිබිණි. එබැවින් ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 26% තරම් අඩු මට්ටමකට පහළ බැස ඇත. සීමාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයවල භාවිත ඇතුළත් අභ්‍යාසවලදී එම එක් එක් ප්‍රමේයය යොදා ගැනෙන අවස්ථාව නිරූපණය වන සේ සකස්කර ගැනීමේ පියවර පටිපාටිය ලියා දැක්විය යුතු වුව ද බොහෝ සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල ඒ බව දක්නට නොලැබීම අඩුපාඩුවක් මෙන්ම මුළු ලකුණු නොලැබීමට ද හේතුවකි.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $2e^{x}+3e^{-x}=A(2e^{x}-e^{-x})+B(2e^{x}+e^{-x})$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $\int \frac{2e^{x}+3e^{-x}}{2e^{x}+e^{-x}}\,dx$ සොයන්න.

$2e^{x}+3e^{-x}=A(2e^{x}-e^{-x})+B(2e^{x}+e^{-x})$

$(2A+2B-2)\,e^{x}+(-A+B-3)\,e^{-x}=0 \Rightarrow A+B=1$ හා $-A+B=3$ වේ.

$\Rightarrow A=-1$ හා $B=2$ වේ.

(05) **(05)** **[10]**

$\int \frac{2e^{x}+3e^{-x}}{2e^{x}+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{2e^{x}-e^{-x}}{2e^{x}+e^{-x}}\,dx + 2\int dx = -\ln(2e^{x}+e^{-x})+2x+C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(05) **(05)** **(05)**

[15]

---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

A සහ B නියත නිවැරදිව සොයා තිබූ නමුදු දී ඇති අනුකලය සුදුසු පරිදි සරල අනුකලවලට වෙන් කිරීමේ ක්‍රියාවලිය සතුටුදායක මට්ටමක නොවීම නිසා අවසාන පිළිතුර කරා ළඟාවීමට නොහැකිවීමෙන් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 48%කට සීමාවී ඇත. සරල අනුකල ආශ්‍රිත අභ්‍යාසවල නිරතවීමෙන් සිසුන් ලබන පරිචය මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීම සඳහා ඉතා ප්‍රයෝජනවත් වේ.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. **l යනු $(4,0)$ හා $(0,2)$ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක් ද, m යනු $(2,0)$ හා $(0,3)$ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක් ද යැයි ගනිමු. l හා m සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න. ඒ නයින්, l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හා මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.**

l හි සමීකරණය $\frac{y}{x-4}=\frac{2-0}{0-4} \Rightarrow 2x+4y-8=0 \Rightarrow x+2y-4=0$ වේ. **(05)**

m හි සමීකරණය $\frac{y}{x-2}=\frac{3-0}{0-2} \Rightarrow 3x+2y-6=0$ වේ. **(05)** **[10]**

---

l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය

$x+2y-4+\lambda(3x+2y-6)=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය. මෙහි λ යනු පරාමිතියකි. **(05)**

මෙම රේඛාව මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බැවින්, $\lambda=-\frac{2}{3}$ යැයි ලැබේ. **(05)**

එබැවින්, අවශ්‍ය රේඛාවේ සමීකරණය $2y-3x=0$ වේ. **(05)** **[15]**

වෙනත් ක්‍රමයක් :

මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය $y - \mu x = 0$ ලෙස ලිවිය හැකිය. මෙහි μ යනු පරාමිතියකි. **(05)**

l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ වේ. **(05)**

රේඛාව මෙම ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බැවින් $\mu = \dfrac{3}{2}$ යැයි ලැබේ.

එබැවින්, අවශ්‍ය රේඛාවේ සමීකරණය $2y - 3x = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

$l_1 = 0$ සහ $l_2 = 0$ සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය λ පරාමිතියක් වන $l_1 + \lambda l_2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව භාවිත කිරීම වෙනුවට බොහෝ අපේක්ෂකයන් සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයා පිළිතුරු සපයා තිබිණ. සිද්ධාන්ත කේන්ද්‍රීය වූ වඩාත් පහසු කෙටි ක්‍රමයක් මගින් පිළිතුරු සපයා මුළු ලකුණු උපයා ගත හැකිව තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයට සපයා තිබූ බොහෝ පිළිතුරු දීර්ඝ වූ ද වැඩි කාලයක් අවශ්‍ය වූ ද ලකුණු උපයා ගැනීම දුෂ්කර වූ ද ඒවා බව දක්නට ලැබිණි. මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 59%ක් වන අතර මීට වඩා වැඩි පහසුතාවක් ඇති පළමුවන ප්‍රශ්නයේ ද පහසුතාව 61%ක් පමණි.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. C නම් වක්‍රයක් $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලැබෙයි. C වක්‍රයට $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය, $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

$(1, 2)$ ලක්ෂයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,2)} = \left.(-4 + 6x - 3x^2)\right|_{x=1} = -1 \text{ වේ.}$$

(05) **(05)**

එබැවින්, $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\dfrac{y - 2}{x - 1} = -1$ වේ.

එනම්, $x + y - 3 = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

$(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,2)} = \left.\frac{2}{y}\right|_{y=2} = 1 \text{ වේ.}$$ **(05)**

$(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $\times$ $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= (-1) \times 1 = -1$ වේ.

එබැවින්, $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකය $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ වේ. **(05)** **[10]**

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

දී ඇති ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍ර දෙකට ඇඳි ස්පර්ශකවල සමීකරණ නිවැරදිව සොයා ඇති නමුත් ඒවා එකිනෙකට ලම්බ බව පෙන්වීම සඳහා එම සරල රේඛා දෙකෙහි අනුක්‍රමණවල ගුණිතය -1 බව පෙන්වීම භාවිත නොකිරීමේ හේතුවෙන් මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමේ පසුබටට බවක් දක්නට ලැබිණි. ඒ හේතුවෙන් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 40%කට සීමාවී ඇත.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $(2,0)$ **හා** $(0,2)$ **ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය** $x^2+y^2-4+\lambda(x+y-2)=0$ **ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි** λ **යනු පරාමිතියකි. මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය** λ **ඇසුරෙන් සොයන්න.**

$(2,0)$ හා $(0,2)$ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එවිට, $4+4g+c=0$ හා $4+4f+c=0$ යැයි ලැබේ. **(05)**

ඉහත සමීකරණ දෙකෙන් $f=g$ හා $c=-4(g+1)$ යැයි ලැබේ. **(05)**

එබැවින්, සමීකරණය $x^2+y^2+2gx+2gy-4(g+1)=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එනම්, $x^2+y^2-4+\lambda(x+y-2)=0$; මෙහි $\lambda=2g$ වේ. **(05)** **[15]**

$$\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2-4-2\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2=0$$

එනම්, $\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\frac{(\lambda+2)^2+4}{2}=0$

වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $\left(-\frac{\lambda}{2},\ -\frac{\lambda}{2}\right)$ වේ. **(05)**

වෘත්තයේ අරය $\sqrt{\frac{(\lambda+2)^2+4}{2}}$ වේ. **(05)** **[10]**

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය, I පත්‍රයෙහි A කොටසෙහි ඇති කෙටි පිළිතුරු අපේක්ෂිත ප්‍රශ්න දහය අතුරෙන් පහසුතාව අඩුම ප්‍රශ්නයයි. එහි පහසුතාව 22%තෙක් අඩුවී තිබිණි. ඛණ්ඩාංක ජ්‍යාමිතිය තේමාවෙහි වෘත්තය සම්බන්ධ විෂය ඒකකය මෙන්ම මෙම ප්‍රශ්නයට පාදක කර ගනු ලැබූ විෂය කරුණු ද දුෂ්කර නොවන නමුදු අවශ්‍ය ප්‍රතිඵලය සාධනය කිරීම වෙනුවට සත්‍යාපනය කර තිබීම ද ලකුණු අඩුවන්නට හේතු වී තිබිණි. ප්‍රශ්නය විමසෙන ආකාරය අනුව පිළිතුර සංවිධානය කර ගැනීමට සිසුන් හුරු කරවීමේ අවශ්‍යතාව මෙහිදී අවධාරණය කළ යුතු වේ.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. ***AB* විෂ්කම්භයක් සහිත *S* වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න; මෙහි $A = (1, 3)$ හා $B = (2, 4)$ වේ. තවද, *S* වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස කපන $(-1, 2)$ කේන්ද්‍රය සහිත වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.**

S වෘත්තය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් (x, y) යැයි ගනිමු.

එවිට, $\left(\dfrac{y-3}{x-1}\right)\left(\dfrac{y-4}{x-2}\right) = -1$ යැයි ලැබේ. **(10)**

එනම්, $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

වෙනත් ක්‍රමයක් :

S වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(-g, -f)$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $-g = \dfrac{3}{2}$ හා $-f = \dfrac{7}{2}$ යැයි ලැබේ. **(05)**

S වෘත්තයේ අරය $\sqrt{\dfrac{(2-1)^2 + (4-3)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ වේ. **(05)**

එබැවින්, S වෘත්තයේ සමීකරණය $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ වේ.

එනම්, $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

$(-1, 2)$ කේන්ද්‍රය සහිත වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ යැයි ගනිමු. **(05)**

මෙම වෘත්තය හා S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බැවින්

$2\left(-\dfrac{3}{2}\right)(1) + 2\left(-\dfrac{7}{2}\right)(-2) = k + 14 \Rightarrow k = -3$ යැයි ලැබේ.

එබැවින් වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ වේ. **(05)** **[10]**

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය ද සතුටුදායක සාධන තත්ත්වයක් නොදක්වන ප්‍රශ්නයකි. පහසුතාව 35%ට ද වඩා අඩු ය. දී ඇති තොරතුරු අනුව, විෂ්කම්භයේ දෙකෙළවර ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක දී ඇති $S = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය නිවැරදිව සොයා තිබුණ ද, එම $S = 0$ වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය ලබා ගැනීම සඳහා නිවැරදි යොදා ගැනීම් කර නොතිබීම ලකුණු අඩුවීමට වැඩි වශයෙන්ම බලපෑ හේතුවකි.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ යැයි ගනිමින්, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\left(\frac{23}{12}\pi\right)$ හි අගය **අපෝහනය** කරන්න.

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

(05) **(05)** **(05)** **[15]**

$$\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\left(2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 2$$

(05) **(05)** **[10]**

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නයට සපයා තිබූ පිළිතුරු තරමක් සතුටුදායක වී තිබූ අතර, ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 48% තෙක් වර්ධනය වී ඇත. සිසුන් බොහෝ දෙනකු පළමුවන කොටසට සාර්ථකව පිළිතුරු ලියා තිබුණු නමුත් ඔවුන් වැඩි දෙනකුට අපෝහනය පිළිබඳව පැහැදිලි අවබෝධයක් නොමැති වීම නිසා ඊට නියමිත ලකුණු නොලැබීමෙන් මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමේ අවස්ථාව ඔවුන් විසින් අහිමි කර ගෙන තිබිණි. $(0, \pi/2)$ ප්‍රාන්තරයෙන් බැහැර පිහිටි කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ගණනය කිරීමේදී කෝණවල ආවර්තමය සම්බන්ධතා හා ඒවාට අනුරූප ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත අතර ඇති සම්බන්ධතා සුදුසු ලෙස භාවිත කිරීමට සිසුන් යොමු කරවිය යුතුය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය **I - B** කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (a) $f(x)\equiv x^2+2kx+k+2$ යැයි ගනිමු; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

(i) $f(x)$ යන්න $(x-a)^2+b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි.

කලනය භාවිතයෙන් තොරව, $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $y=f(x)$ වක්‍රය

(α) $-1<k<2$ නම්, x-අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටන බව,

(β) $k=-1$ හෝ $k=2$ හෝ නම්, x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව,

(γ) $k<-1$ හෝ $k>2$ හෝ නම්, x-අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන බව

පෙන්වන්න.

(ii) $k<-2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y=mx$ සරල රේඛාව $y=f(x)$ වක්‍රය තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න.

(b) $g(x)\equiv x^4+4x^3+7x^2+6x+2$ යැයි ගනිමු.

ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදගනිමින් $(x+1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

$g(x)$ යන්න $(x-a)^2(x^2+bx+c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි.

x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x)\geq 0$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(a) (i) $f(x)\equiv x^2+2kx+k+2\equiv (x+k)^2+2+k-k^2$, **(05)**

$\equiv (x-a)^2+b$; මෙහි $a=-k$ හා $b=2+k-k^2$ වේ.

(05) **(05)** **[15]**

$-\infty$ සිට $-k$ දක්වා x වැඩි වන විට, ∞ සිට $2+k-k^2$ අගය දක්වා $f(x)$ ශ්‍රිතය අඩු වන අතර

$-k$ සිට ∞ දක්වා x වැඩි වන විට, $2+k-k^2$ සිට ∞ දක්වා $f(x)$ ශ්‍රිතය වැඩි වේ. **(05)**

එබැවින්, $x=-k$ හිදී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය එකක් පමණක් ඇති අතර එය අවම ලක්ෂ්‍යයකි.

(05) **(05)** **[15]**

$f(x)$ හි අවම අගය $2+k-k^2$ වේ. **(05)** **[05]**

$2+k-k^2=(2-k)(1+k)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

(α) $-1<k<2$ නම්, එවිට $f(x)$ හි අවම අගය ධන වන අතර $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය x අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටිය යුතු වේ. **(05)**

(05) **[10]**

(β) $k=-1$ හෝ $k=2$ නම්, එවිට $f(x)$ හි අවම අගය ශුන්‍ය වන අතර $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය $x-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කළ යුතු වේ. **(05)**

(05) **[10]**

(γ) $k < -1$ හෝ $k > 2$ නම් එවිට, $f(x)$ හි අවම අගය සෘණ වන අතර $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය,
(05)

$x-$ අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කළ යුතු වේ.

(05) **[10]**

(ii) $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරයි නම් එවිට, ඕනෑම ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක පාටිකය $x^2 + 2kx + k + 2 = mx$ සමීකරණය තෘප්ත කළ යුතු වේ. **(05)**

එනම්, $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ ට ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙයි ම නම් පමණක් $y = mx$ සරල රේඛාව හා $y = f(x)$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය වේ. **(05)**

එනම්, $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ ම නම් පමණි. **(05)**

$k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගය සඳහා $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගය සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව හා $y = f(x)$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය වේ. **[25]**

(b) $g(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2 = 0$ **(05)**

$g(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය 0 වේ.

$\therefore$ $(x + 1)$ යනු $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. **(05)**

එබැවින්, $g(x) \equiv (x + 1)\, Q(x)$ වේ; **(05)** මෙහි $Q(x)$ යනු $g(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ලබ්ධිය වේ.

$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ වේ. **(05)**

$Q(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$ වේ. **(05)**

$Q(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය 0 වේ.

එබැවින්, $Q(x) \equiv (x + 1)\, R(x)$ වේ; **(05)** මෙහි $R(x)$ යනු $Q(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ලබ්ධිය වේ.

$\therefore$ $(x + 1)$ යනු $Q(x)$ හි සාධකයක් වේ. **(05)**

$\therefore$ $(x + 1)^2$ යනු $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. **[35]**

$R(x) = x^2 + 2x + 2$ **(05)**

$g(x) = (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)$

$g(x) = (x - a)^2 (x^2 + bx + c)$ වේ; මෙහි $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$ වේ. **(10)** **[15]**

---

x හි සියලු තාත්ත්වික අගය සඳහා

$g(x) = (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2) = (x + 1)^2 \left\{ (x + 1)^2 + 1 \right\} \geq 0$ වේ. **(05)**

(05) **[10]**

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$, වන පරිදි $f(r)$ නිර්ණය කරන්න; මෙහි $u_r = \dfrac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$ වෙයි.

$\sum_{r=1}^{n} u_r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ හි අගය සොයන්න.

(*b*) **එකම රූපයක**, $y = |2x-1|$ හා $y = |x| + \dfrac{5}{3}$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, $3|x| \geq |6x-3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

ඕනෑම $k \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය **එකම රූපයේ සලකමින්**, l හි කවර අගයක් සඳහා $3|x| = |6x-3| + l$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් එකක් පමණක් තිබේ දැයි සොයන්න.

(a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වේ.

$x = \dfrac{1}{2}$ සඳහා $B = \dfrac{1}{2}$ වේ. **(05)**

$x = -\dfrac{1}{2}$ සඳහා $A = -\dfrac{1}{2}$ වේ. **(05)** **[10]**

$$\frac{12r^2 + 1}{(2r-1)^3(2r+1)^3} = \frac{-\frac{1}{2}(2r-1)^3 + \frac{1}{2}(2r+1)^3}{(2r-1)^3(2r+1)^3} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{1}{2(2r-1)^3} - \frac{1}{2(2r+1)^3} = f(r) - f(r+1)\ ;$$ මෙහි $f(r) = \dfrac{1}{2(2r-1)^3}$

(05) **(05)** **[15]**

$u_1 = f(1) - f(2)$ **(05)**

$u_2 = f(2) - f(3)$ **(05)**

....

....

....

$u_{n-1} = f(n-1) - f(n)$ **(05)**

$u_n = f(n) - f(n+1)$ **(05)**

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$$

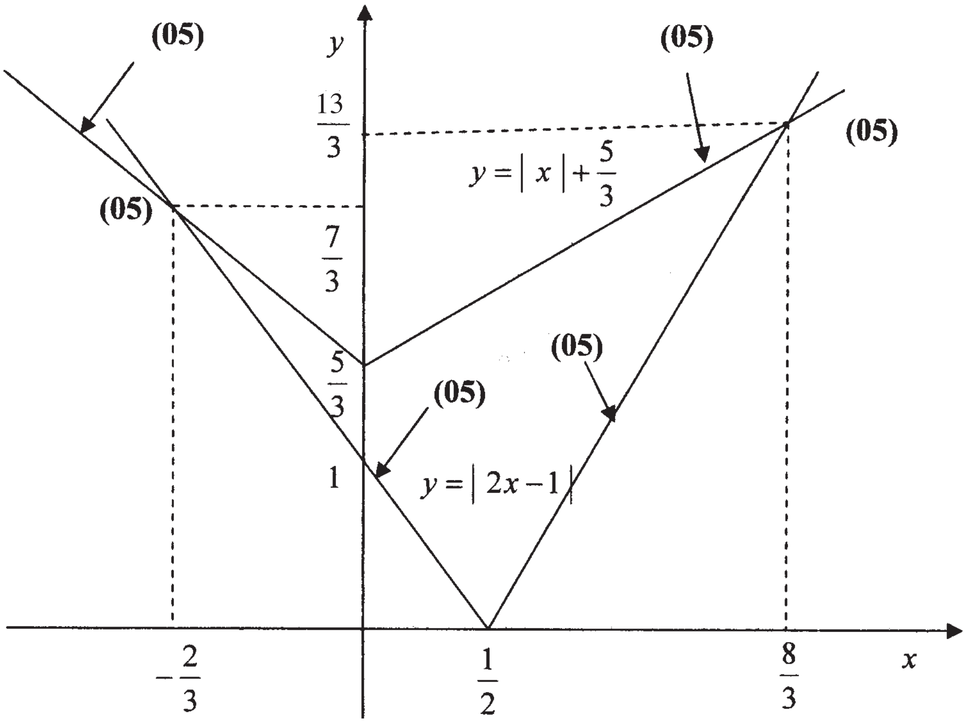
(05) **(05)** **[30]**

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \right\} = \frac{1}{2}$$ (පරිමිත වේ.) **(05)**

එබැවින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. **(05)** **[10]**

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ හි අගය $\dfrac{1}{2}$ වේ. **(05)** **[05]**

(*b*)



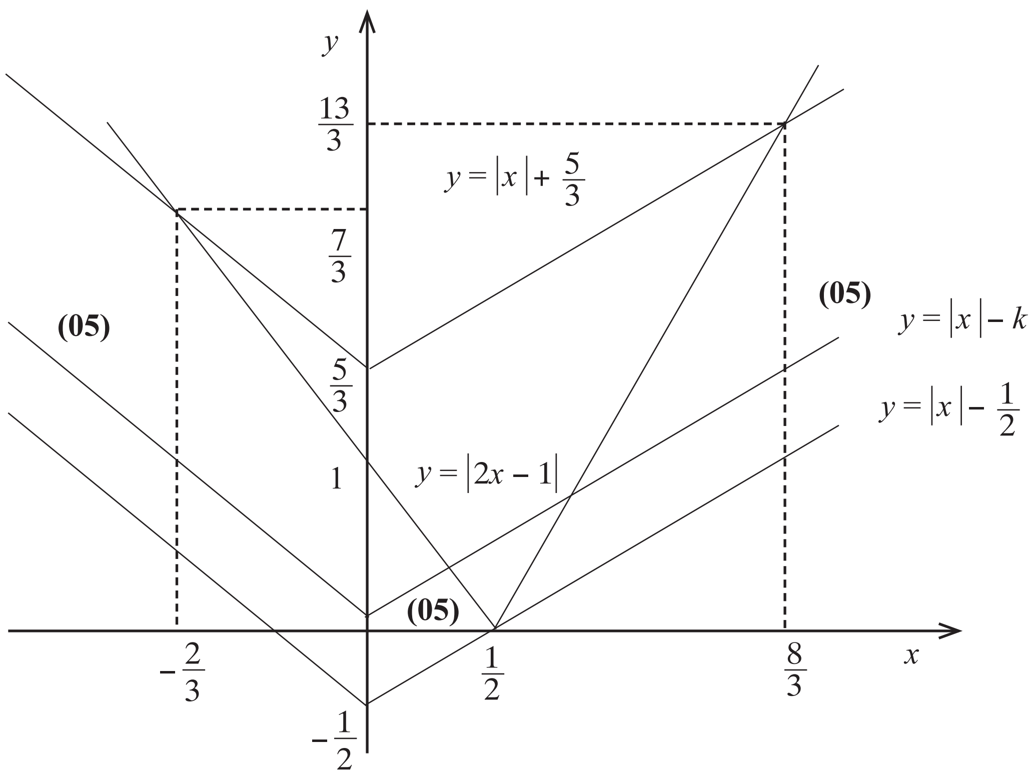
[30]

$3|x| \geq |6x-3| - 5 \Rightarrow |x| + \frac{5}{3} \geq |2x-1|$ **(05)**

එබැවින්, $3|x| \geq |6x-3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය $\left\{ x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{3} \right\}$

හෝ $x \in \left[\frac{-2}{3}, \frac{8}{3} \right]$

(05) **[10]**



[15]

$y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන විට

(05)

$3|x| = |6x - 3| + l \Rightarrow |x| - \frac{l}{3} = |2x - 1|$ ට එක තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් තිබේ. **(05)**

මේ සඳහා $k = \frac{1}{2}$ විය යුතුය. **(05)**

$|x| - \frac{l}{3} = |x| - \frac{1}{2}| \Rightarrow l = \frac{3}{2}$ **(05)** **[25]**

(05)

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\mathbf{O}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය හා $\mathbf{O}$ යනු 2×2 ශුන්‍ය න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, $\mathbf{A}^{-1}$ සොයන්න.

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{BA}=\mathbf{B}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින්, $\mathbf{BC}=\mathbf{O}$ වන පරිදි $\mathbf{C}$ නම් නිශ්ශුන්‍ය 2×2 න්‍යාසයක් සොයන්න.

(*b*) z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.

$|z|^2=z\bar{z}$ හා $|z|\geq \operatorname{Re} z$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, ඕනෑම z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|$ බව පෙන්වන්න.

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$|z-i|<\frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$|z-i|\leq\frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2}\leq\arg z\leq\frac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

(*a*)
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \mathbf{(05)}$$
$$=\underset{\mathbf{(05)}}{\begin{pmatrix}10 & 9\\ -6 & -5\end{pmatrix}}-\underbrace{\begin{pmatrix}12 & 9\\ -6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}_{\mathbf{(05)}}=\underset{\mathbf{(05)}}{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=0$$

[20]

$$2\mathbf{A}^{-1}=3\mathbf{AA}^{-1}-\mathbf{AAA}^{-1}=\underset{\mathbf{(05)}}{3\mathbf{I}-\mathbf{A}}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\ \mathbf{(05)}$$

[10]

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\mathbf{B}\quad\mathbf{(05)}$$

[05]

$$\mathbf{BA}-\mathbf{B}=\mathbf{O}\Rightarrow\underset{\mathbf{(05)}}{\mathbf{B}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=\mathbf{O}}\Rightarrow\mathbf{BC}=\mathbf{O},\ \text{මෙහි}\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}-\underset{\mathbf{(05)}}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}=\underset{\mathbf{(05)}}{\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}}$$

[15]

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ.

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \left\{ \sqrt{x^2+y^2} \right\}^2 = |z|^2$. **(05)** **[05]**

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \geq x = \operatorname{Re} z$.

(05) **(05)** **[10]**

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$$
$$= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \text{ (05)}$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2}$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \text{ (05)}$$
$$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2| \text{ (05)}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2|$$
$$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \text{ (05)}$$
$$= (|z_1| - |z_2|)^2 \text{ (05)}$$

$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ **[25]**

$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \geq |z_1 + z_2| - |z_2|$

(05) **(05)**

එනම්, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **[10]**

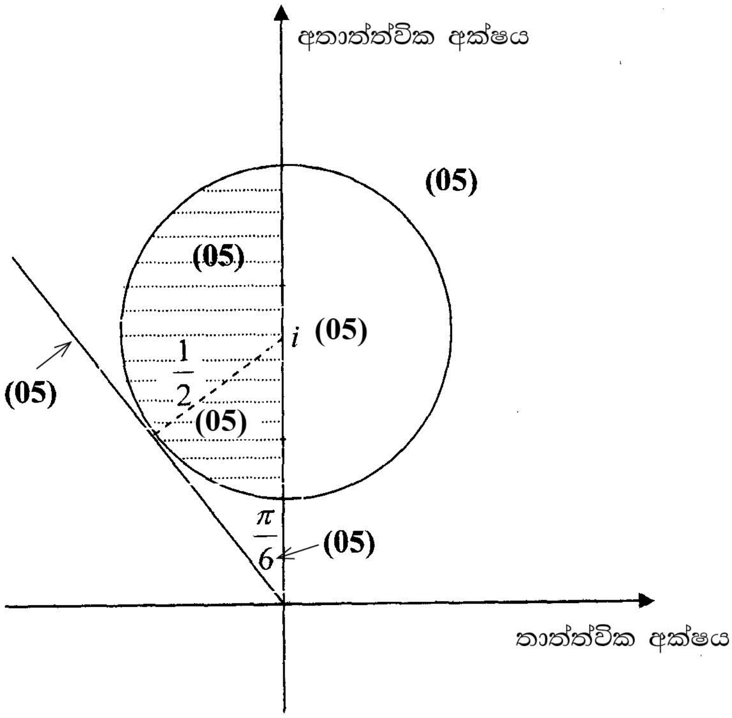
$|z| - |i| \leq |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < \frac{3}{2}$

(05) **(05)**

$|i| - |z| \leq |i - z| = |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$.

(05) **(05)**

එනම්, $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **[20]**



[30]

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (a) **පළමු ව්‍යුත්පන්නය පමණක්** සලකමින් $\dfrac{x^3}{x^4+27}$ හි අවම හා උපරිම අගයන් සොයන්න.

$y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, k හි කවර අගයන් සඳහා $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයට

(i) තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබේ දැයි,

(ii) තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබේ දැයි,

(iii) තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබේ දැයි,

(iv) තාත්ත්වික මූල නොතිබේ දැයි

සොයන්න; මෙහි k තාත්ත්වික වෙයි.

(b) $AB = a$ හා $BC = b\ (< a)$ සහිත $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් සලකමු. P යනු CD මත විචලනය විය හැකි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $AP + PB$ හි දිග $L(x)$ වෙයි; මෙහි $DP = x$ වෙයි.

$L(x) = \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{(a-x)^2+b^2}$ බව පෙන්වන්න.

$L(x)$ හි අවම දිග හා මෙම අවම දිගට අනුරූප P හි පිහිටුම CD මත සොයන්න.

$L(x)$ හි උපරිම දිග ද සොයන්න.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^4+27) - x^3(4x^3)}{(x^4+27)^2} = \dfrac{x^2(81-x^4)}{(x^4+27)^2} = 0 \Rightarrow x = -3, 0, 3$ වේ.

(05) **(05)** **(05)**

x හි පරාසය	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

(05) **(05)**

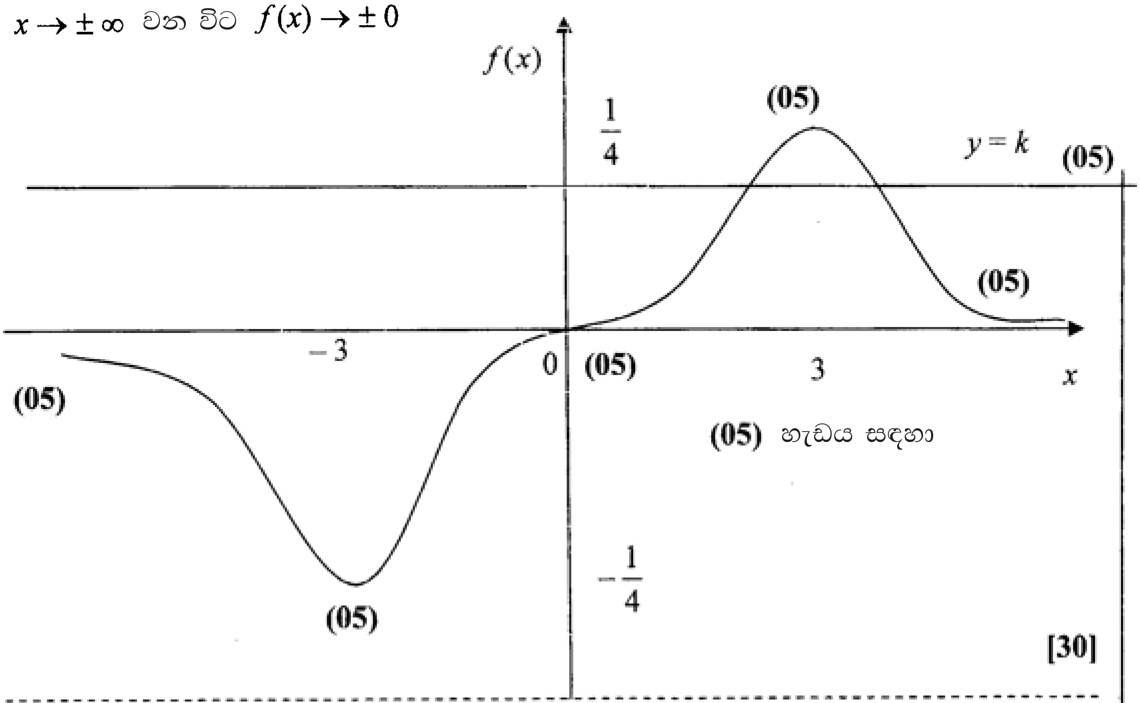
එබැවින්, $f(x)$ ට $x = -3$ හිදී අවමයක් හා $x = 3$ හිදී උපරිමයක් තිබෙයි. **(05)**

$f(-3) = \dfrac{(-3)^3}{(-3)^4+27} = -\dfrac{1}{4}$ හා $f(3) = \dfrac{(3)^3}{(3)^4+27} = \dfrac{1}{4}$ වේ.

(05) **(05)**

එබැවින්, $f(x)$ හි අවම අගය හා උපරිම අගය පිළිවෙළින් $-\dfrac{1}{4}$ හා $\dfrac{1}{4}$ වේ. **[40]**

$x \to \pm\infty$ වන විට $f(x) \to \pm 0$



$y = k$ හා $y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ සලකමු.

$y = k$ හා $y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල පාටික යනු $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයේ විසඳුම් වේ. **(05)**

එබැවින්,

(i) $k = -\dfrac{1}{4}$ හෝ $\dfrac{1}{4}$ විට, $y = k$ රේඛාව $y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය ස්පර්ශ කරන අතර, ඒ නයින් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ ට තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබෙයි. **(05)**

(ii) $k = 0$ විට $y = k$ රේඛාව $y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය ඔස්සේ යන අතර ඒ නයින් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණය $x^3 = 0$ ට ඌනනය වන අතර එයට තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබෙයි. **(05)**

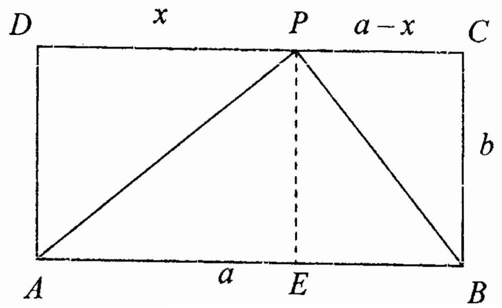
(iii) $-\dfrac{1}{4} < k < 0$ හෝ $0 < k < \dfrac{1}{4}$ විට, $y = k$ රේඛාව $y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන අතර ඒ නයින් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ ට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙයි. **(05)**

(iv) $k < -\dfrac{1}{4}$ හෝ $k > \dfrac{1}{4}$ විට, $y = k$ රේඛාව $y = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය නොකපන අතර ඒ නයින් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ ට තාත්ත්වික මූල නොමැත. **(05)** **[30]**

(b) $L(x) = AP + PB$ **(05)**

$$= \sqrt{AE^2 + EP^2} + \sqrt{BE^2 + EP^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \quad \textbf{(05)}$$



[10]

$$\frac{dL(x)}{d(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{x\sqrt{(a-x)^2+b^2} - (a-x)\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+b^2}\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$$

$$= 0 \Rightarrow x\sqrt{(a-x)^2+b^2} - (a-x)\sqrt{x^2+b^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2\{(a-x)^2+b^2\} = (a-x)^2\{x^2+b^2\} \Rightarrow x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}. \quad \textbf{(05)}$$

x හි පරාසය	$0 \le x < \frac{a}{2}$	$x = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} < x \le a$
$L'(x)$	$-$	0	$+$

(05)

$x = \frac{a}{2}$ විට, $L(x)$ අවම වේ. **(05)**

අවම දිග $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2}$

(05) **(05)**

මෙය වන්නේ P ලක්ෂ්‍යය CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන විට ය. **(05)** **[35]**

P ලක්ෂ්‍යය D හි හෝ C හි පිහිටන විට $L(x)$ උපරිම වන අතර මෙම අවස්ථාවේදී

$L(x) = b + \sqrt{a^2 + b^2}$ වේ. **(05)** **[05]**

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x)\,dx = \frac{4}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int x^3 \tan^{-1} x\,dx$ සොයන්න.

(*c*) **භින්න භාග** යොදගනිමින් $\int \frac{2x^2 - 3}{(x-2)^2 (x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(a) $$\int_0^{\pi} \left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) dx = \int_0^{\pi} \left\{(1 - \cos^2 x) \sin x - (1 - \sin^2 x) \cos x\right\} dx \quad \textbf{(05)}$$

$$= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(05) **(05)** **(05)** **(05)** **(05)** **[30]**

වෙනත් ක්‍රමයක් :

(a) $$\int_0^{\pi} \left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) dx = \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x + \sin^2 x \cos x - \cos x - \cos x^2 \sin x)\, dx \quad \textbf{(05)}$$

$$= \left[-\cos x + \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(05) **(05)** **(05)** **(05)** **(05)** **[30]**

(b) $\int x^3 \tan^{-1} x\,dx = \dfrac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{x^4}{1+x^2}\,dx$

(05) **(05)**

$= \dfrac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{(x^2+1)^2-(2x^2+1)}{1+x^2}\,dx$

(10)

$= \dfrac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \dfrac{1}{4}\int (x^2+1)\,dx + \dfrac{1}{4}\int \dfrac{2(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx$

(10)

$= \dfrac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right) + \dfrac{1}{2}\int dx - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{dx}{1+x^2}$

(05) **(05)**

$= \dfrac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right) + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\tan^{-1} x + C$; මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(10)

[50]

(c) $\dfrac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$; මෙහි A, B, C හා D යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. **(05)** **(05)** **(05)**

$2x^2 - 3 \equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2$

$x = 2$ ගැනීමෙන් $B = 1$ ලැබෙයි. **(05)**

නියත පද සැසඳීමෙන් $-3 = -2A + B + 4D$ ලැබෙයි.

x^3 පදයෙහි සංගුණක සැසඳීමෙන් $0 = A + C$ ලැබෙයි.

x පදයෙහි සංගුණක සැසඳීමෙන් $0 = A + 4C - 4D$ ලැබෙයි. **(10)**

$-3 = -2A + B + 4D$ හි $B = 1$ යැයි යෙදීමෙන් $-2 = -A + 2D \rightarrow (1)$ ලැබෙයි.

$0 = A + 4C - 4D$ හි $C = -A$ යැයි යෙදීමෙන් $0 = 3A + 4D \rightarrow (2)$ ලැබෙයි.

(1) හා (2) න් $D = -\dfrac{3}{5}$ හා $A = \dfrac{4}{5}$ යැයි ලැබෙයි.

(05) **(05)**

$C = -\frac{4}{5}$ **(05)**

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4x+3}{5(x^2+1)}.$$

$$\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{(x-2)} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{1}{5}\int \frac{4x+3}{(x^2+1)}\,dx \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5}\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

(05) **(05)**

$$= \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5}\ln(x^2+1) - \frac{3}{5}\tan^{-1}x + K;$$ මෙහි K යනු

(10) අභිමත නියතයකි. **[70]**

---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. (*a*) සමාන්තර නොවන $l_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $l_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න.

$2x-11y-10=0$ හා $10x+5y-2=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය, $4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර මහා කෝණයේ සමච්ඡේදකය ම බව පෙන්වන්න.

(*b*) g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ වෘත්තය $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.

$y+5=0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් හා $x^2+y^2-4=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරමින් $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ වෘත්ත දෙකක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙම වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

(*a*) $P_0(x_0, y_0)$ යනු රේඛා දෙකෙහි සිට එකම දුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

P_0 ලක්ෂ්‍යයේ සිට $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ රේඛාවලට ඇති ලම්බ දුර පිළිවෙළින්

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad \text{හා} \quad \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \text{වේ.}$$

(05) **(05)**

මෙම දුරවල් එකම බැවින්

$$\frac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ ලැබෙයි.

(05)

n හා m සංඛ්‍යා දෙකක නිරපේක්ෂ අගයන් සමාන නම් එවිට, $n=m$ හෝ $n=-m$ වේ.

ඉහත කරුණ යෙදීමෙන් $\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ ලැබෙයි.

එබැවින් $l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවලට සමදුරින් පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක

$\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ සමීකරණ සපුරාලයි. **(05)**

$l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවලට සමදුරින් පිහිටන සේ $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක් විචලනය වේ නම් එවිට, P යනු $l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවල කෝණ සමච්ඡේදක මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි.

එබැවින්, කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ වේ. **(05)** **[25]**

$2x-11y-10=0$ හා $10x+5y-2=0$ රේඛාවල කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$\frac{2x-11y-10}{\sqrt{2^2+(-11)^2}} = \pm\frac{10x+5y-2}{\sqrt{10^2+5^2}}$ වේ. **(05)**

එනම්, $2x-11y-10=\pm(10x+5y-2) \Rightarrow x+2y+1=0$ හෝ $2x-y-2=0$ වේ.

(05) **(05)**

θ යනු $2x-11y-10=0$ හා $x+2y+1=0$ රේඛා අතර කෝණය යැයි ගනිමු.

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{11}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \frac{3}{4} < 1$$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $2x-11y-10=0$ හා $10x+5y-2=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x+2y+1=0$ වේ. **(05)**

$4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ රේඛාවල කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$\dfrac{4x-7y-8}{\sqrt{4^2+(-7)^2}}=\pm\dfrac{8x+y-4}{\sqrt{8^2+1^2}}$ වේ. **(05)**

එනම්, $4x-7y-8=\pm(8x+y-4)\Rightarrow x+2y+1=0$ හෝ $2x-y-2=0$ වේ.
(05) **(05)**

ϕ යනු $4x-7y-8=0$ හා $x+2y+1=0$ රේඛා අතර කෝණය යැයි ගනිමු.

එවිට, $\tan\phi=\left|\dfrac{\frac{4}{7}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\dfrac{3}{2}>1$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර

මහා කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x+2y+1=0$ වේ. **(05)** **[50]**

(b) $P_0(x_0,y_0)$ යනු $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ හා $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

එවිට, $x_0{}^2+y_0{}^2+2gx_0+2fy_0-r^2=0\rightarrow(1)$ හා $x_0{}^2+y_0{}^2-r^2=0\rightarrow(2)$ යැයි ලැබේ.

$(1)-(2)\Rightarrow 2gx_0+2fy_0=0\Rightarrow gx_0+fy_0=0$ වේ. **(05)**

එබැවින්, ඡේදන ලක්ෂ්‍ය $gx+fy=0$ රේඛාව මත පිහිටයි. **(05)**

මෙම රේඛාව මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බැවින් හා $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මූල ලක්ෂ්‍යය බැවින් g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ වෘත්තය $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරයි. **(05)** **[15]**

---

g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තය $x^2+y^2-4=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරයි. **(05)**

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තයේ අරය $\sqrt{g^2+f^2+4}$ වේ. **(05)**

$(-g,-f)$ කේන්ද්‍රයේ සිට $y+5=0$ රේඛාවට දුර $\left|-f+5\right|$ වේ. **(05)**

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තය $y+5=0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන බැවින්

$\sqrt{g^2+f^2+4}=\left|-f+5\right|\Rightarrow g^2+f^2+4=f^2-10f+25\Rightarrow g^2+10f-21=0\rightarrow(1)$
(05)

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තය $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යයි නම්

$1+1+2g+2f-4=0 \Rightarrow g+f=1$ යැයි ලැබෙයි. **(05)**

$g+f=1$ යැයි (1) හි ආදේශයෙන්

$g^2-10g-11=0 \Rightarrow (g-11)(g+1)=0 \Rightarrow g=11$ හෝ -1 වේ.

(05) **(05)**

$g=11$ විට $f=-10$ වේ. **(05)**

$g=-1$ විට $f=2$ වේ. **(05)**

g හා f සඳහා අගය කුලක දෙකක් ඇති බැවින් වෘත්ත දෙකක් පවතී. **(05)** **[50]**

වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ

$x^2+y^2+22x-20y-4=0$ හා $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ වේ.

(05) **(05)** **[10]**

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ බව සාධනය කරන්න.

$$a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

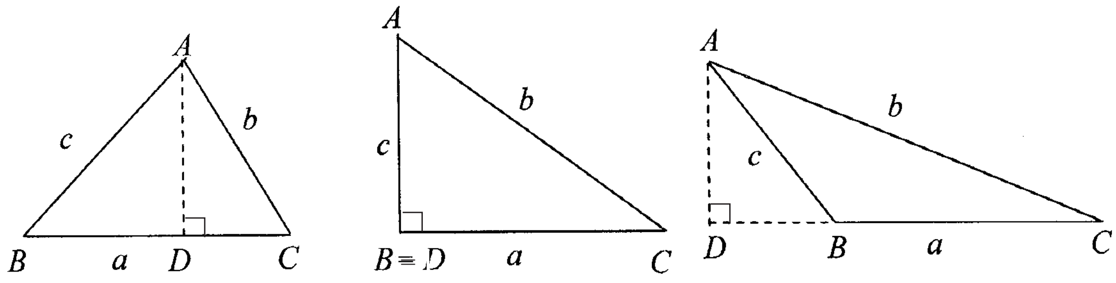
(b) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta-2\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(c) $5\cos^2\theta+18\cos\theta\sin\theta+29\sin^2\theta$ යන්න, $a+b\cos(2\theta+\alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

$$8(\cos x+\sin x)^2+2(\cos x+5\sin x)^2=19$$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(a)



(i) ABC සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයකි. (ii) ABC සෘජු කෝණී ත්‍රිකෝණයකි. (iii) ABC මහා කෝණී ත්‍රිකෝණයකි.

$AD = AB\sin B = AC\sin C$, $AD = AB\sin B = AC\sin C$, $AD = AB\sin(\pi - B) = AC\sin C$

$\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, **(05)** $\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, **(05)** $\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ **(05)**

මෙලෙසම $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ බව පෙන්විය හැකිය. **(05)**

$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ **[20]**

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b-c}{\sin B - \sin C}$. **(05)**

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{b-c}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

(05) **(05)** **(05)**

$a = (b-c)\cos\dfrac{A}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{B-C}{2}$. **(05)** **[25]**

(b) $k = \tan\theta - 2\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ යැයි ගනිමු.

$= \tan\theta - 2\dfrac{\tan\theta - 1}{1+\tan\theta} = \dfrac{\tan^2\theta - \tan\theta + 2}{1+\tan\theta}$

(05)

එනම්, $\tan^2\theta - (k+1)\tan\theta + 2 - k = 0$ වේ. **(05)**

$(k+1)^2 - 4(2-k) \geq 0$ ම නම් පමණක් මෙම සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් තිබෙයි. **(05)**

එනම්, $k^2 + 6k - 7 \geq 0$ ම නම් පමණක් **(05)**

එනම්, $(k+7)(k-1) \geq 0$ ම නම් පමණක් **(05)**

එනම්, $k \leq -7$ හෝ $k \geq 1$ ම නම් පමණක් **(05)**

එබැවින්, θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකිය. **[30]**

(c) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$

$= \frac{5}{2}(1+\cos 2\theta) + 9\sin 2\theta + \frac{29}{2}(1-\cos 2\theta)$ **(05)**

$= 17 - 12\cos 2\theta + 9\sin 2\theta$

$= 17 - 15\left(\frac{4}{5}\cos 2\theta - \frac{3}{5}\sin 2\theta\right)$ **(05)**

$= 17 - 15(\cos\alpha\cos 2\theta - \sin\alpha\sin 2\theta)$; මෙහි $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ වේ.
(05) **(05)**

$= 17 - 15\cos(2\theta + \alpha)$; මෙහි $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ වේ.
(05)

$= a + b\cos(2\theta + \alpha)$; මෙහි $a = 17$, $b = -15$ වන අතර $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ වන පරිදි α වේ. **[25]**

$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$

$8(\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x) + 2(\cos^2 x + 10\cos x\sin x + 25\sin^2 x) = 19$
(05) **(05)**

$10\cos^2 x + 36\cos x\sin x + 58\sin^2 x = 19$ **(05)**

$5\cos^2 x + 18\cos x\sin x + 29\sin^2 x = \frac{19}{2}$ **(05)**

$17 - 15\cos(2x + \alpha) = \frac{19}{2}$; මෙහි $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ වන පරිදි α වේ.
(05) **(05)**

$15\cos(2x + \alpha) = 17 - \frac{19}{2} = \frac{15}{2}$ **(05)**

$\cos(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$2x + \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ මෙහි n යනු නිඛිලයක් වේ.
(05) **(05)**

$x = n\pi - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}$; මෙහි n යනු නිඛිලයක් වන අතර $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ වන පරිදි α වේ. **(05)** **[50]**

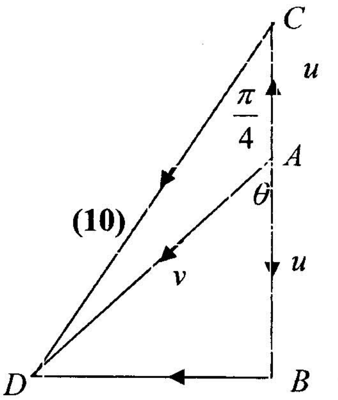
2.2.2. **II** ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. දකුණු දිශාවට සෘජු මාර්ගයක් දිගේ u km h^{-1} වේගයෙන් දුවන පිරිමි ළමයෙකුට සුළඟක් බටහිර දිශාවට හමා යනු දනේ. උතුරු දිශාවට සෘජු මාර්ගයක් දිගේ එම වේගයෙන්ම ඔහු දුවන විට ඔහුට සුළඟ නිරිත දිශාවට හමා යනු දනේ. සුළඟේ චලිත සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ **එකම රූප සටහනක** අඳින්න.

ඒ නයින්, සුළඟේ සත්‍ය වේගය හා දිශාව සොයන්න.



v යනු සුළඟේ සත්‍ය වේගය යැයි ද, θ යනු සුළඟේ සත්‍ය දිශාව යැයි ද ගනිමු.

$$DB = 2u\tan\frac{\pi}{4} = 2u \quad \textbf{(05)}$$

$$v = \sqrt{(2u)^2 + u^2} = \sqrt{5}u\,. \quad \textbf{(05)}$$

$$\tan\theta = \frac{2u}{u} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}2 \quad \textbf{(05)} \qquad \textbf{[15]}$$

[10]

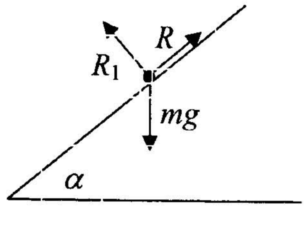
1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

බොහෝ අපේක්ෂකයන් ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ නිවැරදිව ඇඳ නොතිබුණි. දිශා ද නිවැරදිව දක්වා නොතිබුණු නිසා අවසාන පිළිතුර කරා ළඟාවීමට නොහැකිවීමෙන් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 30% තරම් පහළ මට්ටමක පැවතුණි. මෙවැනි අභ්‍යාසවලදී දී ඇති තොරතුරු සපුරාලන රූප සටහන නිවැරදිව ඇඳ ගැනීම අත්‍යවශ්‍ය වේ.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව තිරසට α කෝණයකින් ආනත බෑවුමක් දිගේ එහි මුදුනේ සිට නිශ්චලතාවෙන් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් මුදා හැරේ. මුදුනේ සිට d දුරක් පහළට චලනය වීම සඳහා අංශුවට තත්පර එකක් ගතවේ නම්, අංශුවේ චලිතයට එරෙහි ප්‍රතිරෝධය වන R නියතයක් යැයි උපකල්පනය කරමින්, $R = m(g\sin\alpha - 2d)$ බව පෙන්වන්න.

මුදුනේ සිට ගමන් කරන ලද දුර d වන විට, අංශුවේ ප්‍රවේගය ද සොයන්න.



බෑවුම දිගේ පහළට අංශුවේ චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

$mg\sin\alpha - R = mf$ ලැබේ. **(05)** මෙහි f යනු අංශුවේ ත්වරණය වේ.

$$f = g\sin\alpha - \frac{R}{m}$$

බෑවුම දිගේ පහළට අංශුවේ චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$$d = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{R}{m}\right)1^2 \Rightarrow R = m(g\sin\alpha - 2d)$$

(05) **(05)** **[15]**

$$\therefore f = g\sin\alpha - (g\sin\alpha - 2d) = 2d \quad \textbf{(05)}$$

බෑවුම දිගේ පහළට අංශුවේ චලිතය සඳහා $v = u + at$ යෙදීමෙන්

$v = 2d.1 \Rightarrow v = 2d$ ලැබේ. **(05)** **[10]**

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

ප්‍රශ්නය ව්‍යුහගත කර ඇති අනුපිළිවෙළට පිළිතුරු සැපයූයේ නම් පිළිතුරට හිමි මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමේ පහසුතාව වැඩිවීමට ඉඩ තිබුණි. II පත්‍රයෙහි A කොටසේ පහසුතාව 50% ඉක්මවූ ප්‍රශ්න දෙක අතුරෙන් එක් ප්‍රශ්නයක් මෙය වේ.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. සුමට තිරස් තලයක සිට h උසින් පිහිටි, ස්කන්ධය m වූ සුමට අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ නිශ්චලතාවෙන් වැටෙන අතර තලයේ ගැටී පොලා පනී. ගැටීම නිසා ඇති වන චාලක ශක්ති හානිය $\frac{mgh}{4}$ වේ නම්, අංශුව හා තලය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය සොයන්න. අංශුව $\frac{3h}{4}$ උසකට පොලා පනින බව පෙන්වන්න.

v යනු තලයේ ගැටීමට මොහොතකට පෙර අංශුවේ ප්‍රවේගය යැයි ගනිමු.

එවිට, $v = \sqrt{2gh}$ වේ. **(05)**

තලයේ ගැටීමෙන් මොහොතකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය ev; **(05)** මෙහි e යනු අංශුව හා තලය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වේ.

ගැටීම නිසා ඇතිවන චාලක ශක්ති හානිය $= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(ev)^2$

$$= \frac{1}{2}mv^2(1-e^2) = \frac{mgh}{4}$$

$$\Rightarrow mgh(1-e^2) = \frac{mgh}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{(05)} \qquad \textbf{[15]}$$

උඩු අතට අංශුවේ චලිතය සඳහා $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$0 = (ev)^2 - 2gs$; **(05)** මෙහි s යනු අංශුව පොලා පනින උස වේ.

$$s = \frac{(ev)^2}{2g} = \frac{\frac{3gh}{2}}{2g} = \frac{3}{4}h \quad \textbf{(05)} \qquad \textbf{[10]}$$

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

බොහෝ අපේක්ෂකයන් චාලක ශක්ති හානිය නිවැරදිව සොයා එමගින් අංශුව පොලා පනින උස පළමුව ලබාගෙන පසුව ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය සොයා ගෙන තිබිණි. නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයේ යෙදීම් හා චාලක ශක්ති හානිය ගණනය කිරීම පිළිබඳ නිසි අවබෝධයකින් තොරව පිළිතුරු සපයා තිබූ බැවින්, පිළිතුරු සතුටුදායක මට්ටමක නොපැවතුණි.

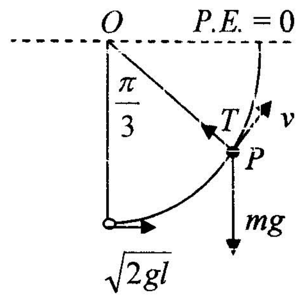
4 වන ප්‍රශ්නය

4. ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O නම් ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. සිරස් තලයක අංශුව නිදහස් ලෙස එල්ලෙමින් පවතින විට සිරස් තලයේ OP ට ලම්බව $\sqrt{2gl}$ ප්‍රවේගයක් අංශුවට දෙනු ලැබෙයි. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යොදාගනිමින්, OP යටි අත් සිරස සමග $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න. මෙම මොහොතේ දී තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}mg$ බව පෙන්වන්න.

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්

$\frac{1}{2}m(2gl) - mgl = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\frac{\pi}{3}$ ලැබේ. **(10)**

$\therefore v = \sqrt{gl}$ **(05)** **(15)**



PO දිගේ අංශුවේ චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

$T - mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{mv^2}{l} = mg$ ලැබේ. **(05)**

$T - \frac{1}{2}mg = mg \quad \because v = \sqrt{gl}$ **(05)**

$T = \frac{3}{2}mg$ **[10]**

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයන් වැඩි දෙනෙක් සාර්ථකව පිළිතුරු සපයා තිබුණි. පහසුතාව ද 65%ක් වන, තරමක් ඉහළ මට්ටමක පැවතුණි. II පත්‍රයෙහි A කොටසේ පහසුතාව වැඩිම ප්‍රශ්නය මෙයයි.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ වේ; මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ට සුපුරුදු අර්ථ ඇත. $\mathbf{b}$ යනු විශාලත්වය $\sqrt{3}$ සහිත දෛශිකයකි. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ දෛශික අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ නම්, $\mathbf{b}$ යන්න $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ආකාරයෙන් සොයන්න; මෙහි $x(<0)$ හා y යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ හා $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ වේ. **(05)**

$\mathbf{a}.\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}).(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x + \sqrt{3}y = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 2.\sqrt{3}.\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}(1-y)$ වේ.

(05) **(05)**

$x^2 + y^2 = 3(1-y)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 4y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0$ හෝ $\frac{3}{2}$ වේ. **(05)**

$y = 0$ විට $x = \sqrt{3}$ වේ.

$y = \frac{3}{2}$ විට $x = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ වේ.

එවිට, $\mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$ වේ. **(05)** **[25]**

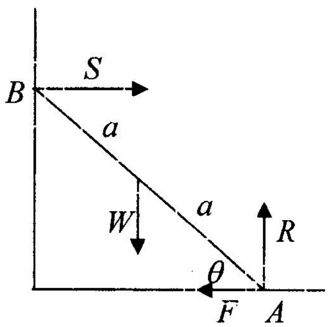
---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

සංකේතාත්මකව දෛශික නිරූපණය කිරීම නිවැරදි නොවීම බොහෝ පිළිතුරුවල දක්නට ලැබුණු දුර්වලතාවක් වන අතර දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතයෙහි භාවිත හැකියාව ද ඉතාමත් අඩු මට්ටමක පැවතුණි. මෙම ප්‍රශ්නයට අදාළ සංඛ්‍යාත්මක පිළිතුරුවල සුළු කිරීමේ දුර්වලතා ද දක්නට තිබුණි. මේ හේතු නිසා ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 17%ක තරම් පහළ මට්ටමක පැවතුණි.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. බර W හා දිග $2a$ වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තිරස් පොළවක් මත ද, B කෙළවර AB අඩංගු සිරස් තලයට ලම්බ සුමට සිරස් තාප්පයකට එරෙහි ව ද සිටින සේ සමතුලිතතාවේ පවතී. දණ්ඩ සහ පොළොව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\sqrt{\frac{3}{2}}$ නම්, දණ්ඩ ලිස්සා යෑමට ආසන්න මොහොතේදී දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය සොයන්න.



තිරස්ව බල විභේදනයෙන් $F = S$ ලැබේ. **(05)**

සිරස්ව බල විභේදනයෙන් $R = W$ ලැබේ. **(05)**

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$Wa\cos\theta = S2a\sin\theta \Rightarrow S = \frac{1}{2}W\cot\theta$ ලැබේ. **(05)**

$\frac{F}{R} = \frac{1}{2}\cot\theta \le \mu = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \tan\theta \ge \frac{1}{\sqrt{6}}$ **(05)**

අවශ්‍ය කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ වේ. **(05)**

[25]

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

නිවැරදි රූප සටහනක් ඇඳ ඝර්ෂණ බලයේ දිශාව නිවැරදිව ලකුණු කර නොතිබීම නිසා පිළිතුරු සාර්ථක වී තිබුණේ ඉතා අඩුවෙනි. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය වන θ දැක්වීමේදී tan θ හි අගය පමණක් දී තිබූ බැවින් සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයෙහි අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි යැයි ගනිමු. $P(A) = 2p$, $P(B) = p^2$ හා $P(C) = 4p - 1$ නම්, p හි අගය සොයන්න.

A, B හා C නිරවශේෂ බැවින් $A \cup B \cup C = \Omega$ වේ.

$P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1$ **(05)**

නමුත්, A, B හා C අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර බැවින්

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ වේ. **(05)**

$= 2p + p^2 + 4p - 1 = 1$ **(05)**

එනම්, $p^2 + 6p - 2 = 0 \Rightarrow p = -3 \pm \sqrt{11}$ වේ. **(05)**

p සෘණ විය නොහැකි බැවින් $p = -3 + \sqrt{11}$ වේ. **(05)**

[25]

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

නියැදි අවකාශයට අයත් සිද්ධි සියල්ල සිදුවීමේ සම්භාවිතාව 1 බව නොසැලකීමත් නිරවශේෂ සහ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර යන වචනවල අර්ථ නොදැනීම හෝ ඒ පිළිබඳව සැලකිලිමත් නොවීමත් නිසා බොහෝ දෙනකුට පිළිතුර ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයෙහි ස්වායත්ත සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. A හා $(B \cup C)$ යනු ස්වායත්ත සිද්ධි බව පෙන්වන්න.

$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\}$ **(05)**

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\}$ **(05)**

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

(05)

$= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)$ A, B හා C ස්වායත්ත සිද්ධි බැවින්

$= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B)P(C)\}$

$= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\}$ **(05)**

$= P(A)\{P(B \cup C)\}$ **(05)**

එබැවින්, A හා $(B \cup C)$ ස්වායත්ත සිද්ධි වේ. **[25]**

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

කුලක ආශ්‍රිත සම්භාවිතාව පිළිබඳ මූලික දැනුම ඉතා අඩු බව දක්නට ඇත. ස්වායත්තතාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේය සාධනය කිරීමේදී ලබා ගත් දැනුම, වෙනත් අවස්ථාවකට යොදා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. මේ නිසාම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 11%ක තරම් ඉතා අඩු මට්ටමක පැවතුණි.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. නිරීක්ෂණ 100 ක මධ්‍යනයය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 30 හා 4.1 ලෙස ගණනය කර ඇත. එක් නිරීක්ෂණයක්, නිවැරදි අගය 30 වෙනුවට 40 සාවද්‍ය ලෙස ලේඛන ගත කර ඇති බව පසුව සොයාගෙන ඇත. නිරීක්ෂණ 100 හි නිවැරදි මධ්‍යනයය හා සම්මත අපගමනය ආගණනය කරන්න.

නිවැරදි මුළු එකතුව $= 100 \times 30 - 40 + 30 = 2990$. **(05)**

$\therefore$ නිවැරදි මුළු මධ්‍යනයය $= \dfrac{2990}{100} = 29.9$. **(05)** **[10]**

වර්ගවල නිවැරදි මුළු එකතුව $= 100(4.1^2 + 30^2) - 40^2 + 30^2$ **(05)**

$= 100(16.81 + 900) - 700$

$= 91681 - 700 = 90981$

$\therefore$ නිවැරදි විචලතාව $= \dfrac{90981}{100} - 29.9^2 = 909.81 - 894.01 = 15.8$ **(05)**

$\therefore$ නිවැරදි සම්මත අපගමනය $= \sqrt{15.8} = 3.975$ හෝ 3.97 **(05)** **[15]**

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයූ අපේක්ෂකයන් පළමුවන කොටසට සාර්ථක පිළිතුරු දී තිබූ නමුත් දෙවන කොටසේදී සුළු කිරීමේ දුර්වලතා දක්නට ලැබිණි. මේ නිසා සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියක මධ්‍යනයය හා සම්මත අපගමනය ආශ්‍රිත සරල ගණනය කිරීමේ භාවිත පිළිබඳ දුෂ්කරතා ද දැකිය හැකිවිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. ජෛවකීය සිසුන්ට දෙන ලද පරීක්ෂණයක් සඳහා A හා B පාසල්වල මධ්‍යන්‍ය ලකුණු පිළිවෙළින් 31 හා 45 වෙයි. A පාසලෙහි ලකුණුවල ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය 5 වෙයි. ප්‍රතිඵල සැසඳීම සඳහා B පාසලෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය, A පාසලෙහි ඒවාට සමාන ද, B පාසලෙහි ලකුණු 85 පරිණාමනය යටතේ ලකුණු 63 ද වන පරිදි රේඛීය පරිණාමනයක් මගින් B පාසලෙහි ලකුණු පරිමාණය කෙරේ. රේඛීය පරිණාමනය සොයා, **ඒ නයින්**, B පාසලෙහි ලකුණුවල ව්‍යාප්තියේ මුල් සම්මත අපගමනය සොයන්න.

$y = ax + b$ යනු රේඛීය පරිණාමනය යැයි ගනිමු; මෙහි x යනු මුල් අගය හා y යනු නව අගය වේ.

එවිට, $63 = 85a + b \to (1)$ ලැබේ. **(05)**

$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow 31 = 45a + b \to (2)$ **(05)**

$(1) - (2) \Rightarrow 40a = 32 \Rightarrow a = 0.8$

(1) න් $31 = 45 \times 0.8 + b \Rightarrow b = -5$ යැයි ලැබේ.

එබැවින්, රේඛීය පරිණාමනය $y = 0.8x - 5$ වේ. **(05)** **[15]**

---

y හි සම්මත අපගමනය $= a \times x$ හි සම්මත අපගමනය

$\Rightarrow 5 = \frac{4}{5} \times x$ හි සම්මත අපගමනය $\Rightarrow x$ හි සම්මත අපගමනය $= 6.25$

(05) **(05)** **[10]**

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නයට අදාළ සංඛ්‍යානය හා රේඛීය (ඒකජ) පරිණාමන පිළිබඳ දැනුම බහුතරයකට නොතිබිණි. මේ නිසා පහසුතාව 6%කට සීමා වී තිබුණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) P නම් අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ දී ගුරුත්වය යටතේ u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. $\frac{u}{2g}$ කාලයකට පසු, Q නම් තවත් අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ දී ගුරුත්වය යටතේ $v(>u)$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. A යනු P අංශුව ළඟා වන ඉහළතම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. P හා Q අංශු A ලක්ෂ්‍යයේදී හමුවෙයි. P හා Q අංශුවල සම්පූර්ණ චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර **එකම රූප සටහනක** අඳින්න.

මෙම ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර යොදාගෙන

(i) $OA=\frac{u^2}{2g}$ බව,

(ii) $v=\frac{5u}{4}$ හා A ලක්ෂ්‍යයේදී Q අංශුවේ ප්‍රවේගය $\frac{3u}{4}$ බව,

(iii) Q අංශුව ඉහළතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවන විට P අංශුව, O ලක්ෂ්‍යයේ සිට පිහිටන උස $\frac{7u^2}{32g}$ බව

පෙන්වන්න.

(*b*) ස්කන්ධය M kg වන මෝටර් රථයක් සියලු වේග සඳහා නියතයක් වන R ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව තැනිතලා මාර්ගයක ගමන් කෙරේ. එන්ජිමෙහි උපරිම බලය H kW හා තැනිතලා මාර්ගයක මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ නම්, M, H හා v ඇසුරෙන් R ප්‍රතිරෝධය සොයන්න.

තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ

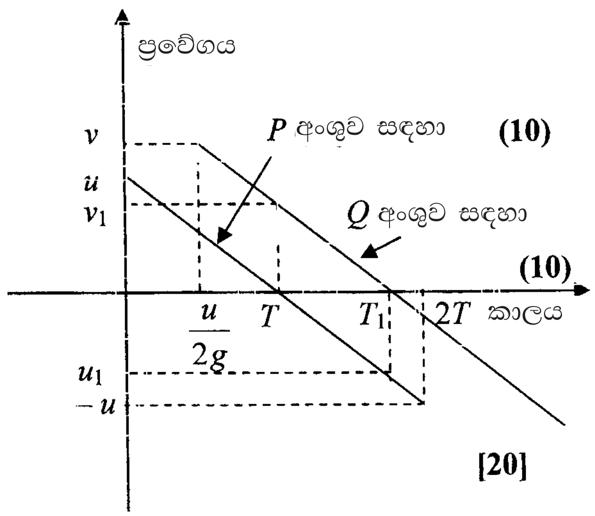
(i) $\frac{v}{3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ වේගයෙන් කෙළින්ම ඉහළට,

(ii) $\frac{v}{2}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ වේගයෙන් කෙළින්ම පහළට

චලනය වන විට M, H, v, g හා α ඇසුරෙන් මෝටර් රථයේ ත්වරණය සොයන්න.

(ii) අවස්ථාවේදී මෝටර් රථයේ ත්වරණය (i) අවස්ථාවේදී මෝටර් රථයේ ත්වරණය මෙන් දෙගුණයක් නම්, M, H, v හා g ඇසුරෙන් $\sin\alpha$ සොයන්න.

මෙම අවස්ථාවේදී, මෝටර් රථය මාර්ගයේ කෙළින්ම ඉහළට චලනය වන විට එයට ලබාගත හැකි උපරිම වේගය v ඇසුරෙන් සොයන්න.



(*a*) (i) T යනු අංශුවට A ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට ගතවන කාලය යැයි ගනිමු.

එවිට, ප්‍රස්තාරයෙන් $T=\frac{u}{g}$ ලැබේ. **(05)**

තවද, ප්‍රස්තාරයෙන්

$OA=\frac{1}{2}uT=\frac{u^2}{2g}$ යැයි ලැබේ.

(05) **[10]**

(ii) v_1 යනු A ලක්ෂ්‍යයේදී Q අංශුවේ ප්‍රවේගය යැයි ගනිමු.

එවිට, Q සඳහා ප්‍රස්තාරයෙන්

$$\frac{v-v_1}{T-\frac{u}{2g}} = g \Rightarrow v_1 = v - g\left(T-\frac{u}{2g}\right) = v-\frac{u}{2} \rightarrow (1) \text{ ලැබේ.}$$

(05) **(05)**

තවද, ප්‍රස්තාරයෙන්

$$\left(\frac{v+v_1}{2}\right)\left(T-\frac{u}{2g}\right) = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow v+v_1 = 2u \rightarrow (2) \text{ ලැබේ.}$$

(05) **(05)**

(1) හා (2) න් $v=\frac{5u}{4}$ හා $v_1=\frac{3u}{4}$ ලැබේ.

(05) **(05)** **[30]**

(iii) T_1 යනු Q අංශුව ස්වකීය ඉහළතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට ගතවන කාලය ද u_1 යනු මෙම මොහොතේදී P අංශුවේ ප්‍රවේගය යැයි ද ගනිමු.

එවිට, Q සඳහා ප්‍රස්තාරයෙන්

$$T_1-\frac{u}{2g}=\frac{v}{g} \Rightarrow T_1 = \frac{5u}{4g}+\frac{u}{2g}=\frac{7u}{4g} \text{ හා } \frac{u_1}{T_1-T} = -g \Rightarrow u_1 = -\frac{3u}{4} \text{ යැයි ලැබේ.}$$

(05) **(05)**

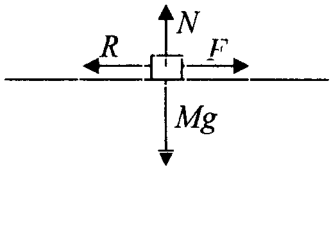
Q අංශුව ස්වකීය ඉහළතම ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන විට O ලක්ෂ්‍යයේ සිට P අංශුවේ පිහිටීමට උස h යැයි ගනිමු.

එවිට, ප්‍රස්තාරයෙන්

$$h=\frac{1}{2}\left(u+\frac{3u}{4}\right)(2T-T_1) = \left(\frac{7u}{8}\right)\left(\frac{2u}{g}-\frac{7u}{4g}\right) = \frac{7u^2}{32g} \text{ යැයි ලැබේ.}$$

(05) **(05)** **[20]**

(b) උපරිම වේගයේදී ත්වරණයක් නොමැති අතර මෝටර් රථය මත ක්‍රියා කරන බල සමතුලිතතාවේ පවතී.



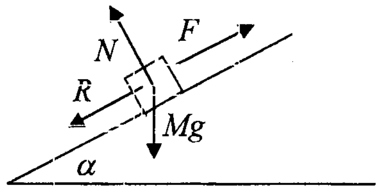
එවිට, $F-R=0$ යැයි ලැබේ. **(05)**

$$Fv = P \Rightarrow Fv = 10^3 H \Rightarrow F = \frac{10^3 H}{v}$$ **(05)**

එබැවින්, $R=\frac{10^3 H}{v}$ ලැබේ. **(05)** **[15]**

(i) සෘජු මාර්ගය දිගේ කෙළින්ම ඉහළට චලනය වන විට මෝටර් රථයේ ත්වරණය a යැයි ගනිමු.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{3}} = \frac{3 \times 10^3 H}{v} \quad \textbf{(05)}$$



එවිට, $F - Mg\sin\alpha - R = Ma$ ලැබේ. **(05)**

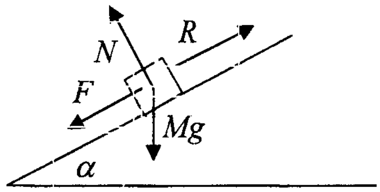
$$\frac{3 \times 10^3 H}{v} - Mg\sin\alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma$$

$$a = \frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g\sin\alpha \quad \textbf{(05)}$$

[15]

(ii) සෘජු මාර්ගය දිගේ කෙළින්ම පහළට චලනය වන විට මෝටර් රථයේ ත්වරණය a' යැයි ගනිමු.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{2}} = \frac{2 \times 10^3 H}{v} \quad \textbf{(05)}$$



එවිට, $F + Mg\sin\alpha - R = Ma'$ ලැබේ. **(05)**

$$\frac{2 \times 10^3 H}{v} + Mg\sin\alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma'$$

$$a' = \frac{10^3 H}{Mv} + g\sin\alpha \quad \textbf{(05)}$$

[15]

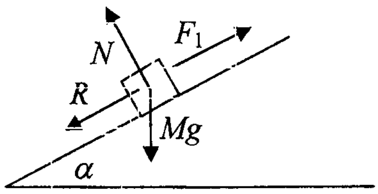
$$a' = 2a \Rightarrow \frac{10^3 H}{Mv} + g\sin\alpha = 2\left(\frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g\sin\alpha\right) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{10^3 H}{Mgv}$$

(05) **(05)** **[10]**

සෘජු මාර්ගය දිගේ කෙළින්ම ඉහළට චලනය වන විට මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය v_1 යැයි ගනිමු.

$$F_1 = \frac{10^3 H}{v_1} \quad \textbf{(05)}$$

උපරිම වේගයේදී ත්වරණයක් නොමැති අතර මෝටර් රථය මත ක්‍රියා කරන බල සමතුලිතතාවේ පවතී.



එවිට, $F_1 - Mg\sin\alpha - R = 0$ යැයි ලැබේ. **(05)**

$$\frac{10^3 H}{v_1} - Mg\left(\frac{10^3 H}{Mgv}\right) - \frac{10^3 H}{v} = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2} \quad \textbf{(05)}$$

[15]

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) O ලක්ෂ්‍යයක සිට k උසකින් පිහිටි C නම් ලක්ෂ්‍යයකදී තිරසට θ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයක ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. ප්‍රක්ෂේපණ තලය මත O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ තිරස් හා සිරස් රේඛා පිළිවෙළින් Ox හා Oy අක්ෂ ලෙස ගනිමින් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක් සලකමු. t කාලයේදී අංශුව (x, y) ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටයි නම්,

$y = k + x\tan\theta - \dfrac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2}$ බව පෙන්වන්න.

h ධන වන $A(0, h)$ ලක්ෂ්‍යයේදී තිරසට α කෝණයකින් ආනතව v ප්‍රවේගයෙන් P නම් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. එම මොහොතේදීම $B\left(0, \dfrac{h}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී තිරසට $\beta(>\alpha)$ කෝණයකින් ආනතව w ප්‍රවේගයෙන් Q නම් තවත් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. තිරස් දුර d වන ලක්ෂ්‍යයේදී P හා Q අංශු දෙක හමුවෙයි නම්,

$v\cos\alpha = w\cos\beta$ හා $h = 2d(\tan\beta - \tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

අංශු හමුවීමට ගතවන කාලය $\dfrac{h}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)}$ බව ද පෙන්වන්න.

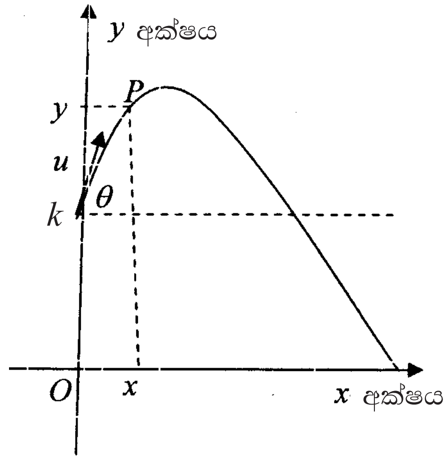
(*b*) තිරස් පොළොවක සිට මීටර 3 ක උසකින් පිහිටි සිවිලිමකට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරක් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සවිකර ඇති චලනය විය හැකි සැහැල්ලු පුමට P නම් කප්පියක් යටින් ද, සිවිලිමට සම්බන්ධ කර ඇති සැහැල්ලු සුමට කප්පියක් උඩින් ද යවා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය $M\,(>m)$ වූ Q නම් අංශුවක් සම්බන්ධ කර ඇත. චලනය විය හැකි P කප්පිය හා Q අංශුව පොළවේ සිට පිළිවෙළින් මීටර $\dfrac{1}{2}$ ක හා මීටර 1 ක උසින් ද, කප්පි සමග ස්පර්ශ නොවන තන්තු කොටස් සිරස්ව ද පිහිටන විට පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරේ.

Q අංශුවේ ත්වරණය හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

Q අංශුව තත්පර $\sqrt{\dfrac{4M + m}{(2M - m)g}}$ කාලයකට පසුව පොළවට ළඟා වන බව හා P කප්පිය පොළොවේ සිට මීටර $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3M}{4M + m}$ උසකට ඉහළ නගින බව පෙන්වන්න.

(*a*) සිරසට $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$y - k = u\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \to (1)$ යැයි ලැබේ. **(10)**



තිරසට $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$x = ut\cos\theta \Rightarrow t = \frac{x}{u\cos\theta}$ යැයි ලැබේ. **(05)**

(1) න්

$y - k = x\tan\theta - \frac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2}$ යැයි ලැබේ. **(05)**

$y = k + \ \tan\theta - \frac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2}$

[20]

තිරසට P අංශුවේ චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

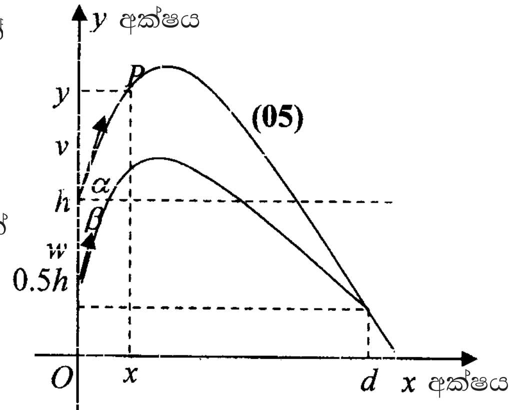
$d = vt_0\cos\alpha \to (2)$ වේ. **(05)** මෙහි t_0 යනු අංශු දෙක හමුවන කාලය වේ.

තිරසට Q අංශුවේ චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$d = wt_0\cos\beta \to (3)$ යැයි ලැබේ. **(05)**

(2) න් (3) න්

$v\cos\alpha = w\cos\beta$ යැයි ලැබේ. **(05)**



[20]

P අංශුව සඳහා පළමුවන කොටසේ දී ලබාගත් ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්

$y_0 = h + d\tan\alpha - \frac{gd^2\sec^2\alpha}{2v^2} \to (4)$ වේ. **(05)** මෙහි y_0 යනු අංශු දෙක හමුවන විට උස වේ.

Q අංශුව සඳහා පළමුවන කොටසේ දී ලබාගත් ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්

$y_0 = \frac{h}{2} + d\tan\beta - \frac{gd^2\sec^2\beta}{2w^2} \to (5)$ යැයි ලැබේ. **(05)**

(4) හා (5) න් $h + d\tan\alpha = \frac{h}{2} + d\tan\beta \Rightarrow h = 2d(\tan\beta - \tan\alpha)$ ලැබේ.

(05) **[15]**

$d = \frac{h}{2(\tan\beta - \tan\alpha)} = \frac{h\cos\alpha\cos\beta}{2(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)} = wt_0\cos\beta$ **(05)**

එනම්, $t_0 = \frac{h}{2w\left(\sin\beta - \sin\alpha\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\right)} = \frac{h}{2w\left(\sin\beta - \sin\alpha\left(\frac{v}{w}\right)\right)} = \frac{h}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)}$

(05) **(05)** **[15]**

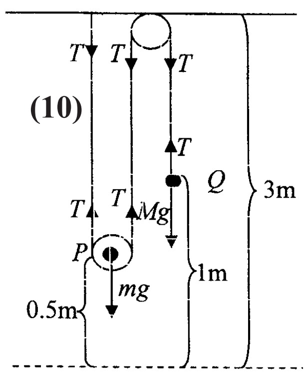
(*b*) a යනු Q අංශුවේ ත්වරණය යැයි ගනිමු.

සිරස්ව පහළට Q අංශුවේ චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

$Mg - T = Ma \rightarrow (1)$ යැයි ලැබේ. **(05)**

සිරස්ව ඉහළට P කප්පියේ චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

$2T - mg = m\dfrac{a}{2} \rightarrow (2)$ යැයි ලැබේ. **(10)**



$(1) \times 2 + (1)$ න් $2Mg - mg = \left(2M + \dfrac{m}{2}\right)a$ යැයි ලැබේ.

එනම්, $a = 2\left(\dfrac{2M - m}{4M + m}\right)g$ ලැබේ. **(05)** **[30]**

---

(1) න් $T = Mg - Ma = Mg\left\{1 - 2\left(\dfrac{2M - m}{4M + m}\right)\right\} = \dfrac{3mMg}{4M + m}$ ලැබේ.

(05) **(05)** **[10]**

සිරස්ව පහළට Q අංශුවේ චලිතය සඳහා $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$1 = 0 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2(2M - m)}{4M + m}\right)gt_0^2$ වේ. **(10)** මෙහි t_0 යනු පොළවට ළඟාවීමට අවශ්‍ය කාලය වේ.

$t_0 = \sqrt{\dfrac{4M + m}{(2M - m)g}}$ තත්පර **[10]**

---

h_0 යනු t_0 කාලය තුළ P කප්පිය ඉහළ නගින උස යැයි ගනිමු.

සිරස්ව ඉහළට P කප්පියේ චලිතය සඳහා $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$h_0 = 0 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2M - m}{4M + m}\right)\left(\dfrac{4M + m}{2M - m}\right) = \dfrac{1}{2}$ මීටර යැයි ලැබේ. **(05)**

v යනු t_0 කාලයේ දී P කප්පියේ ප්‍රවේගය යැයි ගනිමු.

සිරස්ව ඉහළට P කප්පියේ චලිතය සඳහා $v = u + at$ යෙදීමෙන්

$v = 0 + \left(\dfrac{2M - m}{4M + m}\right)g\sqrt{\dfrac{4M + m}{2(M - m)g}} = \sqrt{\left(\dfrac{2M - m}{4M + m}\right)g}$ යැයි ලැබේ.

(05) **(05)**

Q අංශුව පොළවට ළඟා වූ පසු P කප්පිය ඉහළ නගින උස h_1 යැයි ගනිමු.

Q අංශුව පොළවට ළඟා වූ පසු P කප්පියේ චලිතය සඳහා සිරස්ව ඉහළට $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

(05) $0 = \left(\dfrac{2M-m}{4M+m}\right)g - 2gh_1 \Rightarrow h_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2M-m}{4M+m}\right)$ යැයි ලැබේ. **(05)**

මුළු උස $= \dfrac{1}{2} + h_0 + h_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2M-m}{4M+m}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3M}{4M+m}$ මීටර වේ. **(05)** **[30]**

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. A හා B යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත එකිනෙක අතර දුර $8l$ වන ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. ස්කන්ධය m වූ P නම් සුමට අංශුවක් A හා B අතර, AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක තබා ඇත. ස්වාභාවික දිග $3l$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය 4λ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A ලක්ෂ්‍යයට ද, ස්වාභාවික දිග $2l$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් B ලක්ෂ්‍යයට ද P අංශුව සම්බන්ධ කෙරේ.

P අංශුව C ලක්ෂ්‍යයේදී සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, $AC = \frac{42}{11}l$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරේ. P අංශුව, AB දිගේ A ලක්ෂ්‍යයේ සිට x දුරින් පිහිටන විට තන්තු දෙකෙහි ආතති ලබාගන්න.

$\frac{40}{11}l \leq x \leq 4l$ සඳහා P අංශුවේ චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}\left(x - \frac{42}{11}l\right) = 0$ බව පෙන්වන්න.

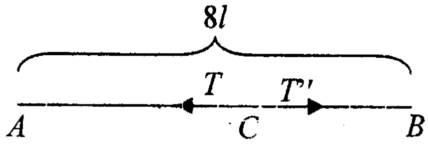
$y = x - \frac{42}{11}l$ යැයි ලිවීමෙන්, $\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml}y = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, A, B හා ω නියත සොයන්න.

P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{41}{11}l$ දුරින් පිහිටන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

P අංශුව C ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන විට AP තන්තුවේ ආතතිය T යැයි ගනිමු.

P අංශුව C ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන විට PB තන්තුවේ ආතතිය T' යැයි ගනිමු.



(05)

එවිට, හුක්ගේ නියමයෙන්

$$T = \left(\frac{AC - 3l}{3l}\right)4\lambda \quad \text{හා} \quad T' = \left(\frac{8l - AC - 2l}{2l}\right)\lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l}\right)\lambda$$ යැයි ලැබේ.

(10) **(10)**

C ලක්ෂ්‍යයේ දී P අංශුව සමතුලිතතාවේ පවතින බැවින්

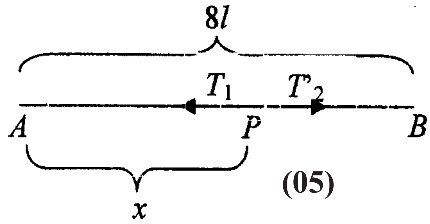
$$T = T' \Rightarrow \left(\frac{AC - 3l}{3l}\right)4\lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l}\right)\lambda \Rightarrow 11AC = 42l \Rightarrow AC = \frac{42}{11}l$$ යැයි ලැබේ.

(05) **(05)** **(05)** **[40]**

P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයේ සිට x දුරින් පිහිටන විට AP තන්තුවේ ආතතිය T_1 යැයි ගනිමු.

P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයේ සිට x දුරින් පිහිටන විට BP තන්තුවේ ආතතිය T_2 යැයි ගනිමු.

එවිට, හුක්ගේ නියමයෙන්



(05)

$$T_1 = \left(\frac{x - 3l}{3l}\right)4\lambda$$ යැයි ලැබේ. **(05)**

$$T_2 = \left(\frac{8l - x - 2l}{2l}\right)\lambda = \left(\frac{6l - x}{2l}\right)\lambda$$ **(05)**

AB දිගේ Q අංශුවේ චලිතය සඳහා නිව්ටන්ගේ නියමය යෙදීමෙන්

$T_2 - T_1 = m\ddot{x}$ යැයි ලැබේ. **(10)**

එනම්, $\left(\frac{6l - x}{2l}\right)\lambda - \left(\frac{x - 3l}{3l}\right)4\lambda = m\ddot{x}$ වේ. **(05)**

එනම්, $m\ddot{x} + \frac{\lambda}{l}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)x - 7\lambda = 0$ වේ. **(05)**

එනම්, $\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}x - \frac{7\lambda}{m} = 0$ වේ.

එනම්, $\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}\left(x - \frac{42}{11}l\right) = 0$ වේ. **(05)** **[40]**

$y = x - \frac{42}{11}l$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $\dot{y} = \dot{x}$ හා $\ddot{y} = \ddot{x}$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml}y = 0 \rightarrow (1)$ යැයි ලැබේ. **(05)** **[10]**

$y = A\cos\varpi t + B\sin\varpi t \rightarrow (2)$

$\dot{y} = -A\varpi\sin\varpi t + B\varpi\cos\varpi t \rightarrow (3)$

$t=0$ හි දී, $x=4l$ හා $\dot{x}=0$ යන්නෙන් $t=0$ හි දී, $y=\dfrac{2}{11}l$ හා $\dot{y}=0$ ගම්‍ය වේ. **(05)**

එබැවින්, $(2) \Rightarrow A=\dfrac{2}{11}l$ හා $(3) \Rightarrow B=0$ වේ.

(05) **(05)**

$\therefore y=\dfrac{2}{11}l\cos\varpi t \Rightarrow \ddot{y}=-\dfrac{2}{11}l\varpi^2\cos\varpi t=-\varpi^2 y$ වේ.

මෙය (1) සමඟ සැසඳීමෙන් $\varpi^2=\dfrac{11\lambda}{6ml} \Rightarrow \varpi=\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}$ ලැබේ. **(05)** **[20]**

$-\dfrac{2}{11}l \le y \le \dfrac{2}{11}l$ සඳහා $y=\dfrac{2}{11}l\cos\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t$ වේ. **(05)**

$\dfrac{40}{11}l \le x \le 4l$ සඳහා $x=\dfrac{42}{11}l+\dfrac{2}{11}l\cos\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t$ වේ. **(05)**

$x=\dfrac{41}{11}l$ වන ලක්ෂ්‍යය කරා P අංශුව ළඟාවීමට ගතවන කාලය t_0 යැයි ගනිමු.

එවිට, $\dfrac{2}{11}\cos\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0=\dfrac{41}{11}-\dfrac{42}{11} \Rightarrow \cos\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0=-\dfrac{1}{2}$ ලැබේ.

(05) **(05)**

$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}t_0=\dfrac{2\pi}{3}$ **(05)**

$\dfrac{40}{11}l \le x \le 4l$ සඳහා $\dot{x}=-\dfrac{2}{11}l\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t$ වේ. **(05)**

මෙම ලක්ෂ්‍යයේ දී P අංශුවේ ප්‍රවේගය

එවිට, $\dot{x}=-\dfrac{2}{11}l\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0=-\dfrac{2}{11}l\left(\sqrt{\dfrac{11\lambda}{6ml}}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\lambda l}{22m}}$ වේ.

(05) **(05)** **[40]**

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) A හා B යනු O ලක්ෂ්‍යයක් සමඟ ඒක රේඛීය නොවන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. D යනු $BD = 2DA$ වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම්, O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් D ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න.

$\overrightarrow{BC} = k\mathbf{a}\ (k > 1)$ හා O, D හා C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නම්, k හි අගය හා $OD : DC$ අනුපාතය සොයන්න.

$\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

තවද, AC ට සමාන්තරව O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාවට E හි දී AB හමුවේ නම්, $6DE = AB$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) Ox හා Oy සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසියානු අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් $(\sqrt{3},0)$, $(0,-1)$ හා $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ වෙයි. විශාලත්ව නිව්ටන $6P, 4P, 2P$ හා $2\sqrt{3}P$ වන බල පිළිවෙළින් OA, BC, CA හා BO පාද දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවට ක්‍රියා කරයි. මෙම බලවල සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

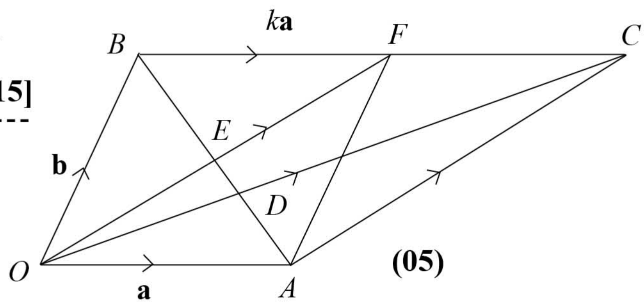
සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව y-අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

විශාලත්වය නිව්ටන $6\sqrt{3}P$ වන වෙනත් බලයක් අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාවට AB දිගේ, බල පද්ධතියට යොදනු ලැබේ. විශාලත්වය නිව්ටන මීටර $10P$ වන යුග්මයකට බල පද්ධතිය ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$

(05) **(05)** **[15]**



(05)

$\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + k\mathbf{a}$ **(05)**

O, D හා C ඒකරේඛීය බැවින්

$\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OC}$ වේ. මෙහි λ පරාමිතියකි.

එනම්, $\frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{b} + k\mathbf{a})$ වේ. **(05)**

$(3\lambda k - 2)\mathbf{a} + (3\lambda - 1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$

a හා **b** යනු සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකක් බැවින්

$3\lambda k - 2 = 0$ හා $3\lambda - 1 = 0$ **(05)** $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ **(05)** හා $k = 2$ ලැබේ. **(05)** **[20]**

$\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OC} \Rightarrow OD = \frac{1}{3}OC \Rightarrow OD = \frac{1}{3}(OD + DC) \Rightarrow 2OD = DC \Rightarrow OD : DC = 1 : 2$

(05) **(05)** **(05)** **[20]**

$\therefore \overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2\mathbf{a}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\mathbf{a} + (\mathbf{b} + 2\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(05)**

F ලක්ෂ්‍යයේ දී BC හමුවන සේ OE රේඛාව දික් කරන්න.

එවිට, OE යන්න AC ට සමාන්තර බැවින් $OACF$ සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(05)**

එබැවින්, $OAFB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

එමනිසා, E යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. **(05)**

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{1}{6}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ **(05)**

$6\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 6DE = AB$ **[20]**

(*b*) Ox දිගේ බල විභේදනයෙන්

$X = 6P + 4P\cos\frac{\pi}{3} + 2P\cos\frac{\pi}{3} = 9P$ ලැබේ. **(10)**

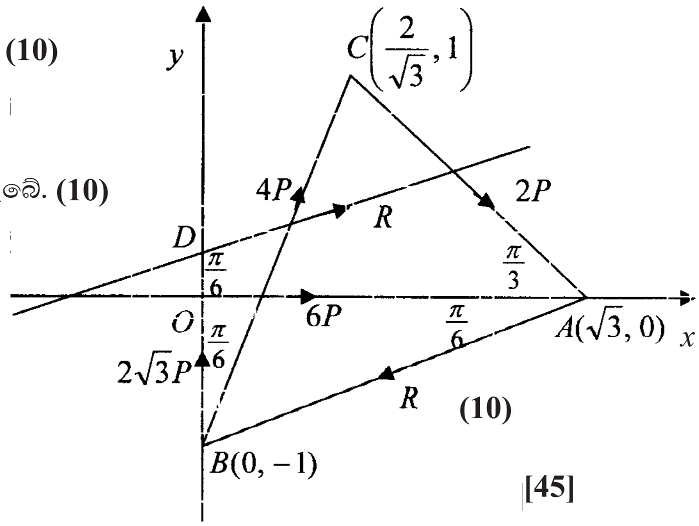
Oy දිගේ බල විභේදනයෙන්

$Y = 2\sqrt{3}P + 4P\sin\frac{\pi}{3} - 2P\sin\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}P$ ලැබේ. **(10)**

$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{81P + 27P} = 6\sqrt{3P}$ **(05)**

$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3\sqrt{3}P}{9P} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ වේ. **(05)**

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ වේ. **(05)**



(10)

[45]

$OD = d$ වන සේ D ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ සම්ප්‍රයුක්තය ගමන් කරයි යැයි සිතමු.

D වටා වාමාවර්තව ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$4P\cos\frac{\pi}{3} \times (d+1) + 6P \times d + 2P\cos\frac{\pi}{3} \times d - 2P\sin\frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} = 0$ යැයි ලැබේ. **(10)**

$2 \times (d+1) + 6 \times d + 1 \times d - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{9}$ යැයි ලැබේ. **(05)** **[15]**

O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක් අනුබද්ධයෙන් සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් (x, y) යැයි ගනිමු.

එවිට, $\frac{y-d}{x} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow y - \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow 9y - 3\sqrt{3}x - 1 = 0$ වේ. **(05)** **[05]**

පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය හා AB දිගේ යොදන බලය සමාන හා ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.

එබැවින්, පද්ධතිය විශාලත්වය $6\sqrt{3}P \times \left(1 + \frac{1}{9}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 10P$ නිව්ටන මීටර වන ඝූර්ණයකට ඌනනය වේ. **(05)** **(05)** **[10]**

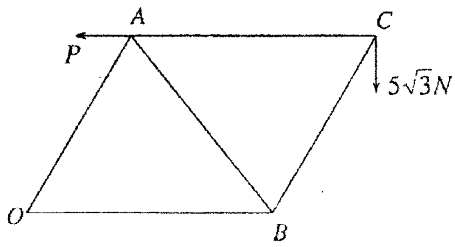
---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (a) එක එකක බර W වන AB හා AC ඒකාකාර සමාන දඬු දෙකක්, A හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇති අතර B හා C කෙළවරවල් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. එක එකක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තල දෙකක් මත B හා C කෙළවරවල් පිහිටන සේ දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ තබා ඇත; BC තිරස් වන අතර BC ට ඉහළින් A වෙයි. B හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

$\tan\theta > 2\tan\alpha$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{1}{2}W(\tan\theta - 2\tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $B\hat{A}C = 2\theta$ වේ. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(b) OA, OB, AC, AB හා BC සැහැල්ලු සමාන දඬු පහක්, රූපයේ දක්වෙන පරිදි රාමුකට්ටුවක් සැදෙන ආකාරයට, ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත.



රාමුකට්ටුව O හි දී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර C හි දී නිව්ටන $5\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. OB තිරස් වන පරිදි A හි දී නිව්ටන් P වන තිරස් බලයක් මගින් රාමුකට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත.

(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) O හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

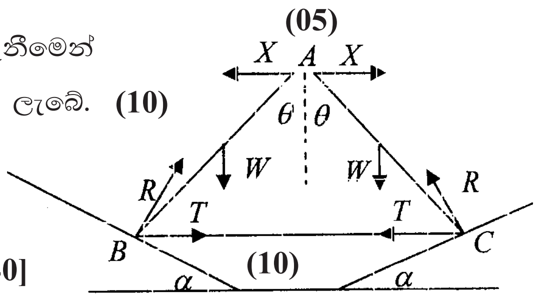
(iii) බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, රාමුකට්ටුව සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

(a) එක් එක් දණ්ඩේ දිග $2a$ යැයි ගනිමු.

සිරසට බල විභේදනයෙන්

$2R\cos\alpha = 2W \Rightarrow R = W\sec\alpha$ යැයි ලැබේ.

(05) **(05)** **[10]**



AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා A වටා වාමාවර්තව සූර්ණ ගැනීමෙන්

$T.2a\cos\theta + R\sin\alpha.2a\cos\theta + Wa\sin\theta - R\cos\alpha.2a\sin\theta = 0$ ලැබේ. **(10)**

$2T + 2W\tan\alpha + W\tan\theta - 2W\tan\theta = 0$ වේ. **(10)**

$T = \frac{W}{2}(\tan\theta - 2\tan\alpha)$ වේ. **(05)** **[40]**

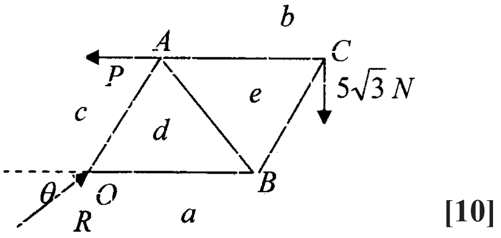
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා B වටා වාමාවර්තව සූර්ණ ගැනීමෙන්

$X.2a\cos\theta - Wa\sin\theta = 0$ ලැබේ. **(05)**

එනම්, $X = \frac{W}{2}\tan\theta$ වේ. **(05)** **[10]**

(b) ඕනෑම දණ්ඩක දිග $2a$ යැයි ගනිමු.

O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්



$P.2a\sin\frac{\pi}{3} - 5\sqrt{3}.\left\{2a + 2a\cos\frac{\pi}{3}\right\} = 0$ ලැබේ. **(05)**

$P = 15\,\text{N}$ වේ. **(05)** **[10]**

O හි ප්‍රතික්‍රියාව R යැයි ද, R තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි යැයි ද ගනිමු.
සිරසට බල විභේදනයෙන්

$R\sin\theta = 5\sqrt{3}$ ලැබේ. **(05)**

තිරසට බල විභේදනයෙන්

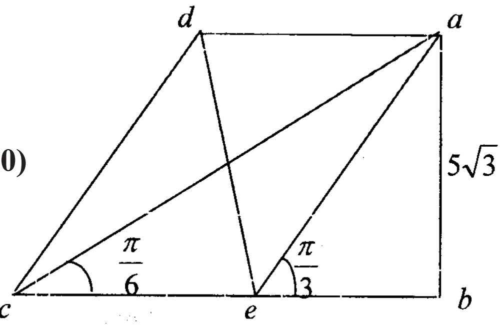
$R\cos\theta = P = 15$ ලැබේ. **(05)**

$R = \sqrt{75+225} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ N වේ. **(05)**

$\tan\theta = \dfrac{5\sqrt{3}}{15} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ වේ. **(05)** **[20]**

එබැවින්, O හි ප්‍රතික්‍රියාව තිරස සමඟ $\dfrac{\pi}{6}$ කෝණයක් සාදයි.
ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහන :

(10)



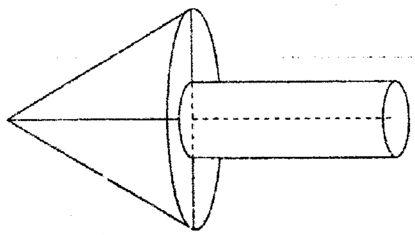
[10]

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
OA	තෙරපුම	10 N
OB	තෙරපුම	10 N
AC	ආතතිය	5 N
AB	ආතතිය	10 N
BC	තෙරපුම	10 N

(25) **(25)** **[50]**

16 වන ප්‍රශ්නය

16. උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිති අක්ෂය මත, ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ දක්වෙන පරිදි එකට සවිකර ඇති ආධාරකයේ අරය $3r$ හා උස h වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් හා අරය r හා උස $2h$ වන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් ඒකාකාර ඝන සංයුක්ත වස්තුවක් සමන්විත වෙයි.

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිති අක්ෂය මත, කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{5}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

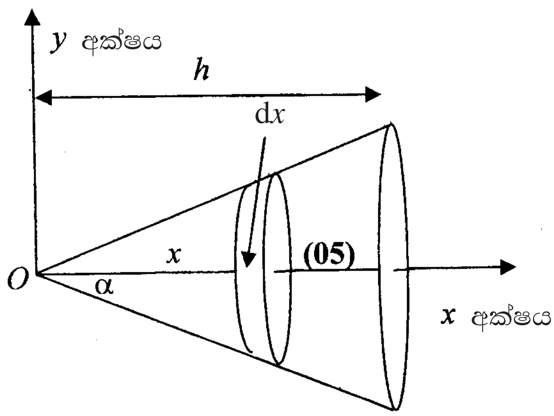
එක කෙළවරක් සිවිලිමකට හා අනෙක් කෙළවර කේතුවේ වෘත්තාකාර පතුලේ පරිධියෙහි A නම් ලක්ෂ්‍යයකට සවිකොට ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සංයුක්ත වස්තුව සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් තිබෙයි.

සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය යටි අත් සිරස සමග α කෝණයක් සාදයි නම්, $\tan\alpha = \frac{12r}{h}$ බව පෙන්වන්න.

කේතුවේ ශීර්ෂයේදී සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය දිගේ P නම් බලයක් යෙදීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය තිරස් වන ආකාරයට සංයුක්ත වස්තුව සමතුලිතතාවේ තැබෙයි. P බලය හා තන්තුවේ ආතතිය, W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න; මෙහි W යනු සංයුක්ත වස්තුවේ බර වෙයි.

සමමිතියෙන්, කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත පිහිටයි. **(05)**

$\bar{x}$ යනු කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට එහි ශීර්ෂය වන O සිට ඇති දුර යැයි ගනිමු.



කේතුවේ ඝනත්වය ρ යැයි ගනිමු.

$$\frac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h\rho\,\bar{x} = \int_0^h \pi(x\tan\alpha)^2 x\rho\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(15)}$$

(05)

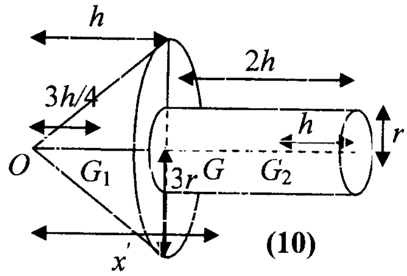
එනම්, $\frac{1}{3}h^3\,\bar{x} = \int_0^h x^3\mathrm{d}x = \frac{h^4}{4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4}h$ වේ. **(05)**

එබැවින්, කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි අක්ෂය මත, ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටයි.

(05) [40]

සමමිතියෙන්, ඍජු ඝන වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G_2, එහි සමමිති අක්ෂය මත, කේතුවේ O ශීර්ෂයේ සිට $2h$ දුරකින් පිහිටයි. **(05)**

පළමුවන කොටස අනුව කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G_1, එහි සමමිති අක්ෂය මත කේතුවේ O ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් පිහිටයි. **(05)**



(10)

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G එහි සමමිති අක්ෂය මත, කේතුවේ O ශීර්ෂයේ සිට x' දුරකින් වේ යැයි ගනිමු.

$$\left(\pi r^2(2h)+\frac{1}{3}\pi(3r)^2h\right)\rho x'=\left(\pi r^2(2h)\right)(2h)\rho+\left(\frac{1}{3}\pi(3r)^2h\right)\rho\left(\frac{3h}{4}\right)$$

(10) **(05)** **(05)** **(05)** (නිවැරදි සමීකරණයට)

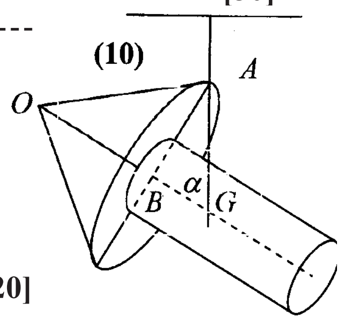
$$5x'=4h+\frac{9}{4}h\Rightarrow x'=\frac{5}{4}h \quad \textbf{(05)}$$

[50]

$AB=3r$ හා $BG=OG-OB=\frac{5h}{4}-h=\frac{h}{4}$ වේ. **(05)**

$\tan\alpha=\frac{AB}{BG}=\frac{12r}{h}$ **(05)**

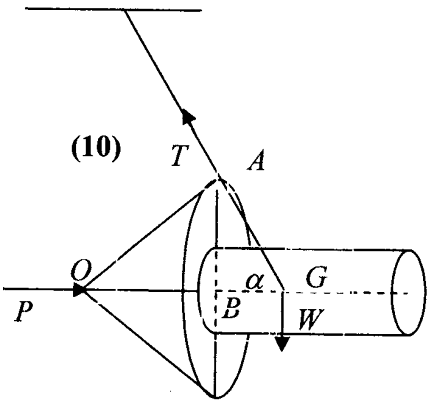
(10)



[20]

---

(10)



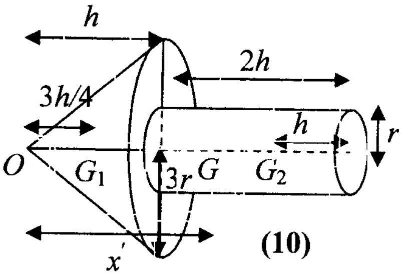
ලාමී ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{T}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{W}{\sin(\pi-\alpha)}$$ ලැබේ. **(15)**

$$\frac{P}{\cos\alpha}=T=\frac{W}{\sin\alpha} \quad \textbf{(05)}$$

$P=W\cot\alpha$ **(05)** හා $T=W\text{cosec}\alpha$ වේ. **(05)** **[40]**

සමමිතියෙන්, ඍජු ඝන වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G_2, එහි සමමිති අක්ෂය මත, කේතුවේ O ශීර්ෂයේ සිට $2h$ දුරකින් පිහිටයි. **(05)**



(10)

පළමුවන කොටස අනුව කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G_1, එහි සමමිති අක්ෂය මත කේතුවේ O ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් පිහිටයි. **(05)**

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G එහි සමමිති අක්ෂය මත, කේතුවේ O ශීර්ෂයේ සිට x' දුරකින් වේ යැයි ගනිමු.

$$\left(\pi r^2(2h)+\frac{1}{3}\pi(3r)^2h\right)\rho x' = \left(\pi r^2(2h)\right)(2h)\rho+\left(\frac{1}{3}\pi(3r)^2h\right)\rho\left(\frac{3h}{4}\right)$$

(10) **(05)** **(05)** **(05)** (නිවැරදි සමීකරණයට)

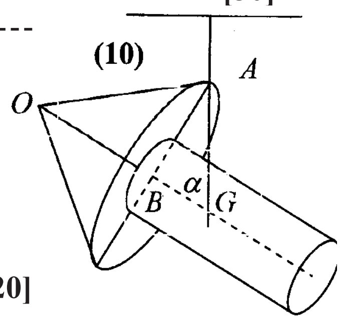
$5x' = 4h+\frac{9}{4}h \Rightarrow x' = \frac{5}{4}h$ **(05)**

[50]

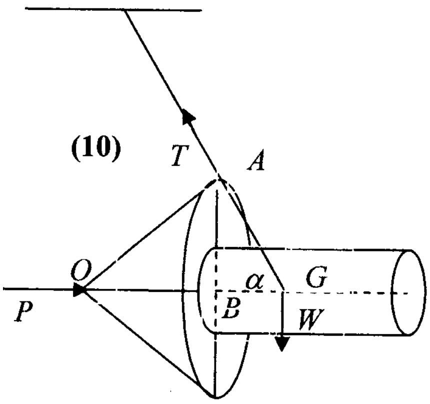
$AB = 3r$ හා $BG = OG - OB = \frac{5h}{4} - h = \frac{h}{4}$ වේ. **(05)**

$\tan\alpha = \frac{AB}{BG} = \frac{12r}{h}$ **(05)**

(10)



[20]



(10)

ලාමී ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{T}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{W}{\sin(\pi-\alpha)}$$ ලැබේ. **(15)**

$$\frac{P}{\cos\alpha} = T = \frac{W}{\sin\alpha}$$ **(05)**

$P = W\cot\alpha$ **(05)** හා $T = W\operatorname{cosec}\alpha$ වේ. **(05)** **[40]**

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (a) මල්ලක සුදු 5 ක්, කළු 3 ක් හා රතු 7 ක් වශයෙන් සර්වසම බෝල අඩංගු වෙයි. ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල තුනක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ගනු ලැබේ.

(i) බෝල තුනම කළු වීමේ,

(ii) බෝල තුනෙන් කිසිම බෝලයක් සුදු නොවීමේ,

(iii) යටත් පිරිසෙයින් එක බෝලයක් සුදු වීමේ,

(iv) බෝල වෙනස් වර්ණවලින් යුක්ත වීමේ,

(v) කළු, රතු, ඊළඟට සුදු යන පටිපාටියට බෝල තුන ගැනීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා පන්තියක සිසුන්ට සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙනු ලැබේ. මෙම සිසුන් ලබා ගත්තා ලද ලකුණු පහත දැක්වෙන සමූහිත සංඛ්‍යාත වගුවෙහි දී ඇත:

ලකුණු පරාසය	සිසුන් ගණන
00 – 20	14
20 – 40	f_1
40 – 60	27
60 – 80	f_2
80 –100	15

$20-40$ හා $60-80$ ලකුණු පරාසවල සංඛ්‍යාත, වගුවෙහි දක්නට නොමැත. කෙසේ නමුත්, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මාතය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙළින් 48 හා 50 බව දනී. වගුවේ දක්නට නොමැති සංඛ්‍යාත දෙක ගණනය කරන්න.

ඊ නයින්, සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රය සඳහා පෙනී සිටි මුළු සිසුන් ගණන ලබාගන්න.

සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(a) (i) $P(BBB) = P(B)P(B \mid B)P(B \mid BB) = \dfrac{3}{15} \times \dfrac{2}{14} \times \dfrac{1}{13} = \dfrac{1}{455}$

(05) **(10)** **(05)** **[20]**

හෝ $P(BBB) = \dfrac{{}^{3}C_3}{{}^{15}C_3} = \dfrac{3!}{15 \times 14 \times 13} = \dfrac{1}{455}$

(10) **(05)** **(05)** **[20]**

(ii) $P(W'W'W') = P(W')P(W' \mid W')P(W' \mid W'W') = \dfrac{10}{15} \times \dfrac{9}{14} \times \dfrac{8}{13} = \dfrac{24}{91}$

(05) **(10)** **(05)** **[20]**

හෝ $P(W'W'W') = \dfrac{{}^{10}C_3}{{}^{15}C_3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{15 \times 14 \times 13} = \dfrac{24}{91}$

(10) **(05)** **[20]**

(iii) P (යටත් පිරිසෙයින් එක බෝලයක් සුදුවීම)

$= 1 - P$ (බෝල තුනෙන් කිසිවක් සුදු නොවීම) **(05)**

$= 1 - \dfrac{24}{91} = \dfrac{67}{91}$

(05) **(05)** **[15]**

(iv) P (බෝල වෙනස් වර්ණවලින් යුක්ත වීම) $\dfrac{{}^5C_1 \times {}^3C_1 \times {}^7C_1}{{}^{15}C_3} = \left(\dfrac{5 \times 3 \times 7}{15 \times 14 \times 13}\right) 3! = \dfrac{3}{13}$

(05) **(05)** **(05)** **[15]**

(v) $P(BRW) = P(B)P(R \mid B)P(W \mid BR) = \dfrac{3}{15} \times \dfrac{7}{14} \times \dfrac{5}{13} = \dfrac{1}{26}$

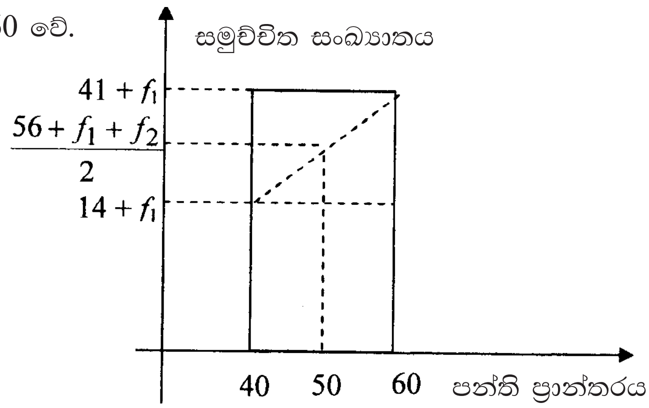
(05) **(05)** **[10]**

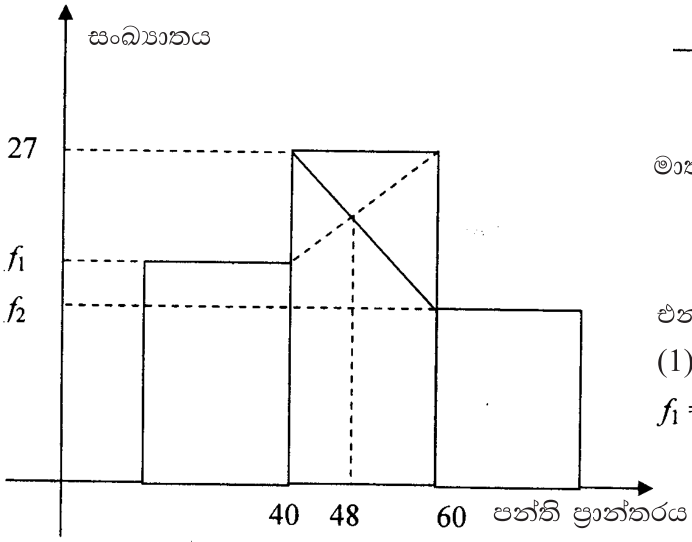
(*b*) මධ්‍යන්‍යය = 50 නිසා මධ්‍යස්ථ පන්තිය 40 - 60 වේ.

$14 + f_1 + \dfrac{27}{20} \times 10 = \dfrac{56 + f_1 + f_2}{2}$. **(10)**

$28 + 2f_1 + 27 = 56 + f_1 + f_2$

එනම්, $f_1 - f_2 = 1 \rightarrow (1)$ වේ.





මාතය = 48 නිසා මාත පන්තිය 40 - 60 වේ.

$\dfrac{27 - f_1}{27 - f_2} = \dfrac{48 - 40}{60 - 48} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ **(10)**

එනම්, $3f_1 - 2f_2 = 27 \rightarrow (2)$ වේ.

(1) හා (2) න්

$f_1 = 25$ **(05)** හා $f_2 = 24$ ලැබේ. **(05)**

[30]

සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රය සඳහා පෙනී සිටි මුළු සිසුන් ගණන

$= 56 + f_1 + f_2 = 56 + 25 + 24 = 105$ වේ. **(05)** **[05]**

පන්ති ප්‍රාන්තරය	මැද අගය (x)	සංඛ්‍යාතය (f)	$d = \frac{x-50}{20}$	fd	fd^2
00 - 20	10	14	–2	–28	56
20 - 40	30	25	–1	–25	25
40 - 60	50	27	0	0	0
60 - 80	70	24	1	24	24
80 - 100	90	15	2	30	60
	මුළු ගණන	105		1	165

(05) **(05)**

මධ්‍යන්‍යය $= 50 + 20\bar{d} = 50 + 20 \times \frac{1}{105} = 50 + \frac{4}{21} = 50.19$ වේ. **(05)** **[10]**

විචලතාව $= 20^2 \left\{ \frac{1}{105} \sum_{i=1}^{5} f_i d_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i d_i}{105} \right)^2 \right\} = \left(\frac{20}{105} \right)^2 (165 \times 105 - 1) = 17324 \left(\frac{4}{21} \right)^2$

(05) **(05)** **(05)**

සම්මත අපගමනය $= \frac{4}{21}\sqrt{17324} = \frac{4 \times 131.62}{21} = 25.07$ වේ. **(05)** **[25]**

III කොටස

3.0 පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු හා යෝජනා :

3.1. පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු :

පොදු උපදෙස් :

- ⋆ ප්‍රශ්න පත්‍රයේ ඇති මූලික උපදෙස් කියවා හොඳින් තේරුම් ගත යුතුය. එනම් එක් එක් කොටසින් කොපමණ ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාවකට පිළිතුරු සැපයිය යුතු ද කුමන ප්‍රශ්න අනිවාර්ය වේ ද කොපමණ ලකුණු ලැබේ ද කොපමණ කාලයක් ලැබේ ද යන කරුණු පිළිබඳව සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා නිරවුල් අවබෝධයක් ඇති කර ගෙන ප්‍රශ්න තෝරා ගත යුතුය.
- ⋆ I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් A කොටසෙහි සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුර සැපයිය යුතුය.
- ⋆ I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් B කොටසෙහි ප්‍රශ්න 07න් තෝරා ගත් ප්‍රශ්න 05කට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- ⋆ සෑම ප්‍රධාන ප්‍රශ්නයක්ම අලුත් පිටුවකින් ආරම්භ කළ යුතුය.
- ⋆ අයදුම්කරුගේ විභාග අංකය සෑම පිටුවකම අදාළ ස්ථානයේ ලිවිය යුතුය.
- ⋆ ප්‍රශ්න අංක හා අනුකොටස් අංක නිවැරදිව ලිවිය යුතුය.
- ⋆ සියලුම ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා පිළිතුරු ලිවිය යුතුය. ප්‍රශ්න යටතේ දී ඇති තොරතුරුත්, ලබා ගත යුතු පිළිතුරු හෝ සාධනය කළ යුතු ප්‍රතිඵල කවරේ ද යන්නත් පැහැදිලිව අවබෝධ කර ගත යුතුය.
- ⋆ ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීමේදී දී ඇති කාලය නිසි පරිදි කළමනාකරණය කර ගැනීමට වග බලා ගත යුතුය.
- ⋆ පිළිතුරු ලිවීමේදී රතු, කොළ හෝ දම් පාට පෑන් භාවිත කිරීමෙන් වැළකිය යුතුය.

විශේෂ උපදෙස් :

- ⋆ රූප සටහන් ඇඳිය යුතු අවස්ථාවලදී ඒවා ඉතා පැහැදිලිව ඇඳ නම් කළ යුතුය. රූප සටහන්වල නිරවද්‍යතාව, සම්බන්ධතා දැකීමටත් ඒ ඇසුරින් පහසුවෙන් පිළිතුරු කරා එළඹීමටත් මහෝපකාරී වෙයි.
- ⋆ ගණනය කිරීම්වලදී එක් එක් පියවර පැහැදිලිව සඳහන් කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය ස්ථානවලදී පියවර අතර සම්බන්ධය දැක්වෙන සමාන ලකුණු හෝ වෙනත් අදාළ සංකේත හෝ ලියා දැක්වීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය. එක් පියවරක හෝ පිටුවක හෝ ඇති ප්‍රකාශන හා සමීකරණ ඊළඟ පියවරට හෝ පිටුවට පිටපත් කිරීමේදී ඒවායේ නිරවද්‍යතාව පිළිබඳව ඉතා සැලකිලිමත් විය යුතුය.
- ⋆ අවශ්‍ය ස්ථානවලදී නිවැරදිව ඒකක භාවිත කළ යුතුය.
- ⋆ ප්‍රස්තාර ඇඳීමේදී X හා Y අක්ෂ නිවැරදිව නම් කර පරිමාණගත කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය අවස්ථාවල ඒකක ද සඳහන් කළ යුතුය.
- ⋆ මූලික සමානුපාත පිළිබඳ සංකල්ප නැවත පරිශීලනය කළ යුතුය.

නිදසුන් : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ නම්

(i) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$

(ii) $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$

(iii) $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{c-d}{c+d}$

★ මූලික ජ්‍යාමිතිය පිළිබඳ දැනුම නැවත පරිශීලනය කළ යුතුය.

නිදසුන්: (1) සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ
(2) රොම්බයක ලක්ෂණ
(3) සවිධි ෂඩස්‍රයක ලක්ෂණ
(4) මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා විලෝමය
(5) වෘත්ත ආශ්‍රිත ප්‍රමේය
(6) සමමිති ගුණ

★ සාධකවලට බිඳිය හැකි වර්ගජ ප්‍රකාශන එකවරම සාධකවලට වෙන්කර ගැනීමේ හැකියාව ප්‍රගුණ කළ යුතුය.

★ "එනයින් අපෝහනය කරන්න, සත්‍යාපනය කරන්න, ව්‍යුත්පන්න කරන්න" වැනි යෙදුම් කෙරෙහි සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ඒ අනුව පිළිතුර කරා එළඹීමට වග බලා ගත යුතුය. 'එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ' යනුවෙන් සඳහන් අවස්ථාවලදී බහුල වශයෙන්ම පෙර ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය භාවිත කර ඊට පසු ප්‍රතිඵලය ලබා ගැනීම වඩාත් පහසු වේ.

★ සෑම විටෙකදීම අවසාන පිළිතුර සරලම ආකාරයෙන් දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය. අවසාන පිළිතුර, ප්‍රශ්නයෙහි අසා ඇති ආකාරය අනුව පැහැදිලිව දැක්විය යුතුය.

★ අපේක්ෂකයන් තම අත් අකුරු, ඉලක්කම් හා සංකේත පැහැදිලිවත් නිවැරදිවත් ලියා දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය.

★ පිළිතුර කරා එළඹීමට අවශ්‍ය සුළු කිරීම් (සංඛ්‍යාමය, වීජීය හෝ ත්‍රිකෝණමිතික) කටුවැඩ ලෙස සැලකුව ද පිළිතුර සමඟම පසෙකින් ඉදිරිපත් කරන්න.

★ පිළිතුර සම්පූර්ණ කිරීමට නොහැකි අවස්ථාවලදී වුව ද ප්‍රශ්නයට පිළිතුර ලබා ගැනීමට අදාළ ඉදිරි පියවර ලියා දැක්වීම බොහෝවිට ඵලදායි විය හැකිය.

★ ප්‍රශ්නයක අග කොටස්වල පවා මුල් කොටස්වලින් ස්වාධීන වූ පහසු කොටස් තිබිය හැකි බැවින් ප්‍රශ්නයක මුල් කොටස අපහසු වුව ද ප්‍රශ්නය අත්හැර නොයා ඉතිරි කොටස් පිළිබඳව ද අවධානය යොමු කිරීම වැදගත් වේ.