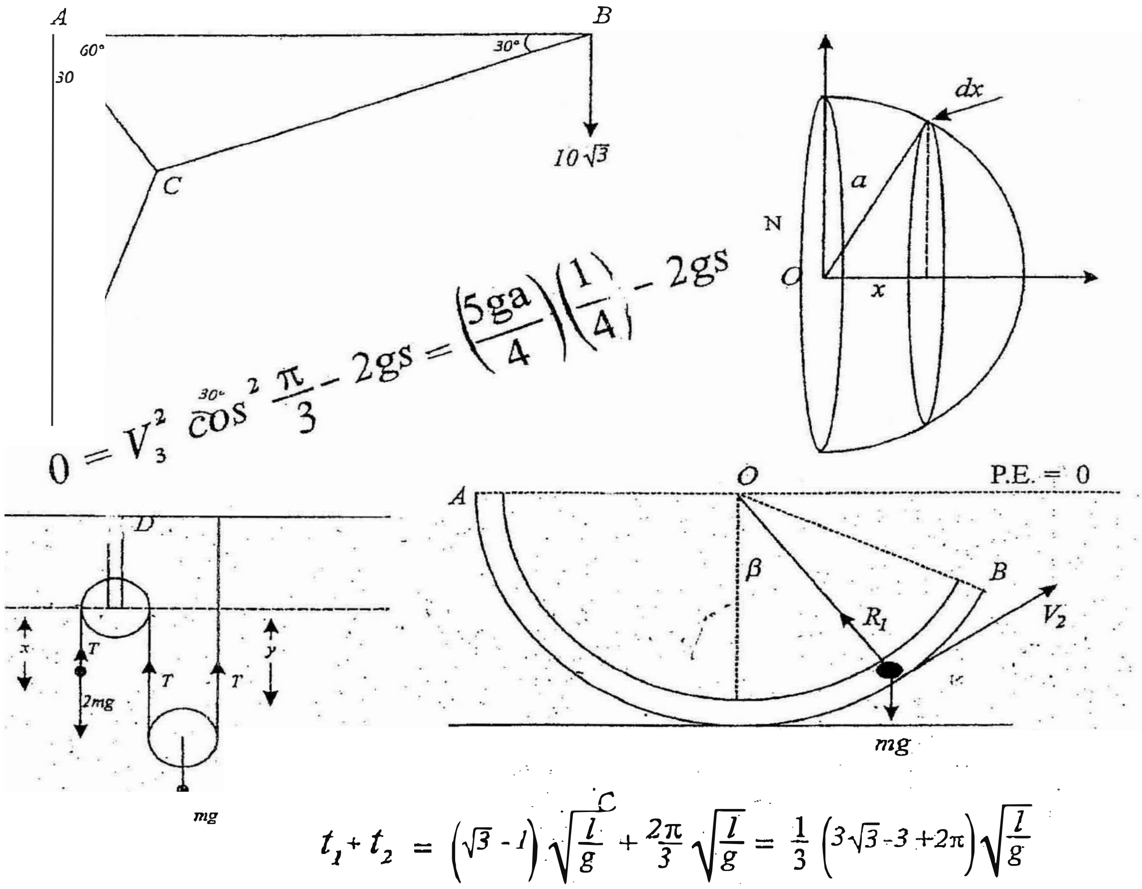
නම.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර
(උසස් පෙළ) විභාගය - 2011

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය



10 - සංයුක්ත ගණිතය - II

මෙය උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි. ප්‍රධාන පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේ දී ඉදිරිපත් වන අදහස් අනුව මෙහි ඇතැම් වෙනස්කම් කරනු ලැබේ. මෙය පන්ති කාමර ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලිය සඳහා ආධාරකයක් ලෙස යොදා ගත හැකිය යනු අපගේ විශ්වාසයයි.

අ. පො. ස (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 2011

සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණුදීමේ පටිපාටිය

A කොටස

(1.) අවකාශයෙහි වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට P අංශුවක් $2u$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේයි. එම මොහොතේදී ම, එම O ලක්ෂ්‍යයේ ම සිට, Q අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේයි. අංශු දෙකම ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. P හා Q අංශුවල චලිත සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර එකම රූප සටහනක ඇඳ, P අංශුව එහි උපරිම උසට ළඟාවන විට, Q අංශුවෙහි ප්‍රවේගය $3u$ බව පෙන්වන්න.

T යනු P අංශුවට උපරිම උස තෙක් ළඟාවීම සඳහා වශ්‍ය කාලය යැයි ගනිමු.

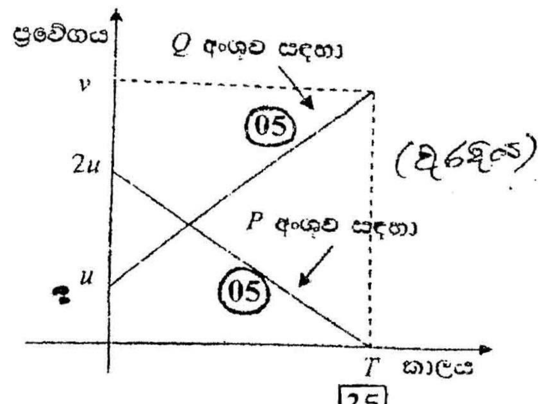
v යනු Q ශුවේ අවශ්‍ය ප්‍රවේගය යැයි ගනිමු.

එවිට $\frac{2u}{T} = g$ (1) වේ. (05)

තවද, $\frac{v-u}{T} = g \rightarrow (2)$ වේ. (05)

(1) හා (2) න්

$v - u = 2u \Rightarrow v = 3u$ ලැබේ. (05)



25

වෙනත් ක්‍රමයක්:

T යනු P අංශුවට උපරිම උස තෙක් ළඟාවීම සඳහා අවශ්‍ය කාලය යැයි ගනිමු.

v යනු Q අංශුවේ අවශ්‍ය ප්‍රවේගය යැයි ගනිමු.

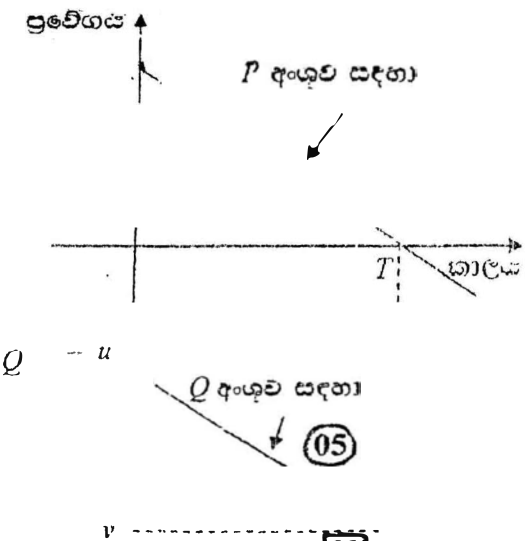
එවිට, $\frac{2u}{T} = g \rightarrow (1)$ වේ. (05)

තවද, $\frac{-u-V}{T} = g \rightarrow (2)$ වේ. (05)

(1) හා (2) න්

$-u - v = 2u \Rightarrow v = -3u$ ලැබේ. (05)

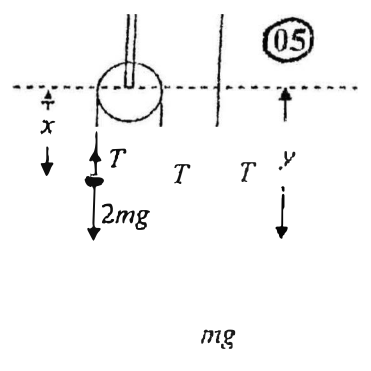
එබැවින්, P අංශුව උපරිම උස තෙක් ළඟාව ා විට Q අංශුවේ වේගය $3u$ වේ.



25

(2.) සුමට අචල කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකින් ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවක් දරා සිටී. තන්තුව, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දරා සිටින සැහැල්ලු කප්පියක් යටින් යයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි සිවිලිමකට සවිකර ඇත. පද්ධතිය ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{}{3}mg$ බව පෙන්වන්න.

තන්තුව අවිතන්‍ය බැවින් $x + 2y$ = constant වේ.



$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0 \rightarrow (1)$ (05)

ස්කන්ධය $2m$ වන අංශුව සඳහා $P = mf$ සිරස්ව ඉහළට යෙදීමෙන්

$T - 2mg = 2m(-\ddot{x}) \rightarrow (2)$ (05) ලැබේ.

ස්කන්ධය m වන අංශුව සඳහා $P = mf$ සිරස්ව ඉහළට යෙදීමෙන්

$2T - mg = m(-\ddot{y}) \rightarrow (3)$ (05) ලැබේ.

$(2) + 4 \times (3) \Rightarrow 9T - 6mg = -2m(\ddot{x} + 2\ddot{y}) = 0$

form (1) න්

$T = \frac{2}{3}mg$ (05) ලැබේ.

(3.) පාපැදිකරුවකුගේ සහ ඔහුගේ පාපැදියෙහි මුළු ස්කන්ධය M kg වේ. ඔහු, තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක ඉහළට, චලිතයට වූ R N ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව, $V\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ නියත වේගයෙන් පැද යන විට, H W නියත ක්ෂමතාවකින් කාර්ය කරයි. $H = (R + Mg\sin\alpha)V$ බව පෙන්වන්න.

පාපැදිකරුගේ චලිතය සඳහා $P = mf$

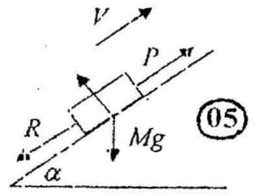
මාර්ගය දිගේ ඉහළට යෙදීමෙන්

$P - R - Mg\sin\alpha = 0$ (10) ලැබේ.

තවද,

$H = PV$ (05) වේ.

$\frac{H}{V} = R + Mg\sin\alpha \Rightarrow H = (R + Mg\sin\alpha)V$ (05)



(05)

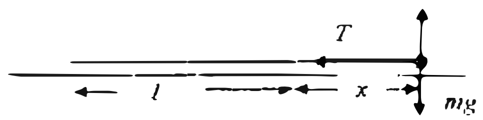
25

(4.) ස්වාභාවික දිග l ද, ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය λ ද වන තුනී සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ දුන්නක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. එහි එක කෙළවරක් මේසය මත වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. එහි අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඈඳා ඇත. මේසය දිගේ දුන්න ඇද මුදා හරිනු ලැබේ. ආවර්ත කාලය $2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක අංශුව යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

$T = \lambda\frac{x}{l}$ (05).

ස්කන්ධය m වන අංශුවේ චලිතය සඳහා $P = mf$

තිරස්ව යෙදීමෙන්



$-T = m\ddot{x}$ (05) ලැබේ.

$\therefore\ \ddot{x} = -\frac{\lambda}{ml}x$ (05)

එබැවින්, අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදේ. (05)

කාලාවර්තය

$= \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda/ml}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$. (05) වේ.

(5.) $-2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, $7\mathbf{p} - \mathbf{q}$ හා $\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$ යනු අචල O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{p}$ හා $\mathbf{q}$ යනු සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකක් වේ. A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය බව පෙන්වා, C ලක්ෂ්‍යය AB බෙදන අනුපාතය සොයන්න.

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q} - (-2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}) = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ වේ. (05)

$\overrightarrow{CB} = 7\mathbf{p} - \mathbf{q} - (\mathbf{p} + 3\mathbf{q}) = 6\mathbf{p} - 4\mathbf{q} = 2\overrightarrow{AC}$ වේ. (05)

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ වේ. (05)

එබැවින්, A, B හා C ඒක රේඛීය වන අතර $AC = \frac{1}{2}CB$ වේ. → $AC : CB = 1 : 2$

(05) (05) 25

(9.) පවුල් 1000 ක දෛනික වියදම් පහත වගුවෙහි දී ඇත:

දෛනික වියදම රුපියල්වලින්	400 - 600	600 - 800	800 - 1000	1000 - 1200	1200 - 1400
පවුල් ගණන	50	x	500	y	50

ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය රුපියල් 900 නම්, x හා y සංඛ්‍යාත සොයා, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය ද රුපියල් 900 බව පෙන්වන්න.

මධ්‍යස්ථය 900 බැවින්

$50 + x + \frac{500}{200}\times 100 = 500 \Rightarrow x = 200$ (05) (05)

$50 + y + \frac{500}{200}\times 100 = 500 \Rightarrow y = 200$ (05) (05)

ව්‍යාප්තිය සමමිතික බැවින් මධ්‍යන්‍යය මධ්‍යස්ථයට සමානවේ.

(6) දිග a හා b වන තන්තු දෙකක් මගින් W භාරයක්, එකම තිරස් මට්ටමක $\sqrt{a^2+b^2}$ දුරක පරතරයකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකින් එල්ලා ඇත. තන්තුවල ආතති $\frac{Wa}{\sqrt{a^2+b^2}}$ හා $\frac{Wb}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

$$\frac{1}{\sin(90+\theta)} = \frac{T'}{\sin(180-\theta)} = \frac{W}{\sin 90^\circ}$$

සිරස්ව විභේදනයෙන්

$T\cos\theta + T'\sin\theta = W$ (05) ලැබේ

$$T\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + T'\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = W$$

$Tb + T'a = W\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow (1)$ වේ.

තිරස්ව විභේදනයෙන්

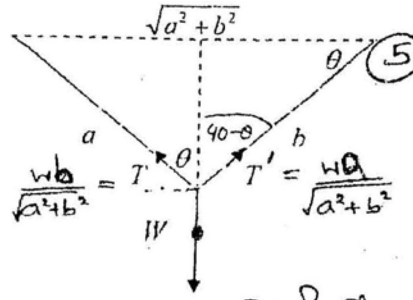
$T\sin\theta - T'\cos\theta = 0$ (05) ලැබේ.

$$T\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - T'\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$ වේ

$Ta - T'b = 0 \quad — (2)$

$(1)\times b + (2)\times a \Rightarrow T = \frac{Wb}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (05) වේ.

$(1)\times a - (2)\times b \Rightarrow T' = \frac{Wa}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (05) වේ.



ලාමි. ප්‍ර.

$T = W\cos\theta = \frac{Wb}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (5) (5)

$T' = W\sin\theta = \frac{Wa}{\sqrt{\ }}$ (5) (5)

25

---

(7) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක නිරවශේෂ සිද්ධි දෙකක් (එනම් $A \cup B = \Omega$) යැයි ගනිමු. $P(A) = \frac{2}{5}$ හා $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ නම්, (i) $P(B)$, (ii) $P(A|B)$, (iii) A' හා B' යනු පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි වන $P(A'|B')$ සොයන්න.

(i) $P(\Omega) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ වේ.

$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{14}{15}$ වේ.

(05) (05)

(ii) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{14}{15}} = \frac{5}{14}$ (05) වේ.

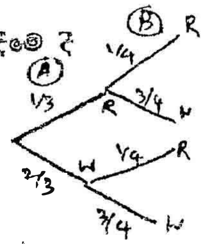
(iii) $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P\{(A \cup B)'\}}{P(B')} = \frac{P(\Phi)}{P(B')} = 0 \quad \because P(\Phi) = 0$

(05) (05) **25**

---

(8) ගැටලුවක් විසඳීමට මිතුරන් දෙදෙනෙක් ස්වායත්ත ලෙස උත්සාහ කරති. ඔවුන්ගේ සාර්ථකවීමේ සම්භාවිතා $\frac{1}{3}$ හා $\frac{1}{4}$ වේ. ගැටලුව විසඳීමේදී (i) ඔවුන් දෙදෙනාම සාර්ථකවීමේ, (ii) කිසිවකු සාර්ථක නොවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

$P(A) = \frac{1}{3}$ හා $P(B) = \frac{1}{4}$ වේ; මෙහි A හා B යනු මිතුරන් දෙදෙනා ගැටලුව විසඳීමේ දී සාර්ථකවීමේ සිද්ධි වේ.



(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$ වේ.

(05) (05)

(ii) $P\{(A \cup B)'\} = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} = 1 - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(05) (05) (05) **25**

(10) අනුගිය මාස 15 තුළ එක්තරා භාණ්ඩයක් සඳහා ලැබුණු ඇනවුම් සංඛ්‍යාවෙහි සාමාන්‍යය, මසකට ඇනවුම් 24 කි. හොඳම මාස තුනට, මසකට ඇනවුම් 35 ක සාමාන්‍යයක් ඇත. අඩුම මාස හතරෙහිදී භාණ්ඩ සඳහා ඇනවුම් 11 ක්, 14 ක්, 16 ක් හා 22 ක් ලැබිණි.

(i) ඉතිරි මාස 8 හි ලැබුණු ඇනවුම් සංඛ්‍යාවල සාමාන්‍යය,

(ii) මාස 15 හි ඇනවුම් සංඛ්‍යාවල පළමුවන චතුර්ථකය

සොයන්න.

(i) මුළු එකතුව $= 24 \times 15 = 360$ (5)

හොඳම මාස තුනෙහි මුළු එකතුව $= 35 \times 3 = 105$

අඩුම මාස හතරෙහි මුළු එකතුව $= 11 + 14 + 16 + 22 = 63$

ඉතිරි මාස අටෙහි මුළු එකතුව $= 360 - 105 - 63 = 192$ (05)

ඉතිරි මාස අටෙහි සාමාන්‍යය $= \frac{192}{8} = 24$

(05) [15]

(ii) දත්තSince 15 ක් ඇති බැවින් හතරවෙනි දත්තය ව්‍යාප්තියේ පළමු චතුර්ථකය විය යුතුය. (05)

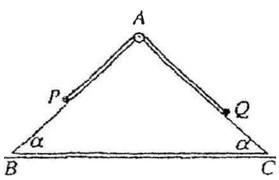
බැවින්, 22 ක ව්‍යාප්තියේ පළමු චතුර්ථකය වේ. (05) [10]

B B කොටස B

11. (a) එහත් කණු තුනක මුහුණත් ලක්ෂ්‍ය වන A, B හා C, තිරස් තලයක වූ පාදයක දිග a වන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල පිහිටා ඇත. සුළඟක් යතත u වේගයෙන් AC හි දිශාවට හමා යයි. සුළඟට සාපේක්ෂව $v\ (> u)$ වේගයක් ඇති කුරුල්ලෙක් AB දිගේ A සිට B දක්වා ද, BC දිගේ B සිට C දක්වා ද පියාඹයි. ගමනේ කොටස් දෙකම සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ එකම රූප සටහනක අඳින්න.

ඒ නයින්, A සිට C දක්වා B හරහා වූ ගමන සඳහා ගතවන මුළු කාලය $\dfrac{4a}{u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට කුඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන ABC ත්‍රිකෝණාකාර සිරස් හරස්කඩෙහි A ශීර්ෂයේ දී, කුඩා සුමට කප්පියක් සවිකර ඇත. BC ඔස්සේ යන මුහුණත අවල සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. AB සහ AC යනු අදාළ මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා යැයි ද, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \alpha$ යැයි ද දී ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $\lambda m\ (\lambda > 1)$ වූ P හා Q සුමට අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳ ඇත. තන්තුව කප්පිය මතින් යන අතර, P හා Q අංශු, පිළිවෙළින් AB හා AC මත රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව තොබුරුල්ව පවතින සේ තබා ඇත.



පද්ධතිය නිසලතාවෙන් මුදා හැරේ.

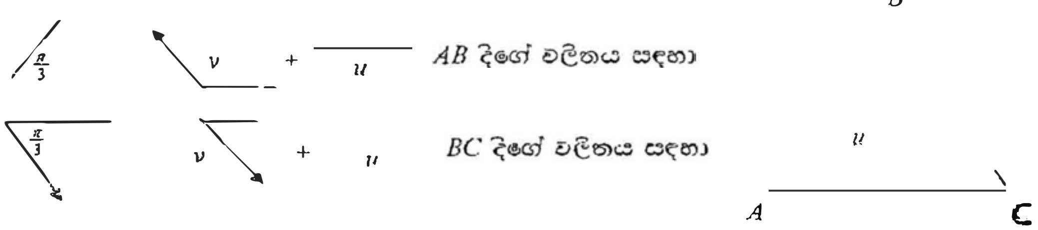
P හා Q අංශු සඳහා පිළිවෙළින් BA හා AC ඔස්සේ ද, පද්ධතිය සඳහා තිරසට ද, චලිත සමීකරණ ලියා ගන්න

කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හා Q අංශු එක එකෙහි ත්වරණයේ විශාලත්වය $\dfrac{(\lambda - 1)(\lambda + 3)g\sin\alpha}{(\lambda + 1)\left[(\lambda + 3) - (\lambda + 1)\cos^2\alpha\right]}$

බව පෙන්වන්න.

Q අංශුව C වෙත ළඟාවන විට තන්තුව හදිසියේම කැඩී යයි. P අංශුව කප්පිය වෙත ළඟා වී නොමැති බව උපකල්පනය කරමින්, තන්තුව කැඩීයාමෙන් මොහොතකට පසු, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය ලියා දක්වන්න

(a) Vel. B, G = Vel. B, W + Vel. W, G ; මෙහි B කුරුල්ලා සඳහා ද, W සුළඟ සඳහා ද, G පොළොව සඳහා ද වේ.

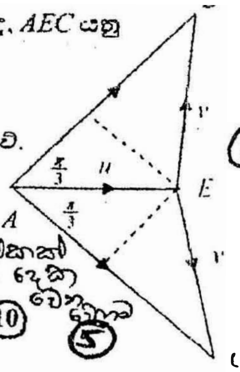


AEB යනු AB දිගේ චලිතය සඳහා චලිතය සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය ද, AEC යනු BC දිගේ චලිතය සඳහා චලිතය සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය ද වේ.

AB දිගේ පොළොවට සාපේක්ෂව කුරුල්ලාගේ ප්‍රවේග

$$\sqrt{v^2 - u^2\sin^2\frac{\pi}{3}} + u\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{v^2 - \frac{3}{4}u^2} + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{4v^2-3u^2} + u\right\}$$ වේ.

(10) (05)



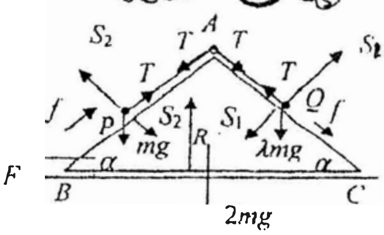
(15)

AB පියාඹා යෑමට ගතවන කාලය $\frac{2a}{u+\sqrt{4v^2-3u^2}}$ වේ. (05)

සමමිතියෙන් BC පියාඹා යෑමට ගතවන කාලය $\frac{2a}{u+\sqrt{4v^3-3u^2}}$ වේ. (10)

එබැවින්, AB හා BC පියාඹා යෑමට ගතවන මුළු කාලය $\frac{4a}{u+\sqrt{4v^3-3u^2}}$ වේ. (05)

[50]



(b) කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව BA දිගේ P අංශුවේ ත්වරණය f යැයි ගනිමු.
එවිට, කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව AC දිගේ Q අංශුවේ ත්වරණය f වේ.
CA දිගේ කූඤ්ඤයේ ත්වරණය F යැයි ගනිමු.

BA දිගේ P අංශුවේ චලිතය සඳහා
$P = mf$ යෙදීමෙන්
$-mg\sin\alpha + T = m(f - F\cos\alpha)$ → (1) ලැබේ. (15) or (00)

[35]

AC දිගේ Q අංශුවේ චලිතය සඳහා $P = mf$ යෙදීමෙන්
$\lambda mg\sin\alpha - T = \lambda m(f - F\cos\alpha)$ → (2) ලැබේ. (15) or (00)

[15]

CB දිගේ පද්ධතියේ චලිතය සඳහා $P = mf$ යෙදීමෙන්
$0 = 2mF + m(F - f\cos\alpha) + \lambda m(F - f\cos\alpha)$ → (3) ලැබේ (15)

[15]

(3) න්

$\therefore\ F = \frac{1+\lambda}{3+\lambda} f\cos\alpha$. (05)

(1) + (2) ⇒ $-g(1-\lambda)\sin\alpha = (1+\lambda)f - (1+\lambda)F\cos\alpha$ (05)

$= (1+\lambda)f\left\{1 - \frac{(1+\lambda)}{3+\lambda}\cos^2\alpha\right\}$ (05)

$= \frac{(1+\lambda)}{(3+\lambda)}\left\{(3+\lambda) - (1+\lambda)\cos^2\alpha\right\}f$

එබැවින්, $f = \frac{(\lambda-1)(3+\lambda)g\sin\alpha}{(1+\lambda)\left\{(3+\lambda)-(1+\lambda)\cos^2\alpha\right\}}$ ලැබේ. (05)

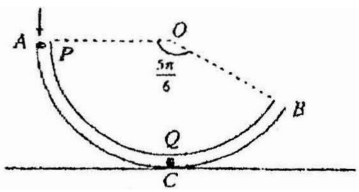
[20]

තන්තුව කැඩියාමෙන් මොහොතකට පසුව කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය $\lambda = 0$ යැයි $f = \frac{(1-\lambda)(3+\lambda)g\sin\alpha}{(1+\lambda)\left\{(3+\lambda)-(1+\lambda)\cos^2\alpha\right\}}$ හි යෙදීමෙන් ලබාගත හැකිය. (10)

එබැවින්, තන්තුව කැඩියාමෙන් මොහොතකට පසුව කූඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය $f_1 = \frac{3g\sin\alpha}{3-\cos^2\alpha}$. (05)

[15]

12. අරය a වූ ද, ප්‍රවතිය කේන්ද්‍රය වන O හි $\frac{5\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද, වෘත්තාකාර චාපයක හැඩය ඇති සුමට සිහින් ACB බටයක්, OA තිරස්ව ද, බටයෙහි පහළම ලක්ෂ්‍යය වන C, අචල තිරස් පොළොවක් ස්පර්ශ කරමින් ද සිරස් තලයක, රූප පටහෙනි පෙන්වා ඇති පරිදි සවිකර ඇත.



ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් $\sqrt{2ga}$ වේගයෙන් A කෙළවරේදී බටය තුළට සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි.

OP රේඛාව OA සමග $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවෙහි වේගය $\sqrt{2ga(1+\sin\theta)}$ බව ද,

P අංශුව මත බටයෙන් ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියාවෙහි විශාලත්වය $mg(2+3\sin\theta)$ බව ද පෙන්වන්න.

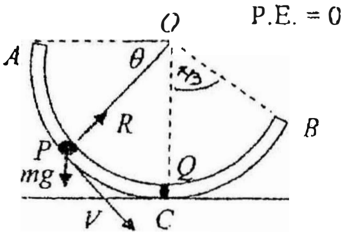
P අංශුව C ලක්ෂ්‍යය වෙත එළඹෙන විට, බටය තුළ C ලක්ෂ්‍යයෙහි නිසලව ඇති ස්කන්ධය m වූ සුමට Q නම් තවත් අංශුවක් හා ගැටෙයි. P හා Q අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වෙයි.

ගැටුමට මොහොතකට පෙර P අංශුවෙහි වේගය සොයා, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශුවල වේග පිළිවෙළින් $\frac{1}{2}\sqrt{ga}$ හා $\frac{3}{2}\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව කිසිවිටෙක බටය හැර නොයන බවත්, Q අංශුව $\frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ වේගය සහිතව B කෙළවර වෙත එළඹෙන බවත් පෙන්වන්න.

Q අංශුව බටය හැරගිය පසු එය පොළොවෙහි සිට ළඟාවන උපරිම උස සොයන්න.

R ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව චලිතයේ දිශාවට ලම්බ නිසා එයින් කාර්යයක් සිදු නොවේ.



එබැවින්, පද්ධතිය සඳහා ශක්ති සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්

$\frac{1}{2}mV^2 - mga\sin\theta = \frac{1}{2}m(2ga)$ ලැබේ. (15)

එනම්, $V^2 = 2ga(1+\sin\theta)$ වේ

$\therefore \quad V = \sqrt{2ga(1+\sin\theta)}$ වේ. (05)

එනම්, OA සමග OP යන්න θ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ වේගය $\sqrt{2ga(1+\sin\theta)}$ වේ. [20]

PO දිගේ P අංශුවේ චලිතය සඳහා $P = mf$ යෙදීමෙන්

$R - mg\sin\theta = m\frac{V^2}{a} = m.2g(1+\sin\theta)$ ලැබේ. (10) (5)

$\therefore \quad R = mg(2+3\sin\theta)$ වේ. (05)

එනම්, P අංශුව මත බටයෙන් ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $mg(2+3\sin\theta)$ වේ. [20]

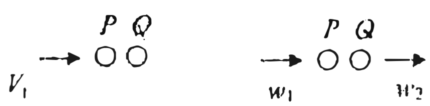
C ලක්ෂ්‍යය වෙත ළඟාවන විට P අංශුවේ ප්‍රවේගය V_1 යැයි ගනිමු.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ යැයි $V = \sqrt{2ga(1+\sin\theta)}$ ගැනීමෙන්

$V_1 = \sqrt{2ga\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{ga}$ ලැබේ. (10) [10]

ගම්‍යතා

කො. ගැටුමට පෙර | කො. ගැටුමට පසු



$m2\sqrt{ga} = mw_2 + mw_1$ (10)

i.e. $w_2 + w_1 = 2\sqrt{ga} \rightarrow (1)$

ප්‍රත්‍යාගතිය පිළිබඳ නිව්ටන් ගේ නියමය:

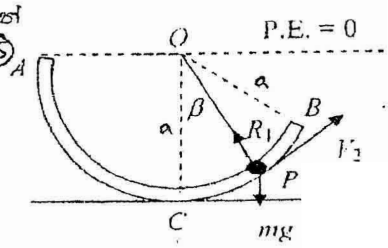
$-(w_1 - w_2) = eV_1 = \frac{1}{2}.2\sqrt{ga} = \sqrt{ga} \rightarrow (2)$ (10)

$(1)+(2) \Rightarrow w_2 = \frac{3\sqrt{ga}}{2}$ (Q) හා $(1)-(2) \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{ga}}{2}$ (P) වේ.

(05) (05) [30]

R_1 ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව චලිතයේ දිශාවට ලම්බ නිසා එයින් කාර්යයක් සිදු නොවේ

එබැවින්, P අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්



$\frac{1}{2}mV_2^2 - mga\cos\beta = \frac{1}{2}m\,w_1^2 - mga$ ලැබේ. (15)

$\frac{1}{2}mV_2^2 - mga\cos\beta = \frac{1}{2}m\left(\frac{ga}{4}\right) - mga$

එනම්, $V_2^2 = 2ga\left(\cos\beta - \frac{7}{8}\right)$ වේ. (05)

$V_2 = 0 \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{7}{8} > \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{3}$ $\because 0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$

(05) (05)

මෙම කෝණය β_0 යැයි ගනිමු.

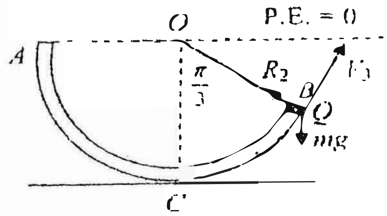
එබැවින්, $-\beta_0$ හා β_0. අතර P අංශුව දෝලනය වේ.

ඒ නයින්. P අංශුව කිසිවිටක නළය හැර නොයන බව ලැබේ. (05)

35

R_2 ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව චලිතයේ දිශාවට ලම්බ නිසා එයින් කාර්යයක් සිදු නොවේ.

එබැවින්, B ලක්ෂ්‍යය වෙත ළඟාවන විට Q අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්



$\frac{1}{2}mV_3^2 - mga\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}m\,w_2^2 - mga$. ලැබේ. (15)

$\frac{1}{2}mV_3^2 - \frac{1}{2}mga = \frac{1}{2}m\left(\frac{9ga}{4}\right) - mga$

එනම්, $V_3^2 = \frac{5ga}{4} \Rightarrow V_3 = \frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ වේ. (05)

එබැවින්, Q අංශුව B ලක්ෂ්‍යය වෙත $\frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ වේගයෙන් ළඟා වේ. //

20

B ලක්ෂ්‍යයේ සිට එය ළඟා වෙන උපරිම ලක්ෂ්‍යය දක්වා Q අංශුවේ චලිතය සඳහා සිරස් ලෙස $v^2 = u^2 + 2fs$ යෙදීමෙන්

(10) $0 = V_3^2 \sin^2\frac{\pi}{3} - 2gs = \left(\frac{5ga}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) - 2gs$ ලැබේ; මෙහි s යනු Q අංශුවේ සිරස් චලිතයේ දී එහි උපරිම උස වේ.

$s = \frac{15}{32}a$.

15

තෙලවේ සිට එය ළඟාවනා උපරිම උස
දක්වා Q අංශුවේ චලිතය සඳහා සිරස් උස

$= \frac{15a}{32} + \frac{a}{2} = \frac{31a}{32}$

13. ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ඈඳා ඇත. තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර තිරස් පොළොවක සිට $4l$ උසින් පිහිටි අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. P අංශුව සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙන විට තන්තුවේ දිගුව l වේ.

තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න.

P අංශුව දැන් O හි තබා, $\sqrt{gl}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. P අංශුව l දුරක් වැටුණු විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

තන්තුවෙහි දිග $2l + x$ වන විට, P අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $-l \le x \le 2l$ වේ.

ඉහත සමීකරණයෙන්, $c(>0)$ නියතයක් වන $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(c^2 - x^2)$ දෙනු ලැබේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, c හි අගය සොයන්න.

P අංශුව පොළොවට එළඹෙන විට ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වා, O සිට පොළොවට එළඹීමට ගතවන කාලය $\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$ බව පෙන්වන්න.

T_0 යනු සමතුලිත පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය යැයි ගනිමු.

හුක්ගේ නියමයෙන් $T_0 = \frac{\lambda l}{l}$ ලැබෙයි. (10)

නමුත් $T_0 = mg$ වේ. (10)

එබැවින්, $\lambda = mg$ ලැබෙයි. (05) [25]

$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}mu^2$ (ශක්ති.)

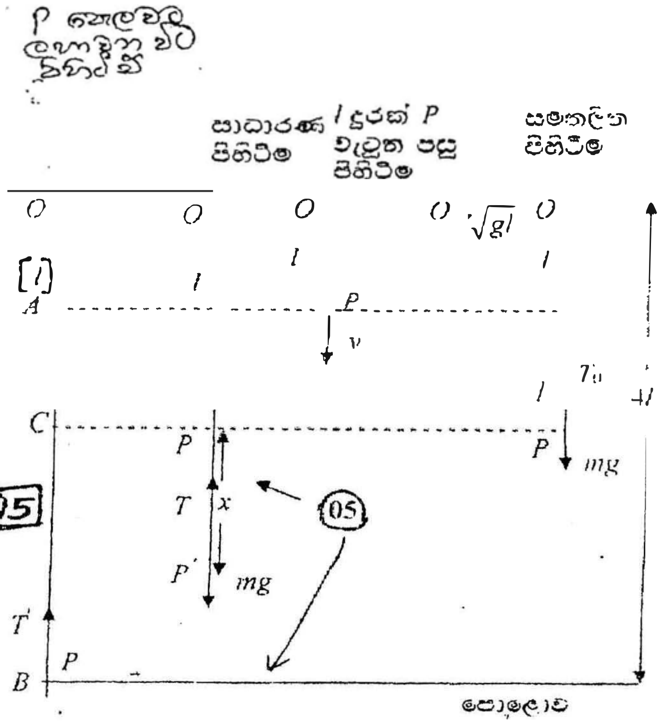
P අංශුව සඳහා සිරස්ව පහළට

$V^2 = u^2 + 2fs$ යෙදීමෙන්

$v^2 = gl + 2g(l) = 3gl$ ලැබෙයි; (10) මෙහි

v යනු l දුරක් P වැටුන පසු පිහිටීමයි.

එබැවින්, $v = \sqrt{3gl}$ (05) වේ. [15]



නැවතත් හුක්ගේ නියමයෙන්

$T = \frac{mg(l+x)}{l}$ ලැබෙයි. (10)

P අංශුව සඳහා සිරස්ව පහළට නිව්ටන් ගේ නියමය යෙදීමෙන

$mg - T = m\ddot{x}$ ලැබෙයි. (10)

එනම්, $mg - \frac{mg(l+x)}{l} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ වේ.

(05) (05) [35]

$x = -l$ විට $\dot{x} = v = \sqrt{3gl}$ වේ. (10)

ශක්ති → ල (ග)

$\frac{1}{2}mgl + mg(2l+b) = \frac{1}{2}mg\left(\frac{l+b}{l}\right)^2$

එබැවින්, $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(c^2 - x^2)$ මගින්

$3gl = \frac{g}{l}(c^2 - l^2) \Rightarrow c = 2l$ ලැබෙයි.

(05) (05) [20]

$\therefore \quad \dot{x}^2 = \frac{g}{l}(4l^2 - x^2)$.

$-l \le x < 2l$ සඳහා $\dot{x} > 0$ හා $x = 2l$ සඳහා $\dot{x} = 0$ වේ.

(05) (05)

එබැවින්, පොළොවට ලඟාවන විට P අංශුව ක්ෂණිකව නිශ්චල වේ. (05) [15]

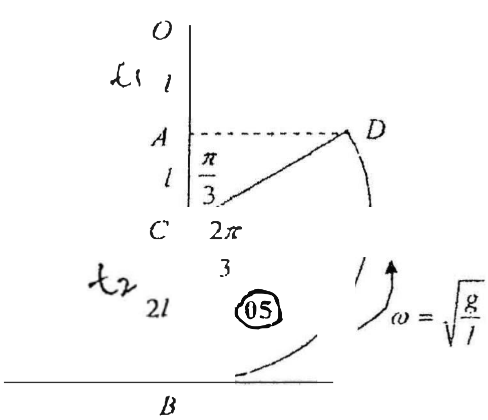
---

t_1 යනු O සිට A ට ගුරුත්වය යටතේ වැටීමට P අංශුවට ගතවන කාලය යැයි ගනිමු.

එවිට $v = u + ft$ මගින්

$\sqrt{3gl} = \sqrt{gl} + gt_1 \Rightarrow t_1 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\frac{l}{g}}$ වේ.

(10) (05)



t_2 යනු A සිට B ට සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් ගමන් කිරීමට P අංශුවට ගතවන කාලය යැයි ගනිමු.

එවිට යාබද රූපසටහන අනුව

$\sqrt{\frac{g}{l}}\, t_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$ ලැබේ.

(10) (05)

$t_1 + t_2 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi)\sqrt{\frac{l}{g}}$. (05)

එබැවින්, O සිට පොළොවට ලඟාවීමට ගතවන කාලය $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi)\sqrt{\frac{l}{g}}$ වේ. [40]

14. (a) **a** හා **b** දෛශික දෙකක තිත් ගුණිතය වන $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ අර්ථ දක්වන්න.

a, **b**, **c** හා **d** ඕනෑම දෛශික හතරක් සඳහා $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$ යැයි උපකල්පනය කරමින් $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ නම් $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ බව පෙන්වන්න.

එ නයින්, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමාන නම් එය සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

(b) A, B, C, D, E හා F යනු පැත්තක දිග මීටර $2a$ වන සවිධි ෂඩස්‍රයක වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ශීර්ෂ වේ. විශාලත්ව නිව්වන $P, 2P, 3P, 4P, 5P, L, M$ හා N වන බල පිළිවෙළින් $AB, CA, FC, DF, ED, BC, FA$ හා FE දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශා අතට ක්‍රියා කරයි.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, P ඇසුරෙන් L, M හා N සොයන්න.

නිරවුලය

(a) $\mathbf{a}.\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ වේ; මෙහි θ යනු **a** හා **b** දෛශික දෙක අතර කෝණය වේ. [10]

(10) [illegible]

$\mathbf{c}=\mathbf{a}$ හා $\mathbf{d}=\mathbf{b}$ යැයි $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}.\mathbf{c}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{a}.\mathbf{d}+\mathbf{b}.\mathbf{d}$ හි ගැනීමෙන්

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}.\mathbf{a}+\mathbf{b}.\mathbf{a}+\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{b}$ ලැබේ. (10)

තවුත් $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}+\mathbf{b}|$, $\mathbf{a}.\mathbf{a}=|\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, $\mathbf{b}.\mathbf{b}=|\mathbf{b}||\mathbf{b}|$ හා $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}$ වේ.
(05) (05) (05)

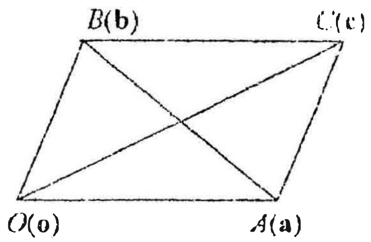
$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+2(\mathbf{a}.\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2$ වේ. (05) [30]

$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2-2(\mathbf{a}.\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2$. (10) [10]

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=4\,\mathbf{a}.\mathbf{b}$ (05)

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ නම් $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ වේ. (05) [10]

a, **b** හා **c** යනු O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක ශීර්ෂ වන A, B හා C හි පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. (05)



$OC=|\mathbf{c}|$ හා $AB=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$ වේ.

තවුත් $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ වේ.

එබැවින්, $OC=|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ ලැබේ.

$OC=AB\Rightarrow|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. (05)

ඉහත සාධනය කරන ලද ප්‍රතිඵලය අනුව $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ වේ. (05)

මෙයින් අදහස් වන්නේ OA යන්න OB ට ලම්බ බවයි. (05)

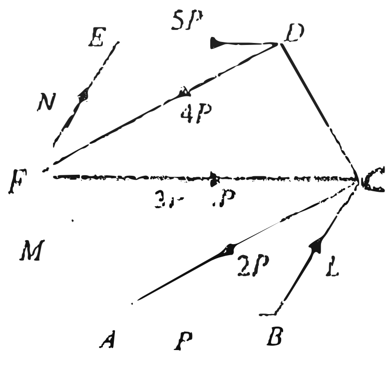
එබැවින්, $OABC$ යනු සෘජුකෝණාස්‍රයකි.

(b) → දිශාවේ තිරස්ව බල විභේදනයෙන් ⟶

$$P-2P\cos\frac{\pi}{6}+L\cos\frac{\pi}{3}+3P-4P\cos\frac{\pi}{6}+M\cos\frac{\pi}{3}+N\cos\frac{\pi}{3}+5P=0 \text{ ලැබේ. (10)}$$

$$9P-3\sqrt{3}P+\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}N=0$$

එනම්, $L+M+N=(\sqrt{3}-3)6P\rightarrow(1)$ වේ. (05)



සිරස්ව ඉහළට බල විභේදනයෙන් ↑

$$-2P\cos\frac{\pi}{3}-4P\cos\frac{\pi}{3}-M\sin\frac{\pi}{3}+N\sin\frac{\pi}{3}+L\sin\frac{\pi}{3}=0 \text{ (10)}$$

$$-3P-\frac{\sqrt{3}}{2}(M-N-L)=0 \qquad N+L-M=2\sqrt{3}P$$

එනම්, $L-M+N=2\sqrt{3}P\rightarrow(2)$ වේ. (05)

F වටා වාමාවර්තව ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$-2P.2a+P.2a\sin\frac{\pi}{3}-5P.2a\sin\frac{\pi}{3}+L.2.2a\sin\frac{\pi}{3}=0 \text{ ලැබේ. (10)}$$

$$-2P-2\sqrt{3}P+\sqrt{3}L=0$$

$L = \frac{2}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})P$ (10)

$(1)-(2) \Rightarrow \quad 2M = (\sqrt{3}-3)6P - 2\sqrt{3}P = (4\sqrt{3}-18)P \Rightarrow M = (2\sqrt{3}-9)P$ (10)

$(1)+(2) \Rightarrow$

$2N = (\sqrt{3}-3)6P + 2\sqrt{3}P - 2L = (8\sqrt{3}-18)P - \frac{4}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})P = \left(\frac{20\sqrt{3}}{3} - 22\right)P$

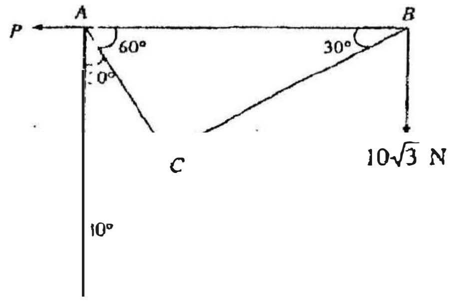
$N = \left(\frac{10}{\sqrt{3}} - 11\right)P$ (10) **[70]**

15. (a) AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් දිගින් සමාන වේ. AB හි බර $2w$ වන අතර BC හි බර w වේ. දඬු B හිදී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A හා C සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටින සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයෙහි සිටුවා ඇත.

$A\hat{B}C = 2\theta$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}w\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

B හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා එය තිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

(b) AB, BC, CD, DA හා AC සැහැල්ලු දඬු පහක්, රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට, ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත.



$A\hat{B}C = A\hat{D}C = D\hat{A}C = 30°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ. රාමුකට්ටුව D හිදී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර, B හිදී නිව්ටන $10\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. AB තිරස් වන පරිදි රාමුකට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත්තේ A හිදී යෙදූ නිව්ටන P තිරස් බලයක් මගිනි.

(i) P හි අගය සොයන්න.

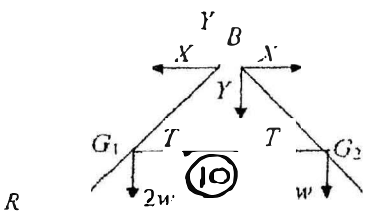
(ii) D හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් රාමුකට්ටුව සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

(a) $AB = BC = 2a$ යැයි ගනිමු.

බල පද්ධතිය සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$w.a.\sin\theta + 2w.3a.\sin\theta - R.4a.\sin\theta = 0$ ලැබේ. (15)



$R = \frac{\ }{4}w$. (05)

AB දණ්ඩ සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$T.a.\cos\theta + 2w.a.\sin\theta - R.2a.\sin\theta = 0$ ලැබේ. (15)

$T = -2w\tan\theta + 2R.\tan\theta = \left(-2w + \frac{7}{2}w\right)\tan\theta = \frac{3}{2}w\tan\theta$ (05) **[50]**

AB දණ්ඩ සඳහා තිරස් විභේදනයෙන්

$X = T = \frac{3}{2}w\tan\theta$ (05)

AB දණ්ඩ සඳහා සිරස් විභේදනයෙන්

$Y + R - 2w = 0$

$Y = -R + 2w = -\frac{7}{4}w + 2w = \frac{1}{4}w$. (05)

එබැවින්, B සන්ධියෙහි ප්‍රතික්‍රියාව

$\sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}w\tan\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{4}w\right)^2} = \frac{w}{4}\sqrt{1+36\tan^2\theta}$ වේ. (05) **[15]**

තිරස සමඟ ප්‍රතික්‍රියාව සාදන කෝණය

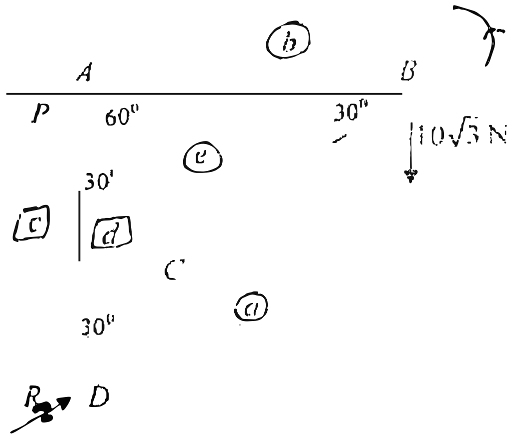
$$\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{w}{4}}{\frac{3}{2}w\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\cot\theta\right)$$ වේ. (5) [5]

(b) (i) D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$P.AD - 10\sqrt{3}.AB = 0$ වේ. (05)

නමුත් $AD = 2AC\cos 30^0$

$= 2AB\cos 60^0 \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ (05)



$P.\frac{\sqrt{3}}{2}AB - 10\sqrt{3}.AB = 0$

$P = 20\text{ N}$. (05) [15]

R යනු E හි ප්‍රතික්‍රියාව යැයි ද, θ යනු එය තිරස සමඟ සාදන කෝණය යැයි ද ගනිමු.

සිරස් බල විභේදනයෙන්

$R\sin\theta = 10\sqrt{3}$ ලැබේ. (05)

තිරස් බල විභේදනයෙන් $R\cos\theta = P = 20$ ලැබේ.

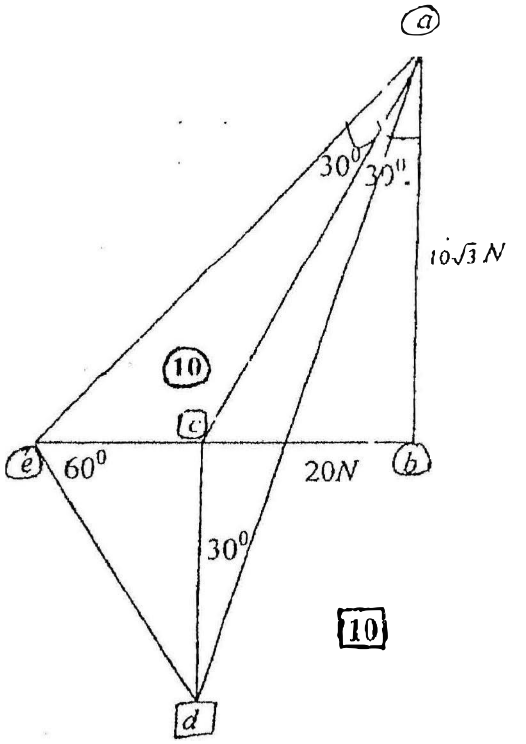
$R = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 20^2} = 10\sqrt{7}\text{ N}$. (05)

$\tan\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (05)

$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\,}$

පද්ධතිය බල තුනක යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතින බැවින් R ප්‍රතික්‍රියාවද B ඔස්සේ යා යුතුය. [15]

ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහන:



[10]

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	ආතතිය	30 N
BC	තෙරපුම	$20\sqrt{3}$ N
AC	තෙරපුම	20 N
DC	තෙරපුම	40 N
AD	ආතතිය	$10\sqrt{3}$ N

(20) (20) [40]

පිළිතුර (5) ලකුණින් (−)

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලාකාර කවචයක අභ්‍යන්තර හා බාහිර අරයන් a හා b ($> a$) වේ. කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය දිගේ එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\dfrac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$ බව පෙන්වන්න.

ස්වකීය වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් රළු පොළොවක් හා සමාන ලෙස රළු සිරස් බිත්තියක් ස්පර්ශ වන පරිදි මෙම අර්ධගෝලාකාර කවචය සමතුලිතතාවේ පවතී.

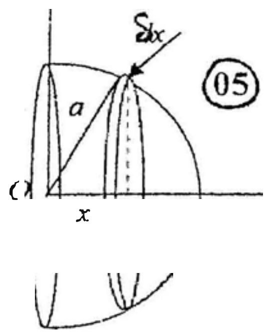
සමතුලිතතාව සීමාකාරී නම්, තිරසට ආධාරකයේ ආනතිය $\sin^{-1}\left\{\dfrac{8\mu b(1+\mu)(a^2+ab+b^2)}{3(1+\mu^2)(a+b)(a^2+b^2)}\right\}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි μ යනු කවචය හා රළු පෘෂ්ඨ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

සමමිතියෙන් අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. (05)

$\bar{x}$ යනු අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රය වන O සිට ඇති දුර යැයි ගනිමු

ρ යනු අර්ධ ගෝලයේ ඝනත්වය යැයි ගනිමු.



$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\rho\bar{x}$ (10)

$= \int_0^a \pi(a^2-x^2)x\rho\, dx$ (10)

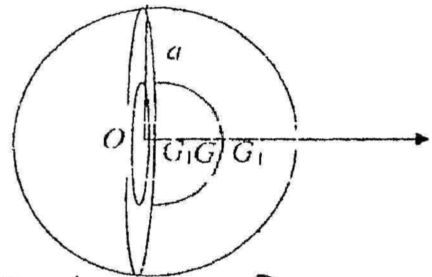
එනම්, $\frac{2}{3}a^3\bar{x} = \int_0^a (a^2x - x^3)dx = \left[a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)a^4 = \frac{1}{4}a^4 \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{8}a$

(05) (05) (05)

එබැවින්, අරය a වන ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ O සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් වේ. [45]

අරය a වන ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් වේ.

අරය b වන ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{3}{8}b$ දුරකින් වේ.



$\bar{\bar{x}}$ යනු කවචයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර යැයි ගනිමු.

$\left(\frac{2}{3}\pi b^3 - \frac{2}{3}\pi a^3\right)\rho\bar{\bar{x}} = \left(\frac{2}{3}\pi b^3\right)\rho\frac{3}{8}b - \left(\frac{2}{3}\pi a^3\right)\rho\frac{3}{8}a$. (5) [illegible]

(10) (10) (10)

(5) (5)

එනම්, $\bar{\bar{x}} = \dfrac{\frac{3}{8}(b^4-a^4)}{(b^3-a^3)} = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2} \rightarrow$ (1) වේ. [45]

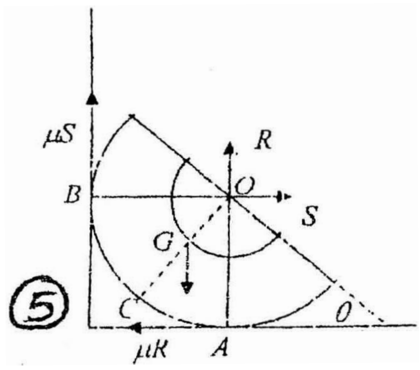
තිරස් විභේදනයෙන් $S = \mu R \rightarrow (1)$ (05)

සිරස් විභේදනයෙන් $R + \mu S = w \rightarrow (2)$ (05)

(1) හා (2) න්

$R = \dfrac{w}{1+\mu^2}$ හා $S = \dfrac{\mu w}{1+\mu^2}$ ලැබේ.

(05) (05)



O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$w.OG\sin\theta = \mu R.OA + \mu S.OB$ ලැබේ. (15)

$$w.\frac{3}{8}\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}\sin\theta = \frac{\mu w}{1+\mu^2}.b + \frac{\mu^2 w}{1+\mu^2}.b$$ වේ. (10) ← ආදේශයට

$$\frac{3}{8}\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}\sin\theta = \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}.b$$ වේ. (05)

$$\sin\theta = \frac{8}{3}\frac{\mu b(1+\mu)(a^2+ab+b^2)}{(1+\mu^2)(a+b)(a^2+b^2)}$$ වේ. (05)

$$\theta = \sin^{-1}\left\{\frac{8}{3}\cdot\frac{\mu b(1+\mu)(a^2+ab+b^2)}{(1+\mu^2)(a+b)(a^2+b^2)}\right\}$$ වේ.

---

17. (a) හිස වැටීමේ සම්භාවිතාව p වූ නැඹුරු කාසියකින් නිමල්, සුනිල් හා පියල් ක්‍රීඩාවක යෙදෙති. නිමල්, සුනිල් හා පියල් එම පටිපාටියට මෙම කාසිය උඩ දමති. අගය ලබාගත් පළමුවන තැනැත්තා ක්‍රීඩාව දිනයි.

නිමල් ඔහුගේ

(i) දෙවන වාරයේදී,

(ii) තෙවන වාරයේදී

ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ඒ නයින් අවසානයේදී, නිමල් ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

කාසියෙන් හිස වැටීමට වඩා අගය වැටීමට වැඩි ශක්‍යතාවක් ඇත්නම්, නිමල්ට ක්‍රීඩාව දිනීම සඳහා 50% ට වඩා වැඩි ඉඩක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයක මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් $\bar{x}$ හා s_X වේ. a හා b නියත වන $y_i = a + bx_i$ රේඛීය පරිණාමණය යොදාගෙන, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකය $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ කුලකයකට පරිණාමනය කර ඇතැයි සිතමු.

$\bar{y} = a + b\bar{x}$ හා $s_Y^2 = b^2 s_X^2$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා s_Y යනු $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

(i) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

ඒ නයින්,

(α) {2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07} නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය.

(β) මධ්‍යන්‍යය 5 හා සම්මත අපගමනය 6 වන අගය හතක්

සොයන්න.

(ii) ලුණු. මලුවල අසුරනු ලබන අතර නිෂ්පාදකයා ඒවා එක එකක 25 kg ක් ඇති බව සඳහන් කරයි. නියම බර නොදන්නා එවැනි මලු 80 ක් සඳහා පහත දක්වෙන තොරතුරු දී ඇත:

$\sum^{80}(x_i - 25) = 27.2$ හා $\sum^{80}(x_i - 25)^2 = 35.1$; මෙහි $x_i\ (i = 1, 2, ..., 80)$ මගින් i වෙනි මල්ලේ නියම බර දක්වේ. සුදුසු රේඛීය පරිණාමනයක් යොදාගෙන හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ මලු අසුවෙනි නියම බරෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

N - නිමල් අග ලබා ගැනීම .

S - සුනිල් අග ලබා ගැනීම .

P - පියල් අග ලබා ගැනීම .

$P(N) = P(S) = P(P) = 1 - p$ (5)

$= q$ යැයි ගනිමු .

(i) P(2 වන වරදී නිමල් ක්‍රීඩාව දිනීම)

$= P(N'S'P'N)$ (5)

$= P(N').P(S').P(P')P(N)$ (5)

$= p . \quad p . \quad p . \quad (1-p)$

$= p^3(1-p)$ (5)

(ii) P (නිමල් දෙවන වර දිනීම)

$= P(N'S'P'N'S'P'N)$ (5)

$= P(N')P(S')P(P').P(N').P(S')P(P').P(N)$ (5)

$= p^6 q$

$= p^6(1-p)$ (5)

15

(iii) P(නිමල් දිනීම)

$= P(N \cup N'S'P'N \cup N'S'P'N'S'P'N \cup \ldots\ldots)$ (5)

$= P(N) + P(N'S'P'N) + \ldots\ldots$ (5)

$= q + p^3 q + p^6 q + \ldots$ (5)

$= q(1 + p^3 + p^6 + \ldots)$

$= \dfrac{(1-p)}{1-p^3}$

(5)

$1+p+p^2$

25

හිසට වැටීමට වඩා අග වැටීමට ඉඩ ප්‍රස්ථාව කාසියෙහි වැඩි නම් එවිට $p < \frac{1}{2}$ වේ.

එබැවින්, $1 + p + p^2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ ලැබේ. (05)

P(නිමල් ක්‍රීඩාව දිනීම) $= \frac{1}{1 + p + p^2} > \frac{4}{7} = 0.571 > 0.5$ වේ

(05) (05)

නිමල්ට ක්‍රීඩාව දිනීම සඳහා 50% ට වඩා ඉඩ ප්‍රස්ථාවක් ඇත.

(b) $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i) = na + \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

එනම්, $\bar{y} = a + b\bar{x}$ වේ. (05) [5]

$S_Y^2 = \sum^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum^{n}\{(a + bx_i) - (a + b\bar{x})\}^2 = b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = b^2 S_X^2$

(05) (05) [10]

$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} = \frac{28}{7} = 4.$ (05)

$s_X = \sqrt{\frac{1}{7}\{(1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{7}\{9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9\}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = 2.$ (05) [05]

(α) (i) $y = 1 + 1.01x$ යන්න {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} කුලකය {2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07} කුලකයට පරිණාමනය කරයි. (05)

$\bar{y} = 1 + 1.01 \times 4 = 5.04$ (05)

$s_Y = bs_X = 1.01 \times 2 = 2.02$ (05) [15]

(β) (ii) a හි b නියත වන $y = a + bx$ පරිණාමනය සලකමු.

එවිට $\bar{y} = a + b\bar{x}$ හා $s_Y = bs_X$ වේ.

එබැවින්, $5 = a + 4b$ හා $6 = 2b \Rightarrow b = 3$ හා $a = -7$ වේ.

(05) (05)

$y = -7 + 3x$

සංඛ්‍යා තත - 4, - 1, 2, 5, 8, 11, 14 වේ (05) [15]

(c) $y = -25 + x$ පරිණාමනය සලකමු. (05)

එවිට $\bar{y} = -25 + \bar{x}$ මගින් $\frac{27.2}{80} = -25 + \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = 25 + 0.34 = 25.34$ ලැබේ. [15]

(05) (05)

$s_Y^2 = s_X^2$ මගින් $s_X = \sqrt{\frac{85.1}{80}} = \sqrt{1.06375} = 1.031$ ලැබේ.

(05)