අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2016

ඇගයීම් වාර්තාව

10 - සංයුක්ත ගණිතය

පර්යේෂණ හා සංවර්ධන ශාඛාව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව,
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව.

2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, ව.පැ. $= \sum_{r=1}^{1} r(r+1) = 2$ හා

ද.පැ. $= \frac{1}{3}(1+1)(1+2) = 2.$ 5

එනයින් $n=1,$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

යම් $p \in \mathbb{Z}^+$ ලෙස ගෙන, ප්‍රතිඵලය $n=p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ යැයි ගනිමු. (අභ්‍යුහන උපකල්පනය) 5

දැන්, $\sum_{r=1}^{p+1} r(r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(r+1) + (p+1)\left[(p+1)+1\right]$ 5

$= \frac{p}{3}(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2)$ (අභ්‍යුහන කල්පිතය මගින්)

$= \frac{(p+1)}{3}(p+2)(p+3).$ 5

එනයින්, $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=p+1$ සඳහා ද එය සත්‍ය වේ. $n=1$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව කලින් පෙන්වා ඇත. එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

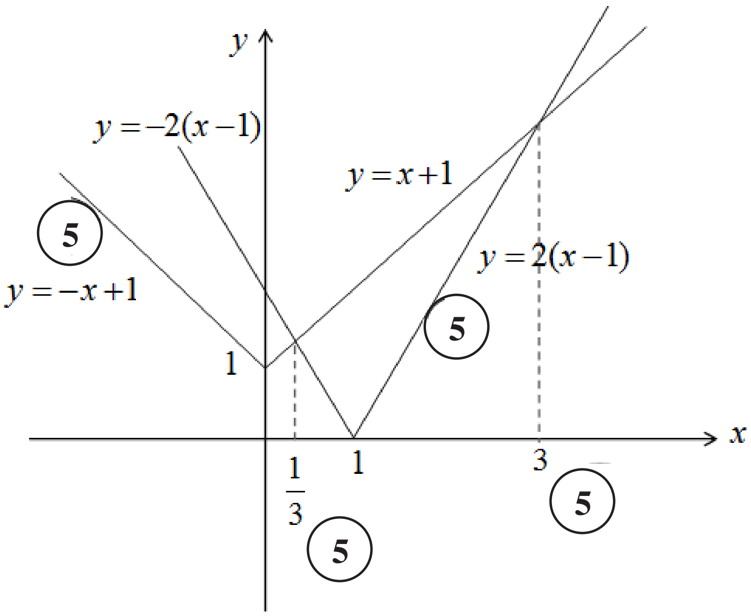
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 97%ක් පමණි. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය නිසියාකාරව යෙදීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 53% ක් පමණි.

$n=p$; $p \in \mathbb{Z}^+$ ට උපකල්පනයේදී $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ ලෙස ලිවිය යුතු වුවත් $\sum_{r=1}^{p} p(p+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ වැනි වැරදි සහිතව ලියා තිබීම නිසා අපේක්ෂකයන් වැඩිදෙනකුට එම පියවර සඳහා ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. එලෙසම $n=p+1$ සඳහා වූ සාධනය ද නිවැරදි නොවීය.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයේ පියවර තහවුරු වන පරිදි අභ්‍යාසවලට යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගැනීමට සිසුන් උනන්දු කළ යුතුය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. එක ම රූප සටහනක $y = |x| + 1$ හා $y = 2|x - 1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. **ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ,** $|x| + 1 > 2|x - 1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



රූපය මගින්, $|x|+1>2|x-1| \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය I

(i) අවස්ථාව, $\boxed{x \ge 1}$ $x+1>2(x-1) \Leftrightarrow x<3$ 5

එබැවින්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් වන්නේ $1 \le x < 3$ තෘප්ත කරන x අගයන් ය.

(ii) අවස්ථාව, $\boxed{0<x<1}$ $x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$. 5

එබැවින්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් වන්නේ $\frac{1}{3}<x<1$ තෘප්ත කරන x අගයන් ය.

(iii) අවස්ථාව, $\boxed{x \le 0}$ $-x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>1$

මෙම විසංවාදය මගින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැති බව ගම්‍ය වේ.

එබැවින්, විසඳුම් කුලකය $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3}<x<3\right\}$ වේ. 5

15

විකල්ප ක්‍රමය II

$|x|+1>2|x-1|$

$\Leftrightarrow x^2+2|x|+1>4(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2(|x|+4x)+3<0$

$\boxed{x>0}$

$3x^2-10x+3<0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3)<0$ 5

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$ 5

$\boxed{x<0}$

$3x^2-6x+3<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2<0$ 5

මෙය විය නොහැක.

15

---

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 94% ක් පමණි. මෙම ප්‍රශ්නයෙන් මාපාංක ඇතුළත් ශ්‍රිතයන්හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් ඇඳීම වඩා පහසු වන අතර එමගින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ඉන් විසඳුම් සෙවීම අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 43% ක් පමණි.

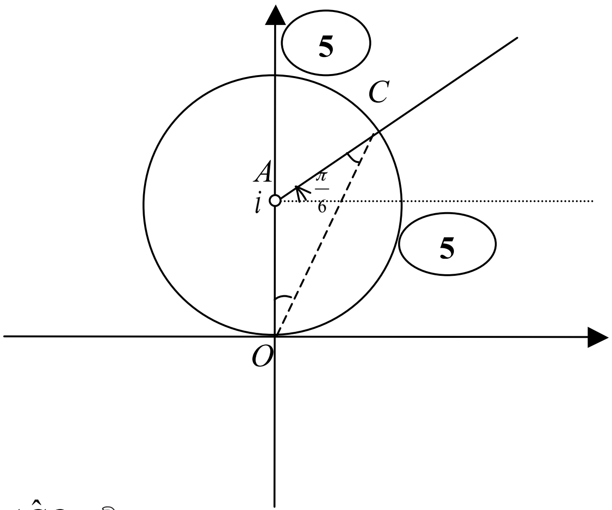
එම ප්‍රස්තාරවල වම් කොටසේ බාහු සමාන්තරව ඇඳීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. මාපාංක ඇතුළත් අසමානතා නිවැරදිව තහවුරු වන ආකාරයේ අභ්‍යාසවල විවිධ ක්‍රම යටතේ සිසුන් නිරත කරවීමෙන් මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීම පහසුවෙන් සිදුකළ හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $|z-i| = 1$, (ii) $\text{Arg}(z-i) = \dfrac{\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.



$O\hat{A}C = \dfrac{2\pi}{3}$ වේ.

$OA = AC$, බැවින් $A\hat{O}C = A\hat{C}O$ වේ.

ඒනයින් $A\hat{O}C = \dfrac{\pi}{6}$ හා OC x- අක්ෂය සමඟ සාදන කෝණය $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. 5

තවද, $OC = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 5

ඒනයින් අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. 5

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$y_C = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$ 5

$x_C = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 5

$\therefore z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{3}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ 5

$r = \sqrt{3}$ හා $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ලෙස ගත හැක.

$\boxed{15}$

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 81% ක් පමණි. මෙය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක පථය පිළිබඳ මාතෘකාව යටතේ ඉදිරිපත් කර ඇති අතර පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් සෙවීම අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 18% ක් පමණි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි $|z-i|=1$ හි පථය පැහැදිලිව දක්වා තිබුණද, $Arg(z-i)=\pi/6$ දැක්වීමේදී එම පථය අර්ධ රේඛාවකින් දැක්විය යුතු බව හා $(0,1)$ ලක්ෂ්‍යය අයත් නොවිය යුතු බව හඳුනාගෙන නොතිබීම ලකුණු අහිමි වීමට හේතු විය.

පථ අඩංගු විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම මගින් ලකුණු මට්ටම වර්ධනය කර ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. එක් එක් සංඛ්‍යාංකය එක් වරක් පමණක් භාවිත කරයි නම්, $1, 2, 3, 4$ හා 5 යන සංඛ්‍යාංකවලින්, සංඛ්‍යාංක පහකින් යුත් වෙනස් සංඛ්‍යා කීයක් සෑදිය හැකි ද?

මෙම සංඛ්‍යාවලින් (i) කොපමණක් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා වේ ද?

(ii) කොපමණක 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක එක ළඟ තිබේ ද?

5 4 3 2 1

○ ○ ○ ○ ○

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 5!$ 5

$= 120.$ 5

(i) අවසාන සංඛ්‍යාංකය 2 හෝ 4 විය යුතුය.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 2 \times 4! = 48$ 5

5

(ii) $\boxed{3\ 4}$ එම පිළිවෙළට

ආකාර ගණන $= 4!$

$\boxed{4\ 3}$ එම පිළිවෙළට

ආකාර ගණන නැවත $4\,!$ වේ.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 2 \times 4! = 48$

5

25

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91% ක් පමණි. සංකරණ සංයෝජන මාතෘකාව යටතේ මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 48%කි. ගැටලුවෙහි පළමු කොටස අවබෝධ කර ගැනීම සාමාන්‍ය මට්ටමක පැවති අතර දෙවන කොටසෙහි සංකරණ පිළිබඳ අවබෝධය අඩු කම නිසා අවසාන පිළිතුර නිවැරදිව ලබා ගැනීමේ දෝෂ තිබුණි.

එකිනෙකට වෙනස් ගැටලු කියවා අවබෝධ කොට විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම තුළින් මෙම දෝෂ මඟහරවා ගැනීමට හැකිවේ.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\alpha > 0$ **යැයි ගනිමු.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}} = 16$ **වන පරිදි වූ** α **හි අගය සොයන්න.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{(1+\cos(\alpha x))} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$ 5 5

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{2x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\right)^2 \times \frac{\alpha^2}{2} \times \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

5

$$= 1^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{4}{2} \quad = \alpha^2$$ 5

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \ (\because \alpha > 0)$$

5

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

5

$$5 \quad = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}\times\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{x^2}\cdot\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\frac{\alpha x}{2}}\right)^2\times\frac{\alpha^2}{4}\times\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

5

$$=1^2\cdot\frac{\alpha^2}{4}\cdot 4=\alpha^2 \quad 5$$

$$\therefore \alpha^2=16 \Rightarrow \alpha = 4 \quad (\because \alpha>0)$$

5

$\boxed{25}$

---

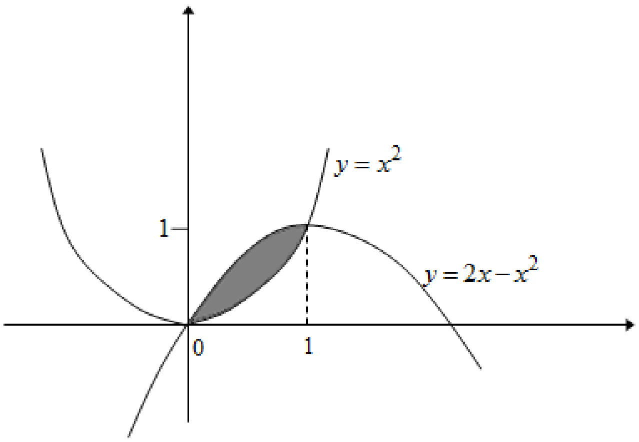
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% ක් පමණි. ශ්‍රිතයක සීමාව සෙවීමට අදාළව මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 46% ක් පමණි. දී ඇති ශ්‍රිතයේ සීමාව සෙවීමට හැකිවන ආකාරයට පරිවර්තනය කිරීමේ අවබෝධය සතුටුදායක මට්ටමක තිබුණ ද වීජීය ප්‍රකාශන සුළු කිරීමේ දෝෂ තිබීම සහ ත්‍රිකෝණමිතික සූත්‍ර පිළිබඳ මතකය මඳ බව ද, මෙහි ලකුණු අඩුවීමට හේතුවේ.

අවසාන පිළිතුර ලබාගත් අපේක්ෂකයන් ද අවශ්‍ය ප්‍රමේයයන් ආශ්‍රිත පියවර නිසි ලෙස නොදැක්වීම ලකුණු අඩුවීමට හේතුවේ. ත්‍රිකෝණමිතික සූත්‍ර පාඩම් කිරීම, වීජීය ප්‍රකාශන සුළු කිරීම පුහුණු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $y = x^2$ හා $y = 2x - x^2$ **වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක** $\frac{1}{3}$ **බව පෙන්වන්න.**



ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සඳහා $x^2 = 2x - x^2$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \text{ හෝ } x = 1.$$

අවශ්‍ය පිළිතුර $= \int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] dx$ 15

5 පහළ, ඉහළ අනුකල සීමා

5 පහළ සහ ඉහළ වක්‍ර හඳුනා ගැනීම

5 ප්‍රකාශනයට

$$= 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \quad 5$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \quad 5$$

$$= \frac{1}{3} \text{ වර්ග ඒකක}$$

$\boxed{25}$

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. වර්ගජ ශ්‍රිතවල දළ සටහන් ඇඳීම හා එම වක්‍ර අතර වර්ගඵලය සෙවීමට අදාළව මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 38% ක් පමණි. වර්ගජ ශ්‍රිතවල දළ සටහන් ඇඳීමෙන් තොරව පිළිතුරු ලබා ගැනීමත් ශ්‍රිත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හඳුනා ගැනීමට අපොහොසත් වීමත් ලකුණු අහිමි වීමට හේතු විය.

සම්මත වක්‍ර කෙටි ක්‍රමවලින් ඇඳීමට සිසුන්ව හුරු කරවීම ලකුණු මට්ටම වර්ධනය කර ගැනීමේ ක්‍රමවේදයකි.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ **සඳහා** $x = 3\sin^2\frac{\theta}{2}$, $y=\sin^3\theta$ **යන පරාමිතික සමීකරණ මගින්** C **වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.**

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \sin 2\theta$ **බව පෙන්වන්න.**

C **මත වූ** P **ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයෙහි අනුක්‍රමණය** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **වේ නම්,** P **ට අනුරූප** θ **පරාමිතියෙහි අගය සොයන්න.**

$$\frac{dy}{d\theta} = 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{2} = 3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

5

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \quad 5$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 5$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0<2\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}. \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91% ක් පමණි. පරාමිතික ශ්‍රිත අවකලනය හා දාම නීතිය යෙදීම තුළින් ශ්‍රිතයක අනුක්‍රමණය සෙවීම අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 52% ක් පමණි. දාම නීතිය යෙදීම නිවැරදි වුවද දී ඇති පරාමිතික ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමේ දෝෂ නිසා ලකුණු අහිමි වී තිබිණි. θ හි පරාසය 2θ සඳහා දැක්වීම පිළිතුරුවල දක්නට නොතිබිණි. ශ්‍රිත අවකලන ක්‍රම හුරුවන පරිදි අභ්‍යාස කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතා මග හැරවිය හැකිය.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. **මූල ලක්ෂ්‍යයත්, $2x + 3y - k = 0$ හා $x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයත් හරහා යන සරල රේඛාව l යැයි ගනිමු; මෙහි $k\ (\neq 0)$ නියතයකි. l හි සමීකරණය k ඇසුරෙන් සොයන්න. $(1, 1)$ හා $(3, 4)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක l හි එක ම පැත්තේ වන බව දී ඇත. $k < 18$ බව පෙන්වන්න.**

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා, $l:\ 2x + 3y - k + \lambda(x - y + 1) = 0$ 5

l, මූලය හරහා යන බැවින් $-k + \lambda = 0$

$\therefore \lambda = k$ 5

$\therefore$ l හි සමීකරණය $(2 + k)x + (3 - k)y = 0$ 5

$(1, 1)$ හා $(3, 4)$ එකම පැත්තේ වේ.

$\Rightarrow [(2+k)+(3-k)][3(2+k)+4(3-k)] > 0$ 5

$\Rightarrow \quad 5(18 - k) > 0$

$\Rightarrow \quad k < 18.$ 5

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා, $l:\ x - y + 1 + \lambda(2x + 3y - k) = 0.$ 5

l, මූලය හරහා යන බැවින්

$1 - \lambda k = 0$

$\Rightarrow \lambda k = 1$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{k}.\ (\because k \neq 0)$ 5

$\therefore$ l හි සමීකරණය $\left(1 + \dfrac{2}{k}\right)x + \left(\dfrac{3}{k} - 1\right)y = 0$ වේ. 5

$(1, 1)$ හා $(3, 4)$ එකම පැත්තේ වේ.

$\Rightarrow \left[1 + \dfrac{2}{k} + \dfrac{3}{k} - 1\right]\left[3 + \dfrac{6}{k} + \dfrac{12}{k} - 4\right] > 0$ 5

$\Rightarrow \dfrac{5(18 - k)}{k^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad k < 18.\ (\because k \neq 0)$ 5

$\boxed{25}$

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. මෙම ප්‍රශ්නය සරල රේඛාව පිළිබඳ මූලධර්ම ඇසුරෙන් සකසා ඇති අතර එහි පහසුතාව 38%කි.

මෙම ගැටලුවේදී සරල රේඛා දෙකක ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය නිවැරදිව ලබාගෙන තිබෙනු දක්නට ලැබුණි. නමුත් සරල රේඛාවක් අනුබද්ධයෙන් ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටීම පිළිබඳව නිවැරදි සංකල්පය අවබෝධ කර ගෙන ඒ අනුව පිළිතුරු ලිවීමට උත්සාහ නොකිරීම නිසා එම කොටසට අදාළ ලකුණු අහිමි කර ගෙන තිබුණි.

මූලධර්මය නිවැරදිව අවබෝධ වන පරිදි ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (-5, 4)$ හා S යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තය යැයි ගනිමු.
(i) S වෘත්තයේ ද
(ii) S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරන, කේන්ද්‍රය $(1, 1)$ ලෙස ඇති වෘත්තයේ ද
සමීකරණ සොයන්න.

(i) $\dfrac{(y-2)(y-4)}{(x-1)(x+5)} = -1$, $x \neq 1, -5$ සඳහා 5

$S : (x-1)(x+5) + (y-2)(y-4) = 0$ 5

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යැයි ගනිමු.

එවිට $x^2 + y^2 - 2x - 2y + c' = 0$. 5

S හා S' ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ. $\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$, මෙහි $g = 2, f = -3, g' = -1, f' = -1,$ $c = 3$ හා $c' = c'$. 5

$\Rightarrow 2(2)(-1) + 2(-3)(-1) = 3 + c'$

$\Rightarrow \qquad c' = -1$ 5

$\therefore S' : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ $\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

(i) $S:(x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ 10

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යැයි ගනිමු.

එවිට $S':(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ 5

$x^2+y^2-2x-2y+2-r^2=0.$

S හා S' ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ. $\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c'$, මෙහි $g=2, f=-3, g'=-1, f'=-1,$ $c=3$ හා $c'=2-r^2$.

$2(2)(-1)+2(-3)(-1)=3+(2-r^2)$ 5

$\Rightarrow \quad r^2=3$ 5

$\therefore S': x^2+y^2-2x-2y-1=0$ $\boxed{25}$

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 86% ක් පමණි. වෘත්තය පිළිබඳ මූලධර්ම ඇසුරෙන් සකසා ඇති ප්‍රශ්නයක් වන අතර එහි පහසුතාව 32%කි.

මෙහි (i) කොටසට අදාළ AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය නිවැරදිව ලබා නොගැනීම නිසා ද එය නිවැරදිව ලබාගත් අපේක්ෂකයන්ට වුවද වෘත්ත දෙකක ප්‍රලම්බ ඡේදනය සඳහා ඇති මූලධර්මය නිවැරදිව යොදා නොගැනීම හේතුවෙන් ද එම ලකුණු අහිමි කරගෙන තිබුණි. මූලධර්මය අවබෝධ වන පරිදි ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කිරීම මගින් මෙම දුර්වලතා මගහරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ **සඳහා** $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ **සමීකරණය විසඳන්න.**

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

5 5

$$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x$$

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = \sin 2x(2\cos x + 1) \quad 5$$

$$\cos 2x = \sin 2x \; \left(\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos x + 1 \ne 0\right)$$

5

$$\tan 2x = 1 \; (\because \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x \ne 0)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} \; \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{8}. \quad 5$$

25

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 83%ක් පමණි. මෙය ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ විසඳීම සම්බන්ධ ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාව 18%කි. මෙම ගැටලුවේදී මුල් පියවර නිවැරදිව සිදු කර තිබුණත් බොහෝ අපේක්ෂකයින් $2\cos x + 1$ ප්‍රකාශනය $\ne 0$ බව සලකා එම සාධකය ඉවත් කර තිබීමෙන් නිවැරදි සම්පූර්ණ විසඳුම ලබා ගැනීමට අපොහොසත් වී තිබුණි.

සාධක ඇතුළත් ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $a \neq 0$ හා $a + b + c \neq 0$ වන පරිදි වූ $a, b, c \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ද ගනිමු.

$f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{a}(a + b + c)$ බව ද $\frac{1}{\alpha - 1}$ හා $\frac{1}{\beta - 1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $g(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $g(x) = (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$ වේ.

දැන්, $a > 0$ හා $a+b+c > 0$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි අවම අගය වන m_1 යන්න $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

$g(x)$ හි අවම අගය m_2 යැයි ගනිමු. $(a+b+c)m_2 = am_1$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ ම නම් පමණක් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ හා $q(x) = x^2 + 3x + 6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න.

$p(x) = (x-1)\,q(x) + 5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

(*a*) $f(1) = a + b + c \neq 0.$ 5

$\therefore$ 1, $f(x) = 0$ හි මූලයක් නොවේ. 5

$\boxed{10}$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ හා $\alpha\beta = \frac{c}{a}.$ 5 (දෙකම සඳහා)

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$ 5

$= \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1$

$= \frac{a+b+c}{a}$ 5

වෙනත් ක්‍රමයක්

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ 5

$f(1) = a(1-\alpha)(1-\beta) = a+b+c$ 5

$(1-\alpha)(1-\beta) = \frac{a+b+c}{a}$ 5

$\boxed{15}$

$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - 1}$ හා $\beta_1 = \frac{1}{\beta - 1}$ යැයි ගනිමු.

α_1 හා β_1 මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $(x - \alpha_1)(x - \beta_1) = 0$ වේ.

එනම් $x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_1\beta_1 = 0$ ----------------------(1) 10

දැන් $\alpha_1+\beta_1=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}$ 5

$$=\frac{-\frac{b}{a}-2}{(a+b+c)/a}=-\frac{(2a+b)}{a+b+c}.$$ 5

තවද $\alpha_1\beta_1=\dfrac{a}{a+b+c}.$ 5

(1) මගින් අවශ්‍ය සමීකරණය $x^2+\dfrac{(2a+b)}{(a+b+c)}x+\dfrac{a}{a+b+c}=0$ වේ.

$\Leftrightarrow (a+b+c)x^2+(2a+b)x+a=0$

$\Leftrightarrow g(x)=0$, මෙහි $g(x)=(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a$. 5 **30**

$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$ 5

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0\ \ (\because a>0)}-\frac{\Delta}{4a}$$ 5

$\geq -\dfrac{\Delta}{4a}$ හා ($x=-\dfrac{b}{2a}$ විට = ලකුණ ලැබේ.)

5 5

$\therefore$ $f(x)$ හි අවම අගය $-\dfrac{\Delta}{4a}$ වේ. 5

එනම් $m_1=-\dfrac{\Delta}{4a}.$ **25**

එබැවින් $m_2=-\dfrac{\Delta'}{4(a+b+c)}$, 5

මෙහි $\Delta'=(2a+b)^2-4(a+b+c)\cdot a$

$$=4a^2+4ab+b^2-4a^2-4ab-4ac$$ 5

$= b^2 - 4ac$

$= \boldsymbol{\Delta}.$ 5

ඒනයින් $m_2 = \dfrac{-\boldsymbol{\Delta}'}{4(a+b+c)}$

$= \dfrac{4a\, m_1}{4(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)m_2 = am_1.$ 5

20

$x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow m_1 \geq 0$ 5

$\Leftrightarrow m_2 \geq 0 \qquad \because m_2 = \dfrac{a\, m_1}{(a+b+c)}$ 5

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0.$ 5

15

(*b*) $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $p(1) = 5$ වේ. 5

$q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $q(2) = 16$ වේ. 5

10

$(x-1)q(x) + 5 = (x-1)(x^2 + 3x + 6) + 5$ 5

$= x^3 + 3x^2 + 6x - x^2 - 3x - 6 + 5$

$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ 5

$= p(x).$

10

$q(x) = (x-2)(x-5) + 16$

$\therefore\ p(x) = (x-1)\{(x-2)(x+5) + 16\} + 5$

$= (x-1)(x-2)(x+5) + 16x - 11.$

ඒනයින් අවශ්‍ය ශේෂය $16x - 11$ වේ.

15

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (a) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $(1+x)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ සඳහා $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{n-r}{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^r, x^{r+1} හා x^{r+2} හි සංගුණක එම පිළිවෙළට ගත් විට $1 : 2 : 3$ අනුපාත වලින් යුතු වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී $n = 14$ හා $r = 4$ බව පෙන්වන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$ හා $f(r) = r(Ar+B)$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(a) $\quad (1+x)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, මෙහි ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $\; r = 0, 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

5 $\quad$ 5 $\qquad \boxed{10}$

$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$ සඳහා

$$\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}} \qquad 10$$

$$= \frac{\dfrac{1}{r+1}}{\dfrac{1}{n-r}} = \frac{n-r}{r+1}. \text{ ------------ } (1) \qquad 5$$

$\boxed{15}$

එලෙසම $\quad r = 0, 1, 2, \ldots, n-2,$ සඳහා

$$(1) \implies \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}. \qquad 5$$

${}^{n}C_r : {}^{n}C_{r+1} : {}^{n}C_{r+2} = 1:2:3$ බව දී ඇත. 5

$\Rightarrow \dfrac{n-r}{r+1} = 2$ හා $\dfrac{n-r-1}{r+2} = \dfrac{3}{2}$

5 5

$\Rightarrow n-r = 2(r+1)$-------- (2) හා $2(n-r-1) = 3(r+2)$

$\Rightarrow 4(r+1) - 2 = 3r + 6$

$\Rightarrow r = 4,$ හා (2) මගින් $n = 14$ වේ.

5 5

30

(b) $\dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} = \dfrac{r(Ar+B)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{(r+1)(Ar+A+B)}{(2r-1)(2r+1)}$ 10

$\Leftrightarrow 10r + 9 = r(Ar+B)(2r+1) - (r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$ 5

$= r\left[2Ar^2 + (A+2B)r + B\right] - (r+1)\left[2Ar^2 + (2A+2B-3A)r - 3(A+B)\right]$

$= 2Ar^3 + (A+2B)r^2 + Br - 2Ar^3 - (2B-A)r^2 + 3(A+B)r - 2Ar^2 - (2B-A)r + 3(A+B)$

$= -(4A+2B)r + 3(A+B),\ r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා 5

$\Leftrightarrow r^1 : 4A + 2B = 10$ හා $r^0 : 3A + 3B = 9$ 10

$\Leftrightarrow A = 2$ හා $B = 1.$

5 5

40

$U_r = g(r) - g(r+1),$ මෙහි $g(r) = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$ ද $f(r) = r(2r+1)$ ද වේ.

$r = 1;\quad U_1 = g(1) - g(2)$

$r = 2;\quad U_2 = g(2) - g(3)$ 10

$\vdots$

$r = n-1;\quad U_{n-1} = g(n-1) - g(n)$

$r = n;\quad U_n = g(n) - g(n+1)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(1) - g(n+1)$ 10

5 5

$$= \frac{(1)(3)}{(-1)(1)} - \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$$

30

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left\{ -3 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n^2}\right)} \right\}$$ 5

5

$$= -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$ 5

එනයින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{2}$ වේ. 5

5

25

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13.(*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ හා $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{Y}$ වන පරිදි λ හා μ තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ හා $\mathbf{AP}$ සොයා, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ වේ.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, A ලක්ෂ්‍යය $2+i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. B ලක්ෂ්‍යය, $OB = 2\,(OA)$ හා $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{4}$ වන පරිදි වේ; මෙහි O යනු මූලය ද $A\hat{O}B$ මැන ඇත්තේ OA සිට වාමාවර්තව ද වේ. B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(*c*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ද $w = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{5z}{2+i}$ යැයි ද ගනිමු. $\operatorname{Im} w = -1$ හා $|w - 1 + i| = 5$ බව දී ඇත. $z = \pm(2+i)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 5

$\lambda\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ 5

දැන් $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5

$\Leftrightarrow \lambda = 2.$

$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mu\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}.$

දැන් $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5

$\Leftrightarrow \mu = -1.$ 5

$\boxed{25}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-a - 2c = 1$

$\Rightarrow c = -1, a = 1$

$-b - 2d = 0$

$\Rightarrow d = -1, b = 2$

$a + c = 0$

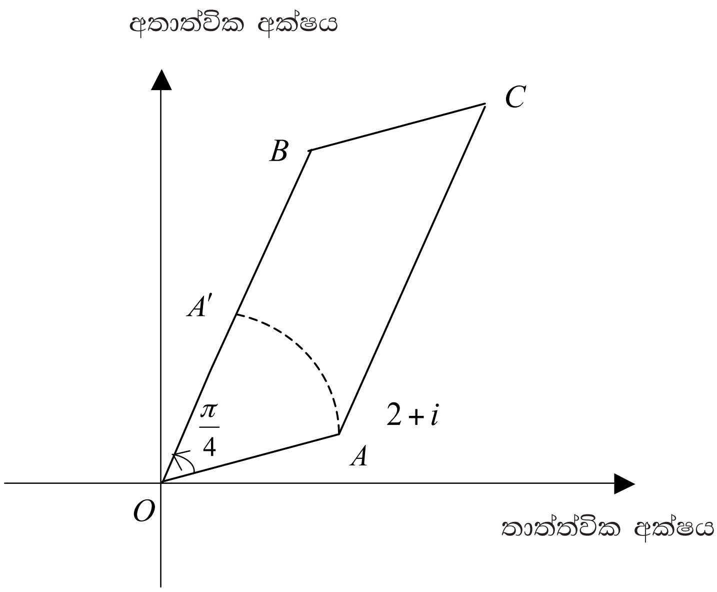
$b + d = 1$

$$\therefore \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$ 15

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ 5

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$ 5 $\boxed{25}$

(*b*)



$\frac{\pi}{4}$ කෝණයක් මගින් O වටා OA රේඛාව වාමාවර්ථව භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන A' ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව 10

$$z_1 = (2+i)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)(1+i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i).$$ 5

$OA = OA' \Rightarrow OB = 2OA'$.

B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වන z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$$z_2 = 2z_1$$
$$= \sqrt{2}(1+3i)$$ මගින් දෙනු ලැබේ. 10 $\boxed{25}$

C ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$$= (2+i) + z_2$$ 10

$$= 2 + i + \sqrt{2}(1+3i)$$

$$= (2+\sqrt{2}) + (1+3\sqrt{2})i.$$ 5 $\boxed{15}$

(c) $w = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{5z}{2+i}$

$$= \frac{2(1-i)}{2} + \frac{5z(2-i)}{5}$$ 5

$$= 1 - i + z(2-i).$$ 5

$$\operatorname{Im} w = -1 \Rightarrow -1 = -1 + \operatorname{Im} z(2-i)$$ 15

$$\Rightarrow \operatorname{Im} z(2-i) = 0$$

$$\Rightarrow z(2-i) = \bar{z}(2+i) ------(1)$$

$$|w - 1 + i| = 5 \quad \Rightarrow |z(2-i)| = 5$$

$$\Rightarrow |z||2-i| = 5$$

$$\Rightarrow |z|\sqrt{5} = 5$$ 15

$$|z| = \sqrt{5} ----------(2)$$

$(1)\times z \;\Rightarrow\; z^2(2-i) = z\,\bar{z}\,(2+i)$

$(2) \qquad \Rightarrow \qquad z\,\bar{z} = 5$

$$\therefore z^2\left(2-i\right) = 5(2+i) \qquad 10$$

$$z^2 = \frac{2+i}{2-i}.5 = \frac{5}{5}\left(2+i\right)^2 \qquad 10 \qquad \boxed{60}$$

$$\therefore z = \pm(2+i).$$

- -

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න, $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

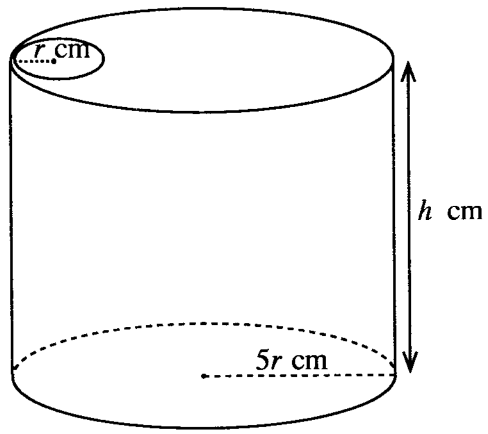
$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) අරය $5r$ cm හා උස h cm වූ සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක හැඩය ඇති තුනී ලෝහ බඳුනකට, අරය r cm වූ වෘත්තාකාර සිදුරක් සහිත අරය $5r$ cm වූ වෘත්තාකාර පියනක් ඇත. (රූපය බලන්න.) බඳුනෙහි පරිමාව 245π cm^3 වන බව දී ඇත. සිදුර සහිත පියන සමග බඳුනෙහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 49\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1).2.(x-3) - (x-3)^2.2x}{(x^2-1)^2} \quad \textbf{15}$$

$$= \frac{2(x-3)\left[x^2 - 1 - x(x-3)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}. \quad \textbf{5}$$

20

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$. ඒනයින් $y = 1$. **5**

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = \pm 1$ **5**

10

$y = f(x)$ හා $y = 1$ සමගාමීව විසඳමු.

i.e $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-1} = 1$ 5

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 1$$

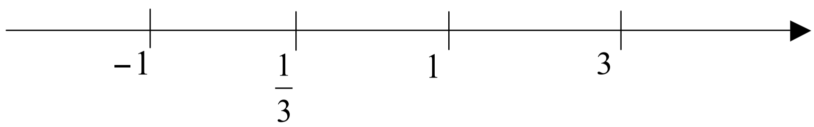
$$\Leftrightarrow 6x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$ 5

ඒනයින් අවශ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $= \left(\dfrac{5}{3}, 1\right)$. 5

15

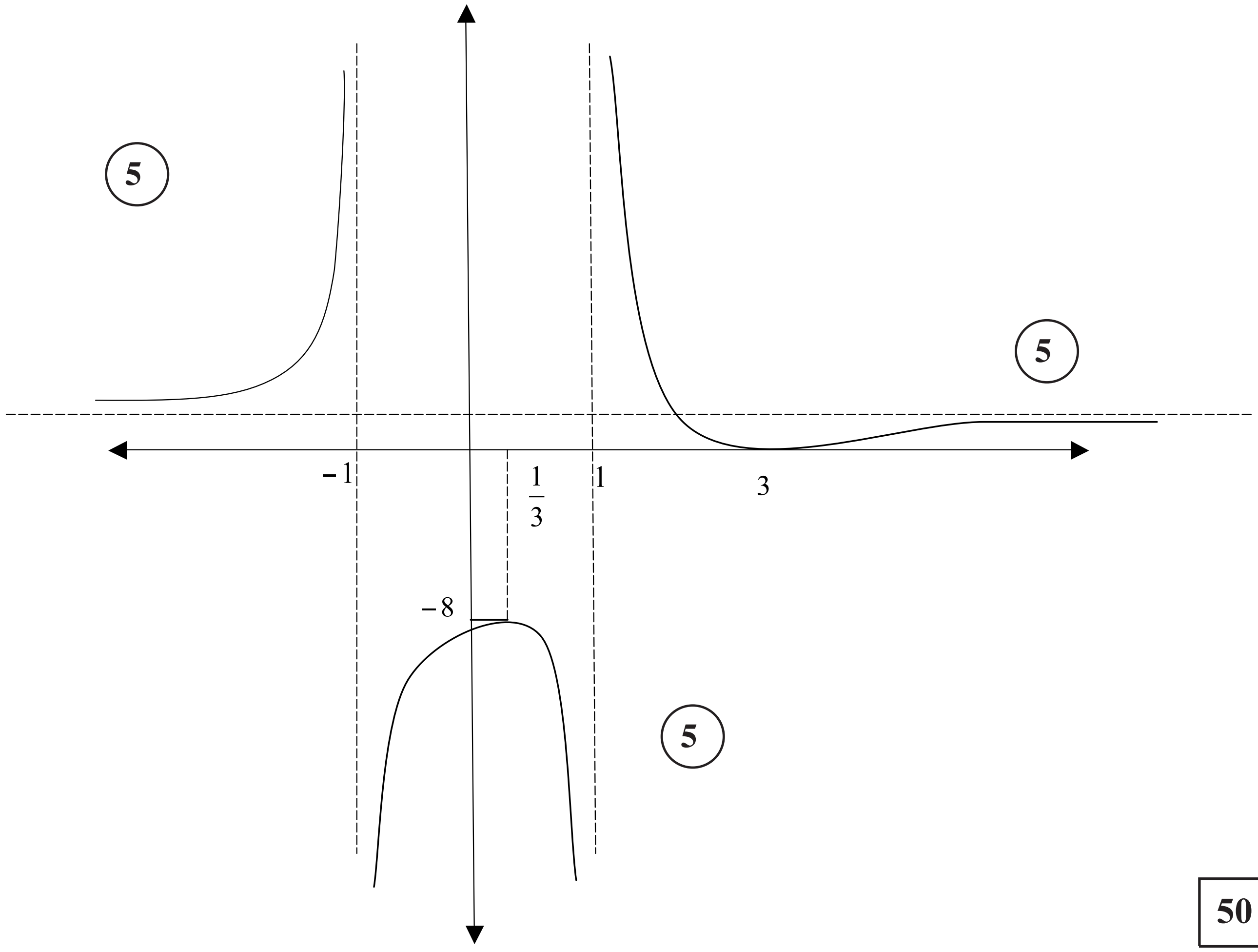
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ හෝ $x = \dfrac{1}{3}$.



	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)
	5	5	5	5	5

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය දෙකක් ඇත. $\left(\dfrac{1}{3}, -8\right)$ − ස්ථානීය උපරිමය 5 $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}{\frac{1}{9}-1} = \dfrac{64}{-8} = -8$

$(3, 0)$ − ස්ථානීය අවමය 5



5 5 5

50

(b) $S = 2\pi(5r)h + \pi(5r)^2 \times 2 - \pi r^2$ 10

$= 10\pi r h + 49\pi r^2$ ----------(1)

$245\pi = \pi(5r)^2 \times h$ 5

$\therefore h = \frac{245}{25r^2} = \frac{49}{5r^2}$

(1) $\Rightarrow$ $S = 10\pi r \times \frac{49}{5r^2} + 49\pi r^2$ 5

$= 49\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right);\ r > 0.$

20

$\frac{dS}{dr} = 49\pi\left(2r - \frac{2}{r^2}\right)$ 10

5 $\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2r = \frac{2}{r^2} \Leftrightarrow r = 1.$ ($r > 0$ බැවින්) 5

5 $0 < r < 1$ සඳහා $\frac{dS}{dr} < 0$ හා $r > 1$ සඳහා $\frac{dS}{dr} > 0$ 5

$\therefore r = 1$ විට S උපරිම වේ. 5

35

---

15 වන ප්‍රශ්නය

15.(*a*) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ සොයන්න.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ සොයා, **ඒ නයින්**, $\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්**, $\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) (i) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^n(\ln x)\,dx$ සොයන්න.

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx$ අගයන්න.

(a) (i)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \quad 10$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_1,$$ මෙහි අභිමත C_1 නියතයකි. 10

$\boxed{20}$

(ii) $$\frac{d\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-1/2} \times (2-2x)$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} \quad 10$$

ඒනිසා,

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{3+2x-x^2} + C_2,$$ මෙහි C_2 අභිමත නියතයකි. 10

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \quad 10$$

$$= -\sqrt{3+2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_3,$$ මෙහි C_3 අභිමත නියතයකි.

5 5

$\boxed{40}$

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ 10

$$2x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 0 = A + B \\ x^1: & 2 = B + C \end{array}\right\} \quad A - C = -2$$

$x^0: -1 = A + C$

$A = -3/2$

$C = 1/2$ 10

$B = 3/2$

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3x+1}{x^2+1}$$ 5

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \frac{-3}{2}\int\frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{3x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{-3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C_4,$$ 15

මෙහි C_4 අභිමත නියතයකි. **40**

(*c*) (i) $n \neq -1$,

$$\int x^n(\ln x)dx = \int (\ln x).\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$ 10

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.\frac{1}{x}dx$$ 10

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C_5$$ 10

මෙහි C_5 අභිමත නියතයකි. **30**

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$. 5

15 **20**

---

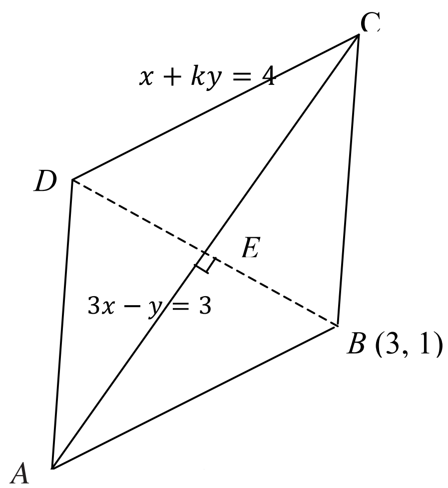
16 වන ප්‍රශ්නය

16. (*a*) *ABCD* රොම්බසයක *AC* විකර්ණයෙහි සමීකරණය $3x - y = 3$ ද $B \equiv (3, 1)$ ද වේ. තව ද *CD* හි සමීකරණය $x + ky = 4$ වේ; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගය හා *BC* හි සමීකරණය සොයන්න.

(*b*) පිළිවෙළින් $x^2 + y^2 = 4$ හා $(x-1)^2 + y^2 = 1$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වෘත්තවල දළ සටහන්, ඒවායේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය පැහැදිලිව දක්වමින් අඳින්න.

C_3 වෘත්තයක් C_1 අභ්‍යන්තරව ද C_2 බාහිරව ද ස්පර්ශ කරයි. C_3 හි කේන්ද්‍රය $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(*a*)



BD හි සමීකරණය $y - 1 = -\frac{1}{3}(x-3) \quad (\because BD \perp AC)$ 10

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = t$ යැයි ගනිමු. 10

$\therefore x = 3 + 3t$ හා $y = 1 - t$.

t යන්න D ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප වේ යැයි ගනිමු.

$E \equiv \left(3 + \frac{3t}{2}, 1 - \frac{t}{2}\right); AC$ මත පිහිටා ඇති බැවින්

$\therefore 3\left(3 + \frac{3t}{2}\right) - \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow 8 + 5t = 3 \qquad \Rightarrow t = -1.$ 10

$\therefore D \equiv (0, 2)$

මෙය DC මත වේ. 10

$0 + k \times 2 = 4$ 10

$k = 2.$

50

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 7x = 10\,;\, 7y = 9$$

$$C \equiv \left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right).$$ 10

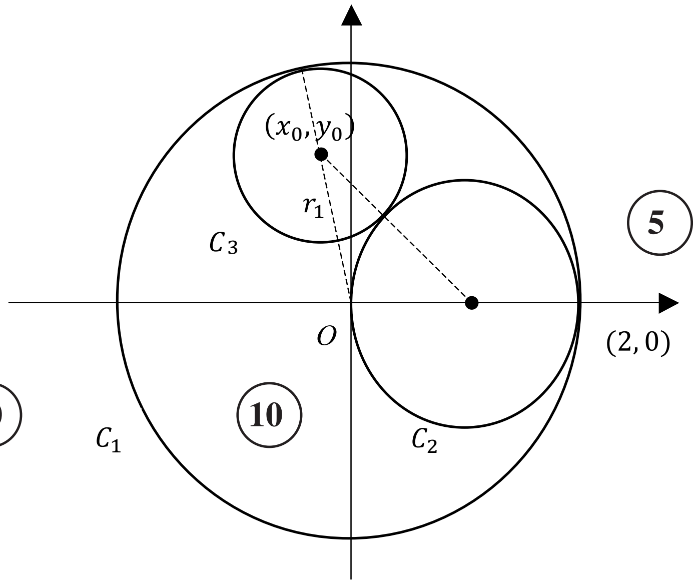
BC හි සමීකරණය

$$y - 1 = \frac{\frac{2}{7}}{-\frac{11}{7}}(x - 3)$$

$$-11y + 11 = 2x - 6$$ 10 **20**

$$2x + 11y = 17.$$

(*b*)



25

C_3 , C_1 අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි $\Rightarrow \quad 2 - r_1 = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$ 15

C_3 ,C_2 බාහිරව ස්පර්ශ කරයි $\Rightarrow 1 + r_1 = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + {y_0}^2}$

$$3 = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} + \sqrt{(x_0 - 1)^2 + {y_0}^2}$$ 15

$$(x_0 - 1)^2 + {y_0}^2 = 9 - 6\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} + {x_0}^2 + {y_0}^2$$ 5

$${x_0}^2 - 2x_0 + 1 + {y_0}^2 = 9 - 6\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} + {x_0}^2 + {y_0}^2$$ 10

$$2x_0 + 8 = 6\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$$ 5

$$\Rightarrow \; ({x_0}^2 + {y_0}^2) = {x_0}^2 + 8x_0 + 16$$

$$\Rightarrow 8{x_0}^2 + 9{y_0}^2 - 8x_0 - 16 = 0$$

ඒනයින් (x_0, y_0), යන්න $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටයි. 5 **55**

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) $\tan\alpha$ හා $\tan\beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha+\beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\tan\theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගෙන, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ යන්න $x^3-3x^2-3x+1=0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3-3x^2-3x+1=(x+1)(x^2-4x+1)$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, *ABC* ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර,

$(a+b+c)(b+c-a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \quad 10 \qquad \boxed{10}$$

Let $\alpha = \beta = \theta$: 5

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}. \quad 5 \qquad \boxed{10}$$

$$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta) \quad 5$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta} \quad 5$$

$$= \frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta)+2\tan\theta}{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta} \quad 5$$

$$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} \quad 5 \qquad \boxed{20}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{1 - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$ 5

$$\Rightarrow -3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 1 = 0. \qquad \left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.\right)$$ බැවින්, 5

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \frown\ x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$ හි විසඳුමකි. 5

15

$$(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \neq -1 \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ යන්න $x^2 - 4x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් වේ. 5

5

එනම් $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ 5

$$\frac{5\pi}{12} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 1.$$ 5

$2 - \sqrt{3} < 1$, බැවින් $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$. 5

25

(*b*) $0 < A < \pi$. 5

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{A}{2}\right)$$ 5 5

15

කෝසයින නීතිය

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$ 5

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

දැන්, $$\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}}{1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}}$$ 10

$$= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc - a^2 + b^2 + c^2} \quad 5$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(a+b+c)} \quad 5$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = (a+b-c)(a+c-b). \quad 5$$

$\boxed{30}$

(*c*) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ යැයි ගනිමු

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha > 0$

$\cos\beta > 0.$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad 5$$

$$= \frac{3}{5}.\sqrt{1-\frac{25}{169}} + \sqrt{1-\frac{9}{25}}.\frac{5}{13} \quad 5$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13}$$

$$= \frac{56}{65}. \quad 5$$

$\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, බැවින් $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ වේ.

එලෙසම $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$, බැවින් $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ වේ.

$\therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ හා ඒනයින් $\alpha + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ වේ. 10

$\boxed{25}$

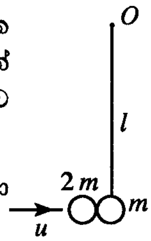
2.2.3. **II** ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

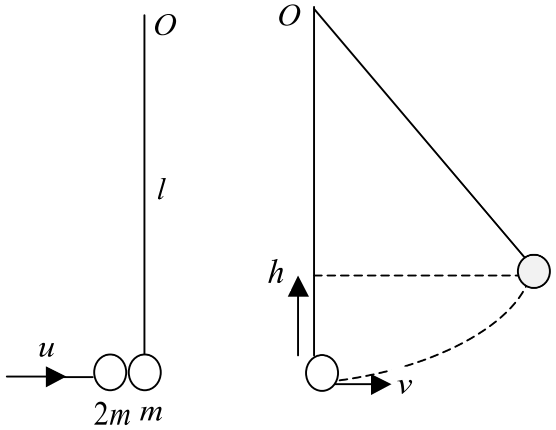
(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසන ලද දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සමතුලිතව එල්ලෙයි. ස්කන්ධය $2m$ වූ තවත් අංශුවක් u ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව පළමු අංශුව සමග ගැටී එය සමග හාවේ. සංයුක්ත අංශුව චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.**

$u=\sqrt{gl}$ නම්, සංයුක්ත අංශුව එහි ආරම්භක මට්ටමෙන් ඉහළට $\frac{2l}{9}$ උපරිම උසක් කරා ළඟා වන බව පෙන්වන්න.





සංයුක්ත අංශුව චලනය වීමට පටන් ගන්නා ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු

පද්ධතියට $\underline{I}=\Delta(M\underline{v})$ යොදමු.

$\rightarrow \quad 0 = 3mv - 2m \times u$ 5

$\Rightarrow v = \frac{2u}{3}.$ 5

ශක්ති සංස්ථිති නියමය මගින්, $(3mg)h = \frac{1}{2}(3m)v^2$ වේ. මෙහි h යනු අවශ්‍ය උස වේ. 10

$\therefore \; h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4u^2}{9(2g)} = \frac{4gl}{18g} = \frac{2l}{9}.$ 5

25

---

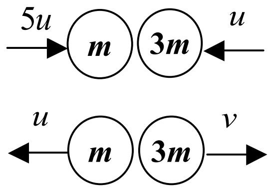
1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 95% ක් පමණි. අංශු දෙකක චලිතය සඳහා ආවේගය සමානයි ගම්‍යතා පරිවර්තනය සහ ශක්ති සංස්ථිති නියමය නිවැරදිව යෙදීම මෙයින් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 56% ක් පමණි. මෙය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් ද, විසඳිය හැකි වේ. ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමේදී ස්කන්ධය 3m වෙනුවට m යෙදීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. තවද නියත ත්වරණයෙන් චලිතය සඳහා වූ චලිත සමීකරණය යොදා ගෙන ගැටලුව විසඳීමට උත්සාහ කර තිබුණි.

ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය හා ශක්ති සංස්ථිති නියමය භාවිතයෙන් සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව හුරු කර වීමෙන් මෙම දුර්වලතා මගහරවා ගත හැකිය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එක ම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් $5u$ හා u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු ව, P හා Q **එකිනෙකින් ඉවතට** පිළිවෙළින් u හා v වේගවලින් චලනය වේ. u ඇසුරෙන් v සොයා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $\underline{I} = \Delta(M\underline{v})$ යොදමු.

$\rightarrow \quad 0 = (3mv - mu) - (5mu - 3mu)$ 5

$\Rightarrow 3mv = 3mu$ 5

$\Rightarrow v = u$. -----------(1)

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය මගින් 10

$v + u = e(5u + u)$

$(1) \Rightarrow 2u = 6eu$

$\therefore \quad e = \frac{1}{3}$. 5

$\boxed{25}$

---

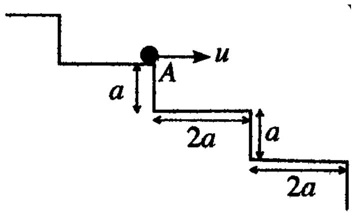
2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

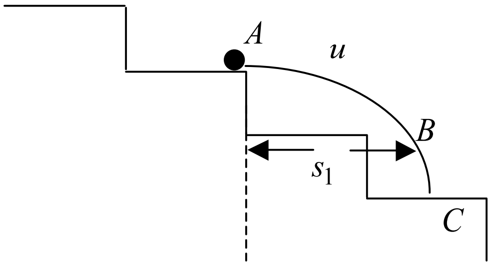
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 96% ක් පමණි. ප්‍රත්‍යාස්ථ වස්තු දෙකක් අතර ගැටුමක් විස්තර කිරීම සඳහා අවශ්‍ය සමීකරණ නිවැරදිව යෙදීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 65% ක් පමණි.

ප්‍රත්‍යාස්ථ ගැටුමක් සඳහා ආවේගය සමානයි ගම්‍යතා පරිවර්තනය හෝ ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය හා නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය නිවැරදිව යෙදීමේදී නිවැරදි දිශාව පිළිබඳ අවබෝධය මදි කම නිසා ගැටලුවට සාර්ථකව පිළිතුරු ලිවීමට නොහැකි වී තිබුණි. ඒ සඳහා සිසුන්ව සරල අභ්‍යාසවල නිරත කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මගහරවා ගත හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ***P* අංශුවක්, අචල පඩි පෙළක පඩියක දාරයෙහි වූ *A* ලක්ෂ්‍යයක සිට එම දාරයට ලම්බව $u = \frac{3}{2}\sqrt{ga}$ මගින් දෙනු ලබන *u* ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ, ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. එක් එක් පඩියේ උස *a* හා දිග 2*a* වේ (රූපය බලන්න). *P* අංශුව *A* ට පහළින් පළමු පඩියේ නොවදින බවත් *A* ට පහළින් දෙවන පඩියේ *A* සිට 3*a* තිරස් දුරකින් වදින බවත් පෙන්වන්න.**





P හි චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යොදමු.

$\downarrow$ *A* සිට *B* දක්වා: $a = \frac{1}{2}gt_1^2$, මෙහි t_1 යනු *A* ට පහළින් වූ පළමු පඩිය වෙත ළඟා වීමට ගනු ලැබූ කාලය වේ. 5

$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}$.

t_1 කාලයකදී චලනය වූ තිරස් දුර s_1 යැයි ගනිමු.

$\rightarrow$ *A* සිට *B* දක්වා : $s_1 = u \times t_1 = \frac{3}{2}\sqrt{g}a \times \sqrt{\frac{2a}{g}} = \frac{3}{\sqrt{2}}a > 2a$. 5

5

එබැවින් *P* අංශුව *A* ට පහළින් වූ පළමු පඩියේ නොවදී.

A සිට *C* දක්වා ගනු ලැබූ කාලය $t_2 = \sqrt{\frac{2(2a)}{g}}$ වේ. 5

$\rightarrow$ $s = ut_2 = \frac{3}{2}\sqrt{ga} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}} = 3a$.

5

$\boxed{25}$

---

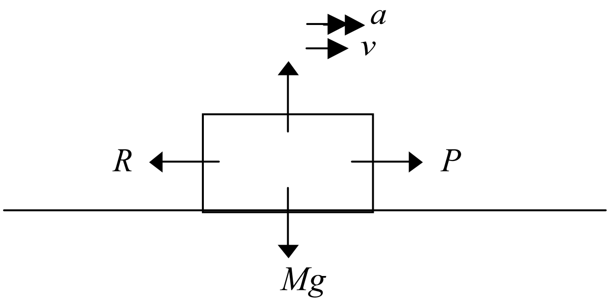
3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 85% ක් පමණි. ගුරුත්වය යටතේ අංශුවක චලිතය පිළිබඳ මූලධර්ම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 32% ක් පමණි. ගැටලුව නිවැරදිව අවබෝධ කර නොගැනීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවය මඟ හරවා ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. R N නියත විශාලත්වයකින් යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව ඍජු සමතලා පාරක් දිගේ ස්කන්ධය M kg වූ කාරයක් චලනය වේ. කාරය v m s^{-1} වේගයෙන් චලනය වන මොහොතක දී එහි ත්වරණය a m s^{-2} වේ. මෙම මොහොතේ දී එහි එන්ජිමේ ජවය $(R + Ma)v$ W බව පෙන්වන්න.

කාරය ඊළඟට එම R N නියත විශාලත්වයෙන් ම යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව එම ජවයෙන් ම ක්‍රියා කරමින් තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ ඍජු පාරක ඉහළට v_1 m s^{-1} නියත වේගයක් සහිත ව චලනය වේ. $v_1 = \dfrac{(R + Ma)v}{R + Mg\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.



ප්‍රකර්ශන බලය PN යැයි ගනිමු.

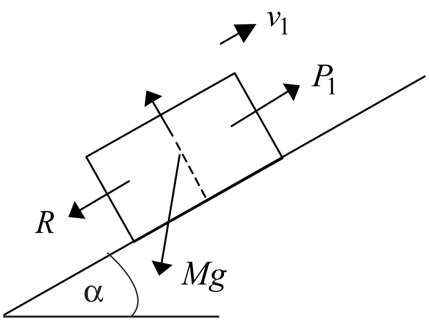
$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ යොදමු.

$P - R = Ma$ -------------- (1) 5

H W යනු එන්ජිමේ ජවය යැයි ගනිමු. 5

එවිට $H = P \times v$

$= (R + Ma)v$ (1) න් 5



$\underline{F} = m\underline{a}$:

$P_1 - R - Mg\sin\alpha = 0$ ---------- (2) 5

තවද $H = P_1 \times v_1$

$\therefore\ v_1 = \dfrac{H}{P_1} = \dfrac{(R + Ma)v}{(R + Mg\sin\alpha)}$. (2) න්

5

25

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% ක් පමණි. P = FV යන සම්මත සමීකරණවල යෙදීම පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 75% ක් පමණි.

ඒකක අතර සම්බන්ධය නිවැරදිව යොදා නොගැනීම නිසා දී ඇති පිළිතුරට ලඟා වීමට නොහැකි වී ඇත. මෙවැනි සරල ගැටලු විසඳීමේදී ඒකක පරිවර්තනය සහ බල ලකුණු කිරීම් පිළිබඳ විශේෂ අවධානය යොමු කරමින් ගැටලු විසඳීමට යොමු කළ යුතුය.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, **a** = 3**i** + 4**j**, **b** = 4**i** + 3**j** හා **c** = α**i** + $(1-\alpha)$ **j** යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$,

(ii) α ඇසුරෙන් **a**·**c** හා **b**·**c**

සොයන්න.

a හා c අතර කෝණය b හා c අතර කෝණයට සමාන නම්, $\alpha = \frac{1}{2}$ **බව පෙන්වන්න.**

(i)

$$|\underset{\sim}{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$|\underset{\sim}{b}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

5 දෙකම සඳහා

5

(ii) $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c} = 3\alpha + 4(1-\alpha) = 4-\alpha$

5

$$\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{c} = 4\alpha + 3(1-\alpha) = 3+\alpha$$

$\underset{\sim}{a}$ හා $\underset{\sim}{c}$ අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු. එවිට $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c} = |\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{c}|\cos\theta$ හා $\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{c} = |b||\underset{\sim}{c}|\cos\theta$.

$|\underset{\sim}{a}| = |\underset{\sim}{b}|$, බැවින් $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c} = b \cdot \underset{\sim}{c}$. 5

$$\therefore 4-\alpha = 3+\alpha$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. 5

$\boxed{25}$

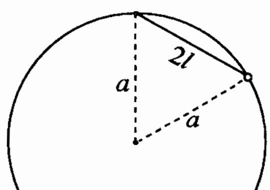
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

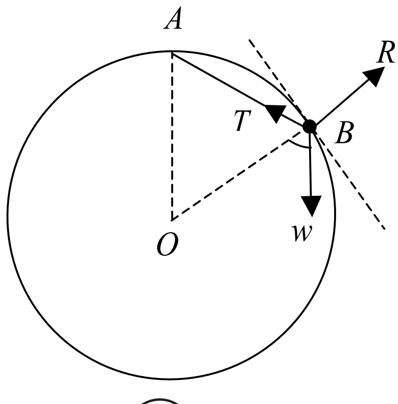
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91% ක් පමණි. දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 52% ක් පමණි. **i** හා **j** ඒකක දෛශික ඇසුරෙන් දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය ප්‍රකාශ කිරීම නිවැරදිව යොදා නොගැනීමෙන් බොහෝ අපේක්ෂකයන් අවසාන පිළිතුර කරා ළඟා වී නොතිබිණි.

අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ විවිධ ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මග හරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

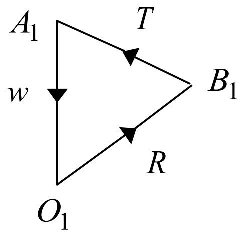
6. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, සිරස් තලයක සවි කර ඇති අරය $a\left(>\sqrt{2}l\right)$ වූ සිහින්, සුමට දෘඪ වෘත්තාකාර කම්බියක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇත. කම්බිය දිගේ චලනය වීමට නිදහස ඇති බර w වූ කුඩා සුමට පබළුවක් තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව, පබළුව සමතුලිතතාවයේ පවතී. ප්බළුව මත ක්‍රියා කරන බල ලකුණු කර, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{2wl}{a}$ බව පෙන්වන්න.





5

බල ත්‍රිකෝණය



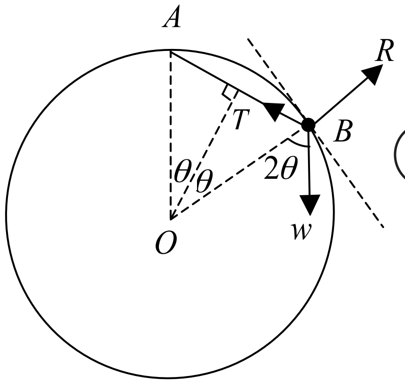
10

$$\frac{T}{AB} = \frac{w}{OA} \Rightarrow T = \frac{2wl}{a}$$ 5

5

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය 1



5

ලාමී ප්‍රමේයය මගින්, $\dfrac{T}{\sin(\pi - 2\theta)} = \dfrac{w}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)}$. 10

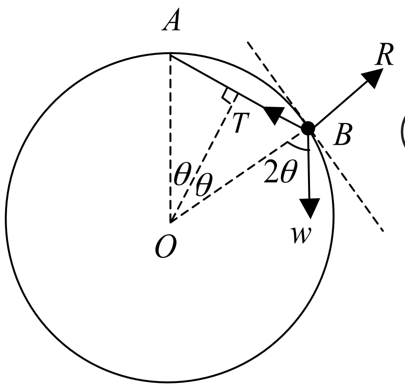
$$\therefore \quad T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$

$$= 2w\sin\theta = \frac{2wl}{a}\left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$ 5

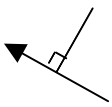
5

25

විකල්ප ක්‍රමය 2



5



OB ට ලම්බ දිශාවට විභේදනය කරමු.

$$T\cos\theta = w\sin 2\theta$$ 10

$$T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$ 5

$$= 2w\sin\theta$$

$$= \frac{2wl}{a}\left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$ 5

25

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 79% ක් පමණි. අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක සමතුලිතතාව යටතේ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර පහසුතාව 23% ක් පමණි. බල ලකුණු කිරීම පිළිබඳ දුර්වලතාවයක් පැවතීම හා බල ත්‍රිකෝණය භාවිත කිරීමට උත්සාහ කර ඇති අපේක්ෂකයන් බල ත්‍රිකෝණය එක් වරම හඳුනා නොගැනීම හේතුවෙන් සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි විය. බොහෝ අපේක්ෂකයින් සරල ක්‍රම අනුගමනය නොකර බල විභේදන ක්‍රමය භාවිත කිරීම නිසා ගැටලුව සංකීර්ණ තත්ත්වයට පත්කර ගෙන ඇත. නිවැරදි ලෙස බල සටහන් ඇඳ ගැනීම සහ ඒවාට අනුරූප සරල ක්‍රම (බල ත්‍රිකෝණ ක්‍රමය, ලාමිගේ ප්‍රමේයය) මගින් ගැටලු විසඳීමට හුරුකරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මගහරවා ගත හැකිය.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A) = p$, $P(B) = \frac{p}{2}$ හා $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$ වේ; මෙහි $p > 0$ වේ. p ඇසුරෙන් $P(A \cap B)$ සොයන්න.
A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි නම්, $p = \frac{5}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

A හා B සිද්ධීන් සඳහා, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$ 5

$=> P(A \cup B) = \frac{3p}{2} - P(A \cap B).$ ------------- (1) 5

$P(A \cup B)) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}.$ බව දී ඇත. ------------ (2)

(1) හා (2) $\Rightarrow \frac{3p}{2} - 2P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5p}{12}.$ 5

A හා B ස්වායත්ත නම්, $P(A \cap B) = P(A)\ P(B).$ 5

$\Rightarrow \frac{5p}{12} = p \cdot \frac{p}{2}$

$\Rightarrow p = \frac{5}{6}. \quad (\because p > 0)$ 5

$\boxed{25}$

$$\Rightarrow \frac{5p}{12} = p \cdot \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \; p = \frac{5}{6}. \quad (\because p > 0) \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 90% ක් පමණි. සරල සිද්ධිවල සම්භාවිතාව පිළිබඳ මූලික යෙදීම් මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 61% ක් පමණි. සිද්ධි දෙකක ස්වායත්තතාව පිළිබඳ අවබෝධය නොමැති කමින් මෙම ගැටලුවට සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සම්භාවිතාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයයන් නිවැරදිව යොදා ගැනීමෙන් සරල ගැටලු විසඳීමට හුරු කර වීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. මල්ලක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින් ම සමාන වූ, සුදු බෝල 6 ක් හා කළු බෝල *n* අඩංගු වේ. එකකට පසු ව අනෙක ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව බෝල දෙකක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{4}{15}$ වේ. *n* හි අගය සොයන්න.

පළමු බෝලය සුදුවීමේ සම්භාවිතාවය $= \frac{6}{n+6}$.

පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාවය $= \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)}$ 10

$$\therefore \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)} = \frac{4}{15} \quad 5$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 23n + 60 = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow (n-4)(2n-15) = 0$$

$\Rightarrow n = 4$. ($\because n$ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.) 5

$\boxed{25}$

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 86% ක් පමණි. මෙයද සම්භාවිතාව පිළිබඳ සරල ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාව 34% ක් පමණි සමහර අපේක්ෂකයින්ට පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණු අතර එය ලබාගත් අපේක්ෂකයන්ට ද සමීකරණය සුළු කර විසඳුම් ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතා මගහරවා ගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. 11 ට අඩු ප්‍රභින්න නිඛිල තුනක මධ්‍යන්‍යය 7 වේ. තවත් නිඛිල දෙකක් ගත් විට නිඛිල පහේම මධ්‍යන්‍යය 5 වේ. තව ද මෙම නිඛිල පහේ එක ම මාතය 3 වේ. නිඛිල පහ සොයන්න.

x, y හා z යනු මධ්‍යන්‍යය 7 වූ 11 ට අඩු ප්‍රභින්න පූර්ණ සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

එවිට $\dfrac{x+y+z}{3} = 7.$ 5

$$\Rightarrow x+y+z = 21 \text{----------------}(1)$$

x, y හා z ප්‍රභින්න හා එකම මාතය 3 බැවින් අමතරව ගත් පූර්ණ සංඛ්‍යා දෙකෙන් අඩු තරමින් එකක්වත් 3 විය යුතුය. අනෙක t යැයි ගනිමු.

පූර්ණ සංඛ්‍යා පහෙහි මධ්‍යන්‍යය 5 බැවින් $\dfrac{x+y+z+t+3}{5} = 5$ වේ. 5

$\Rightarrow 21+3+t = 25$ 5

$\Rightarrow \quad t = 1$.

ඒ නයින්, පූර්ණ සංඛ්‍යා $x, y, z, 3, 1$ වේ. එකම මාතය 3 ද, x, y හා z ප්‍රභින්න ද බැවින් ඒවායින් හරියටම එකක් 3 විය යුතුය. $z = 3$ යැයි ගනිමු.

නැවත $(1) \Rightarrow x+y = 18$. ------------- (2) 5

x හා y යනු 11ට අඩු පූර්ණ සංඛ්‍යා බැවින් (2) න් ($x = 8$ හා $y = 10$) හෝ ($x = 10$ හා $y = 8$) වේ. ඒ නයින්, සංඛ්‍යා පහ 1, 3, 3, 8 හා 10 වේ.

5 $\boxed{25}$

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 80% ක් පමණි. අසමූහිත දත්ත සඳහා මධ්‍යන්‍යය සහ මාතය යන මිනුම් පිළිබඳ දැනුම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 36% ක් පමණි.

දී ඇති දත්ත සම්බන්ධ කර ගෙන සංඛ්‍යා පහෙහි මධ්‍යන්‍යය ලිවීමට නොහැකි වීම නිසාත් සංඛ්‍යා හඳුනා ගැනීමට නිවැරදි තර්ක ගොඩ නැගීමට නොහැකි වීම නිසාත් මෙම ගැටලුවට ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි.

මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය සහ මාතය යන කේන්ද්‍රික ප්‍රවණතා මිණුම් සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවය මඟහරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. **1, 2, 3, 4 හා 5 ලෙස අංක කළ සමාන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ පහකින් සමන්විත, භ්‍රමණය වන වෘත්තාකාර ඉලක්ක පුවරුවක් වෙතට ඊතලයක් විදිනු ලැබේ. එක් එක් ඛණ්ඩයෙහි ඊතලය වදින වාර ගණන පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යාත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ; මෙහි p හා q නියත වේ.**

අංකය	1	2	3	4	5
සංඛ්‍යාතය	1	p	q	5	2

ඉහත දත්තවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් 3 හා $\frac{6}{5}$ බව දී ඇත්නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

මධ්‍යන්‍යය $\mu = 3 \Rightarrow \dfrac{1+2p+3q+20+10}{p+q+8} = 3$ 5

$\Rightarrow 2p+3q+31 = 3p+3q+24$

$\Rightarrow p = 7.$ 5

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$$ 5

විචලතාවය $= \dfrac{6}{5} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{1\cdot 1^2 + 7\cdot 2^2 + q\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{q+15} - 3^2$ 5

$\Rightarrow 51(q+15) = 5(1+28+9q+80+50)$ 5

$\Rightarrow q = 5.$

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \quad 5$$

විචලතාවය $= \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1(1-3)^2 + 7(2-3)^2 + q(3-3)^2 + 5(4-3)^2 + 2(5-3)^2}{1+7+q+5+2} \quad 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{5} = \frac{4+7+5+8}{15+q}$$

$\Rightarrow q = 5.$ 5

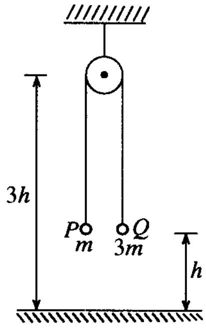
$\boxed{15}$

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 80% ක් පමණි. දී ඇති අසමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක නොදන්නා සංඛ්‍යාත නිමානය කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 21% ක් පමණි. සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති හා සම්බන්ධ සියලු නිරීක්ෂණ සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දැක්වීමට අපහසු වීම නිසා අපේක්ෂකයන්ට සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී ඇත. "විචලතාව" පිළිබඳ අර්ථ දැක්වීම නිසි ලෙස භාවිතා කර නොතිබුණි. දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ හෝ $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$ යන සූත්‍ර භාවිත වන පරිදි විවිධ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව හුරුකරවීම මගින් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) අප්‍රත්‍යාස්ථ තිරස් ගෙබිමකට $3h$ උසක් ඉහළින් සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින්, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී අංශු දෙක ගෙබිමට h උසකින් තන්තුව තදව ඇතිව අල්වා තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. (යාබද රූපය බලන්න.) P හා Q හි චලිතයන්ට වෙන වෙන ම නිව්ටන් දෙවෙනි නියමය යෙදීමෙන්, එක් එක් අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය $\dfrac{g}{2}$ බව පෙන්වන්න.

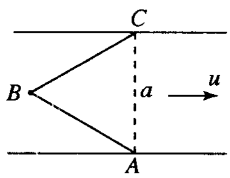


t_0 කාලයකට පසු ව Q අංශුව ගෙබිම සමග ගැටී ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට පැමිණ, තවත් t_1 කාලයක් නිශ්චලතාවයේ තිබී උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරයි. Q අංශුව උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරන තෙක් P හා Q අංශු දෙකෙහි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් වෙන වෙන ම අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, $t_0 = 2\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ බව පෙන්වා, g හා h ඇසුරෙන් t_1 සොයන්න.

P අංශුව ගෙබිමේ සිට $\dfrac{5h}{2}$ උපරිම උසකට ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

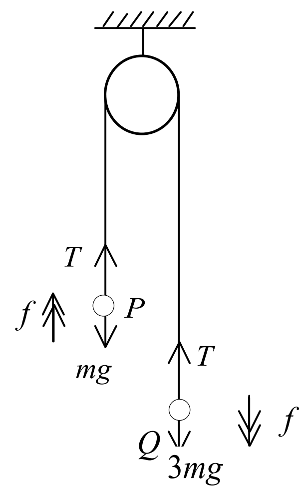
(*b*) පළල a වූ සෘජු ගඟක් ඒකාකාර u වේගයකින් ගලයි. ගඟ ගලන දිශාවට AC රේඛාව ලම්බ වන පරිදි A හා C ලක්ෂ්‍ය ගඟේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරු දෙකෙහි පිහිටා ඇත. තව ද ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන පරිදි AC ගෙන් උඩු ගං අතට B අචල බෝයාවක් ගඟ මැද සවි කර ඇත. (යාබද රූපය බලන්න.) ජලයට සාපේක්ෂව $v\ (>u)$ වේගයෙන් චලනය වන බෝට්ටුවක් A සිට ආරම්භ කර B වෙත ළඟා වන තෙක් චලනය වේ. ඊළඟට එය B සිට C දක්වා චලනය වේ. A සිට B දක්වාත් B සිට C දක්වාත් බෝට්ටුවේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



A සිට B දක්වා චලිතයේ දී බෝට්ටුවේ වේගය $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2-u^2}-\sqrt{3}u\right)$ බව පෙන්වා, B සිට C දක්වා චලිතයේ දී එහි වේගය සොයන්න.

ඒ නයින්, AB හා BC පෙත් සඳහා බෝට්ටුව ගන්නා මුළු කාලය $\dfrac{a\sqrt{4v^2-u^2}}{v^2-u^2}$ බව පෙන්වන්න.

(a)



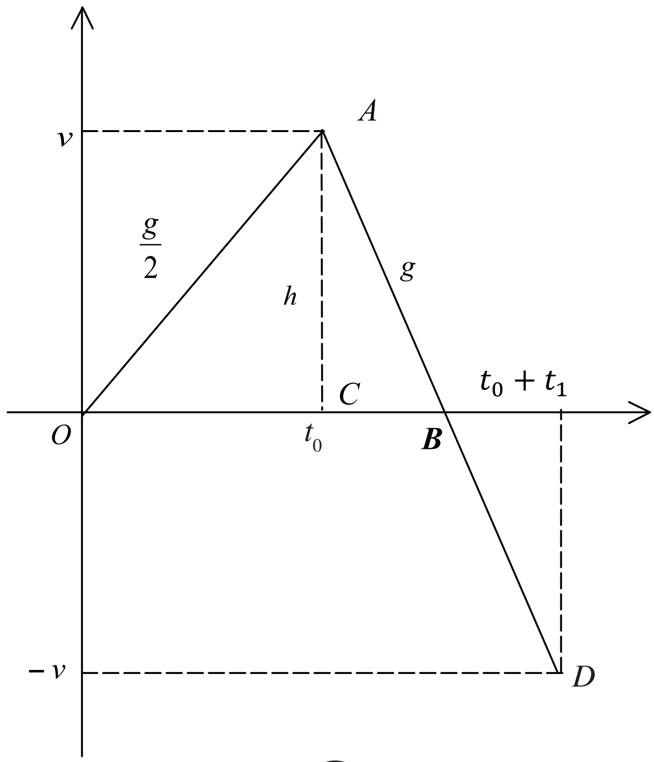
$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු.

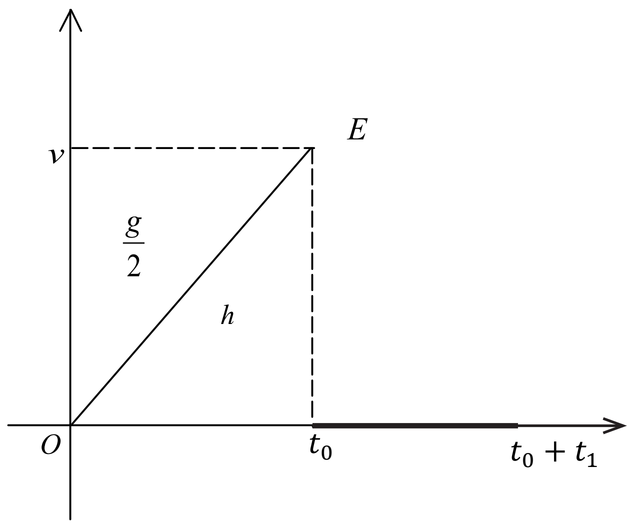
$Q(3m)$ සඳහා $\downarrow\ 3mg - T = 3mf$ 5

$P(m)$ සඳහා $\uparrow\ T - mg = mf$ 5

$2mg = 4mf$

$\Rightarrow f = \dfrac{g}{2}.$ 5





10

15

P අංශුව Q අංශුව $\boxed{40}$

OA හෝ OE යට වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot v = h$---------- (1)   5

OA හෝ OE හි අනුක්‍රමණය $= \frac{v}{t_0} = \frac{g}{2}$----------- (2)   5

$$(1) \text{ හා } (2) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot \frac{g t_0}{2} = h$$

$$\Rightarrow t_0^2 = \frac{4h}{g}$$

$$\Rightarrow t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

$\boxed{15}$

$$(2) \Rightarrow v = \frac{g}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$$ 5

ප්‍රස්තාරය මගින්

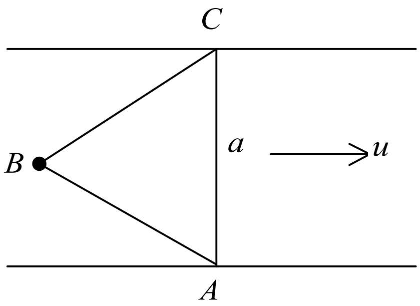
P හි ගුරුත්වය යටතේ පමණක් චලිතයට ගන්නා කාලය $= \frac{2v}{g}$

$$\therefore \quad t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$ 5 $\boxed{10}$

P ළඟාවන උපරිම උස $= \frac{1}{2}\cdot v \cdot \frac{t}{2} = \frac{1}{2}h$ 5

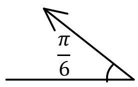
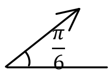
ගෙබිම මට්ටමේ සිට උස $= h + h + \frac{h}{2} = \frac{5h}{2}$ 5 $\boxed{10}$

(b)



$\underline{V}(B,W) = v$

$\underline{V}(W,E) = u \;\; \rightarrow$

$\underline{V}(B,E) =$  AB සඳහා  BC සඳහා 5

$\underline{V}(B,E) = \underline{V}(B,W) + \underline{V}(W,E)$

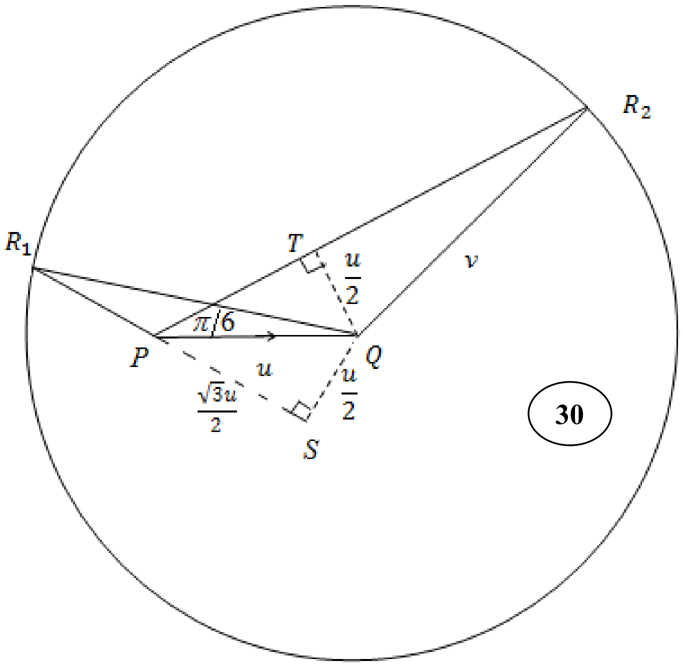
$= \underline{V}(W,E) + \underline{V}(B,W)$

5

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i}$, $i = 1,2,$ සඳහා: මෙහි $AB // PR_1$ හා $BC // PR_2$.

5 5 $\boxed{20}$



30

$\underline{AB}$ සඳහා : $\Delta\ PQR_1$

$R_1S = \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$ 5

$PR_1 = R_1S - PS$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u\right).$ 5

$\underline{BC}$ සඳහා : $\Delta\ PQR_2$

$PR_2 = PT + TR_2$

$= \frac{\sqrt{3}u}{2} + \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$ 5

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} + \sqrt{3}u\right)$ 5

$PR_1 . PR_2 = \frac{1}{4}\left(4v^2 - u^2 - 3u^2\right)$

$PR_1 + PR_2 = \sqrt{4v^2 - u^2}$
$PR_1 \cdot PR_2 = v^2 - u^2$

මුළු කාලය $= \frac{a}{PR_1} + \frac{a}{PR_2}$ 5

$= a\frac{(PR_1 + PR_2)}{PR_1 .\ PR_2}$

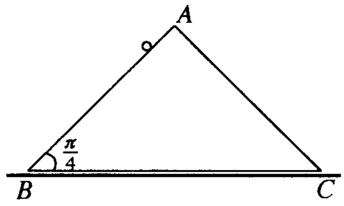
$= a\frac{\sqrt{4v^2 - u^2}}{(v^2 - u^2)}.$

25

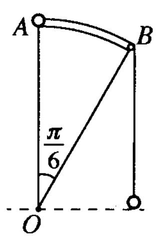
---

12 වන ප්‍රශ්නය

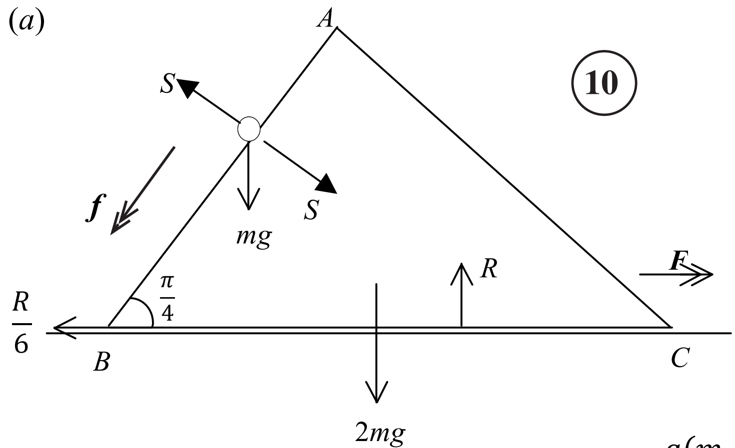
12. (a) රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය $2m$ වූ ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ සිරස් හරස්කඩකි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$ වේ. BC අයත් මුහුණත රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. AB අයත් මුහුණත සුමට වේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි AB මත අල්වා තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය $\overrightarrow{BC}$ හි දිශාවට චලනය වන බවත් ගෙබිම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයෙහි විශාලත්වය $\frac{R}{6}$ වන බවත් දී ඇත; මෙහි R යනු ගෙබිම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයයි. m හා g ඇසුරෙන්, R නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් වන සමීකරණ ලබා ගන්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන OAB යනු OA සිරස් ව ඇති, O කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන අරය a වූ වෘත්ත ඛණ්ඩයකි. එය, ස්වකීය අක්ෂය තිරස් ව සවි කර ඇති සුමට සිලින්ඩරාකාර ඛණ්ඩයක අක්ෂයට ලම්බ හරස්කඩකි. B හි සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $3m$ වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර එහි අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවකට ඈඳා ඇත. ආරම්භයේ දී P අංශුව A හි අල්වා ඇති අතර Q අංශුව O හි තිරස් මට්ටමේ නිදහසේ එල්ලෙයි. තන්තුව තදව ඇතිව, මෙම පිහිටීමෙන්, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. OP උඩු අත් සිරස සමග $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$ කෝණයක් සාදන විට $2a\dot{\theta}^2 = 3g(1-\cos\theta) + g\theta$ බව හා තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{4}mg(1-\sin\theta)$ බව පෙන්වා, P අංශුව මත අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



(a)

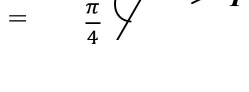


10

$\underline{a}(2m, E) = \boldsymbol{F}$ $\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow$

$\underline{a}(m, 2m) = \boldsymbol{f}$ ↙

$\underline{a}(m, E) = \underline{a}(m, 2m) + \underline{a}(2m, E)$



10

$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු

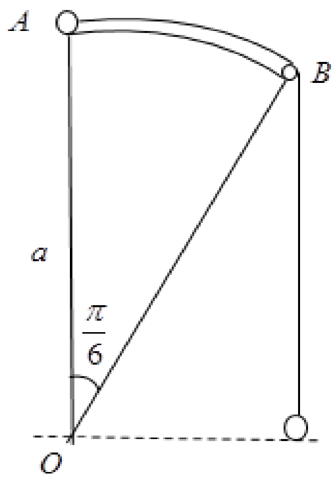
(i) P අංශුව සඳහා ↙ $mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\left(f - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ 15

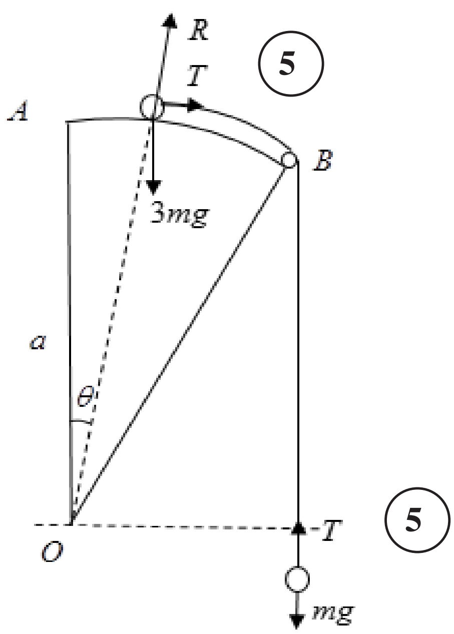
(ii) පද්ධතිය සඳහා → $\frac{-R}{6} = 2mF + m\left(F - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)$ 15

(iii) පද්ධතිය සඳහා ↑ $R - 3mg = -m\frac{f}{\sqrt{2}}$ 10

60

(b)





යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිතියෙන්

$$3mga = 3mga\cos\theta - mga\theta + \frac{1}{2}(3m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(m)(a\dot{\theta})^2$$ 25

(වි.ශ. = 10, චා.ශ. = 10, සමීකරණය = 05)

$$2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos\theta) + g\theta$$ 5

40

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

P සඳහා ↘ $\quad T + 3mg\sin\theta = 3mf$ -------- (1) 15

Q සඳහා ↓ $\quad mg - T \quad = mf$ -------- (2) 10

By (1) හා (2) න්

$$3mg - 3T = T + 3mg\sin\theta$$

$$4T = 3mg(1 - \sin\theta)$$ 05

$$T = \frac{3mg}{4}(1 - \sin\theta)$$

$\boxed{30}$

$\underline{F} = m\underline{a}$, P සඳහා යෙදීමෙන්

↙ $\quad 3mg\cos\theta - R = 3ma\dot{\theta}^2$ 10

$R = 3mg\cos\theta - \frac{3m}{2}\{3g(1 - \cos\theta) + g\theta\}$ 10

$$= \frac{3mg}{2}(2\cos\theta - 3 + 3\cos\theta - \theta)$$

$$= \frac{3mg}{2}(5\cos\theta - \theta - 3)$$

$\boxed{20}$

සටහන :

$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ සඳහා පෘෂ්ඨයෙන් P ඉවත් නොවේ.

$$R|_{\theta=0} = 3mg > 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{3mg}{2}(-5\sin\theta - 1) < 0 \; for \; 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$R|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{3mg}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - 3\right) > 0$$

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ගැට ගසා ඇත. P අංශුව, O හි නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යය පසු කර යන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න; මෙහි $OA = a$ වේ.

තන්තුවේ දිග $x(\geq a)$ යන්න $\ddot{x} + \dfrac{4g}{a}\left(x - \dfrac{5a}{4}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

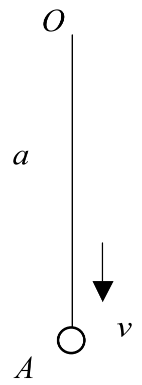
$X = x - \dfrac{5a}{4}$ ලෙස ගෙන, ඉහත සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $\omega (> 0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$\dot{X}^2 = \omega^2\left(c^2 - X^2\right)$ බව උපකල්පනය කරමින්, මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි විස්තාරය වන c සොයන්න.

P අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය L යැයි ගනිමු. A සිට L දක්වා චලනය වීමට P මගින් ගනු ලැබූ කාලය $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව L හි තිබෙන මොහොතේ දී ස්කන්ධය λm $(1 \leq \lambda < 3)$ වූ තවත් අංශුවක් සීරුවෙන් P ට ඈඳනු ලැබේ. ස්කන්ධය $(1+\lambda)m$ වූ සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \dfrac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\dfrac{a}{4}\right\} = 0$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත අංශුව, $(3-\lambda)\dfrac{a}{4}$ විස්තාරය සහිත පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.



ගුරුත්වය යටතේ පමණක් P හි චලිතය සඳහා

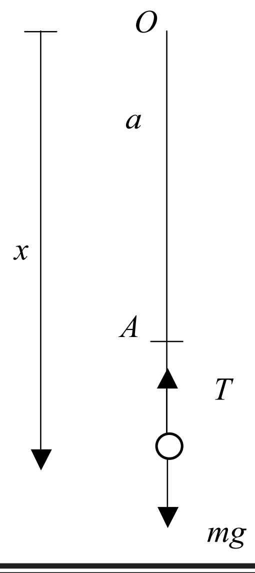
O සිට A දක්වා

$$v^2 = 2ga \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ag}. \qquad 5$$

තන්තුවේ ආතතිය : $T = \dfrac{4mg(x-a)}{a}, x \geq a$ 5

$F = ma \quad : \; -T + mg = m\ddot{x}$ 5

T ඉවත් කිරීමෙන් $-4mg\dfrac{(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x}$ 5



$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{4g}{a}(x-a) = \frac{4g}{a}\cdot\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0 \text{---------------------------} (1) \qquad 5$$

$$X = x - \frac{5a}{4} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x} \quad හා \quad \ddot{X} = \ddot{x}.$$ 5

එවිට (1) න් $\ddot{X} + \frac{4g}{a}X = 0.$

එමගින් $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$; මෙහි $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$. $(\because \omega > 0)$

5 5

40

$$\Rightarrow \dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2) \text{------------------------} (2)$$

$x = a$ විට, $\dot{x} = \sqrt{2ga}$ නිසා $\Rightarrow \dot{X}^2 = 2ga$, $X = -\frac{a}{4}$

5 5

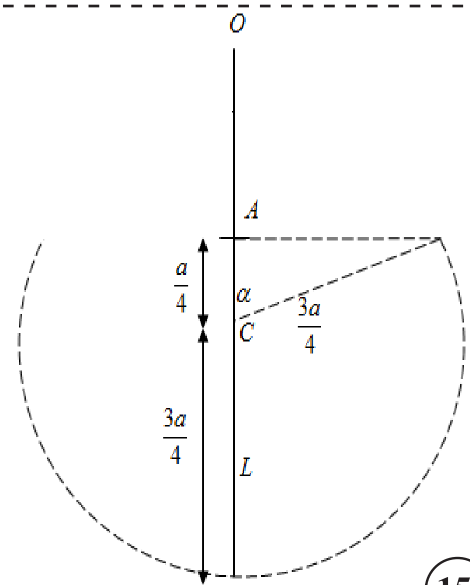
එවිට $(2) \Rightarrow 2ga = \frac{4g}{a}\left[c^2 - \left(\frac{-a}{4}\right)^2\right]$ 5

$$\Rightarrow a^2 = 2c^2 - \frac{a^2}{8} \Rightarrow c^2 = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow c = \frac{3a}{4} \quad (\because c > 0)$$ 5

කේන්ද්‍රය දෙනු ලබන්නේ $X = 0$; $x = \frac{5a}{4}$. 5

25



15

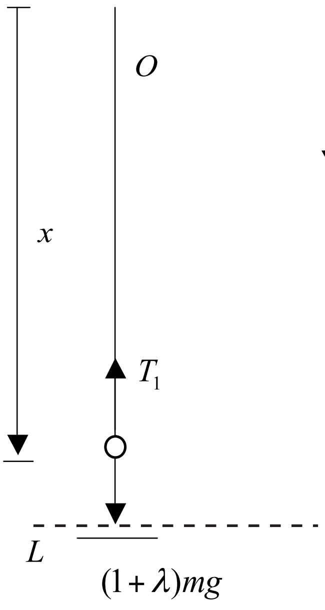
$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a.$ 5

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ 5

A සිට L දක්වා ගනු ලැබූ කාලය $= \frac{\pi - \alpha}{\omega}$ 5

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}.$$ 5

35



$$T_1 = \frac{4mg(x-a)}{a}$$

↓ සංයුක්ත අංශුව සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$: $(1+\lambda)mg - T_1 = (1+\lambda)m\ddot{x}$ 10

$$(1+\lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x-a) = (1+\lambda)m\ddot{x}$$ 5

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}(x-a) - g = 0$$

5

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{(x-a) - (1+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$$ 5

$\boxed{25}$

කේන්ද්‍රය C_1: $x = OC_1 = (5+\lambda)\frac{a}{4}$ 5

$$C_1L = 2a - (5+\lambda)\frac{a}{4}$$ 5

$$= (3-\lambda)\frac{a}{4}$$ 5

නව විස්තාරය $c_1 = (3-\lambda)\frac{a}{4}$ (>0) $\because \lambda < 3.$

සම්පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතය $\Leftrightarrow$

$$AC_1 \geq c_1$$ 5

$$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq (3-\lambda)\frac{a}{4}$$

$$5+\lambda-4 \geq 3-\lambda$$

$$\lambda \geq 1$$ 5

$\boxed{25}$

$X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ යැයි ගනිමු. මෙහි A හා B නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$. 5

$t = 0$ හා $x = a$ වන විට $X = -\dfrac{a}{4}$ හා $\dot{X} = V = \sqrt{2ga}$.

5 5

$\therefore \quad -\dfrac{a}{4} = A,\; V = B\omega \Rightarrow B = \dfrac{V}{\omega}$

5 5

විසඳුම : $X = -\dfrac{a}{4}\cos\omega t + \dfrac{V}{\omega}\sin\omega t$.

25

අවකලනයෙන් : $\dot{X} = \dfrac{a\omega}{4}\sin\omega t + V\cos\omega t$. 5

පහත්ම ලක්ෂ්‍යය වන L ට ළඟාවන්නේ : $\dot{X} = 0$ ' විට දීය. 5

පළමු වරට $t = t_1$, වන්නේ යැයි කියමු.

එවිට : $\tan\omega t_1 = -\dfrac{4V}{a\omega}$ 5

$\omega t_1 = \pi - \alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{4V}{a\omega}$; මෙහි $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 5

සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය $x = \dfrac{5a}{4}$ හෝ $AC = \dfrac{a}{4}$ වේ. 5

$$\frac{a}{4} = c\cos\alpha = \frac{c(a\omega)}{\sqrt{16V^2 + a^2\omega^2}}$$

$$= c.\frac{2\sqrt{ga}}{\sqrt{16\times 2ga + 4ga}} = \frac{1}{3}c \quad 5$$

$$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$$

තවද, ඉහතින්

$$\omega t_1 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}. \quad 5$$

35

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14.(a) O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් **a** හා **b** වේ; මෙහි O, A හා B **ඒක රේඛීය නො වේ.** C යනු $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද D යනු $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද යැයි ගනිමු. **a** හා **b** ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{AD}$ ප්‍රකාශ කර, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ බව පෙන්වන්න.
P හා Q යනු පිළිවෙළින්, AB හා OD මත $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{OQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{OD}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ. $\overrightarrow{PC} = 2\,\overrightarrow{CQ}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක $AB = 2$ m හා $AD = 1$ m යැයි ද $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ යැයි ද ගනිමු. තව ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන $5, 5, 2, 4$ හා 3 වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC, DA හා BE දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවන්ට ක්‍රියා කරයි. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය සොයන්න.
සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව B සිට $\frac{3}{2}$ m දුරක දී දික්කරන ලද AB ට හමුවන බවත් පෙන්වන්න.
දැන් C හරහා ක්‍රියා කරන අමතර බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ දිගේ වන පරිදි ය. අමතර බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(a)

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{b}{3}$ හා $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{b-a}{2}$ 5

5

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\underline{a} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$ $\qquad$ $= -\underline{a} + \frac{b}{3}$ ----------- (2) 5

$= \frac{3}{2}\left(-\underline{a} + \frac{b}{3}\right)$ ----------- (1) 5

(1) හා (2) මගින් $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ 5

25

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ 5

$= -\lambda(\underline{b} - \underline{a}) - \underline{a} + \underline{c}$ 5

$= (\lambda - 1)\underline{a} - \lambda\underline{b} + \dfrac{\underline{b}}{3}$

$= (\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}$------- (3) 5

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ}$ 5

$= -\overrightarrow{OC} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OD}$

$= -\dfrac{\underline{b}}{3} + (1 - \lambda)\dfrac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$ 5

$= \dfrac{1}{2}\left[(\lambda - 1)\underline{a} - \dfrac{3}{2}\underline{b} + \underline{b} - \lambda\underline{b}\right]$

$= \frac{1}{2}\left((\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}\right)$---------(4)

5

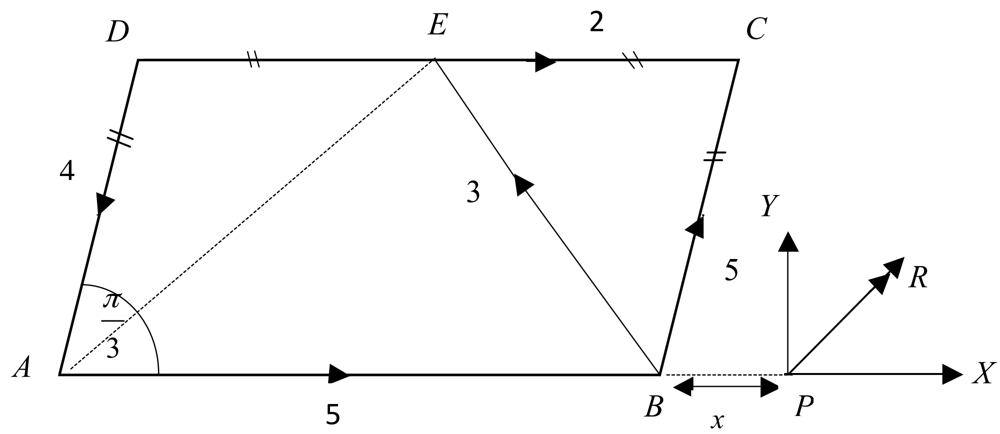
(3) හා (4) මගින් $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ 5

35

---

10 දී ඇති බල ලකුණු කිරීම සඳහා

(*b*)

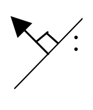


10

දිශාවට විභේදනයෙන් $\overrightarrow{AE}$ ට $\parallel$ $-4\cos\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6}$ 10

$= 4\sqrt{3}\text{N}$ 5

AE ට ලම්භව විභේදනයෙන්



: $-4\sin\frac{\pi}{6} + 5\sin\frac{\pi}{6} - 5\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6}$ 10

$= 3 - 2 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2} - 1$

$= 0$ 5

සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $R = 4\sqrt{3}\text{N}$ හා $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර වේ. 10

40

විකල්ප විසඳීම

AB දිගේ $\rightarrow X = 5+\frac{5}{2}+2-\frac{3}{2}-\frac{4}{2}=6N$ **10**

AB ලම්භව $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(5+3)-\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}N$ **10**

$\frac{Y}{X}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$ **5**

සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $R = 2\sqrt{3}\sqrt{3+1} = 4\sqrt{3}N,$ **5**

එහි ක්‍රියා රේඛාව AB සමඟ සාදන කෝණය $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \therefore$ එය AE ට සමාන්තර වේ. **5**

5

40

සම්ප්‍රයුක්තයට දික් කරන ලද AB හමුවන ලක්ෂ්‍යය P යැයි ගනිමු.

B සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$Yx = 4\times 2\sin\frac{\pi}{3} - 2\times 1\sin\frac{\pi}{3}$$ **10**

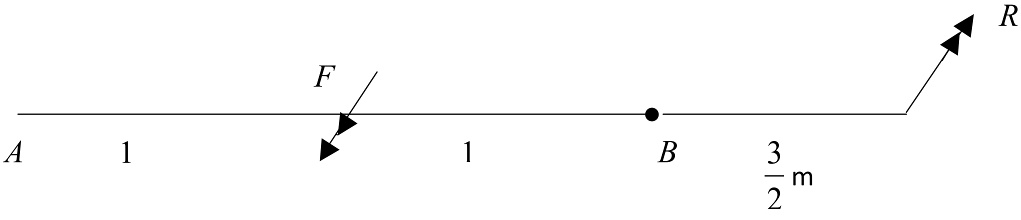
$2\sqrt{3}x = 3\sqrt{3}$

$x = \frac{3}{2}$ m. **5**

15

එවිට BP, $x=\frac{3}{2}$ m.

අතිරේක බලය $\overrightarrow{EA}$ ට සමාන්තර වේ. **5**



A $R\times\left(2+\frac{3}{2}\right)\sin 30^\circ = F.1\sin 30^\circ$ **15**

$4\sqrt{3}\times\frac{7}{2}=F$

$F = 14\sqrt{3}N.$ **5**

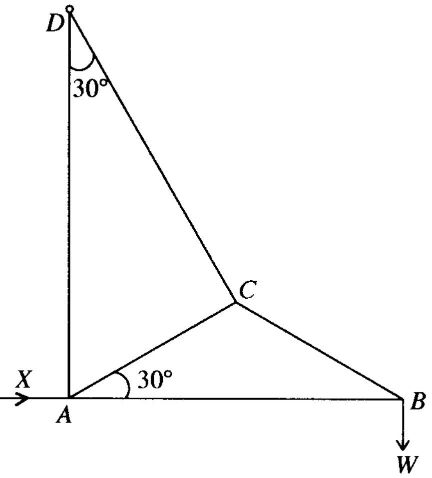
25

---

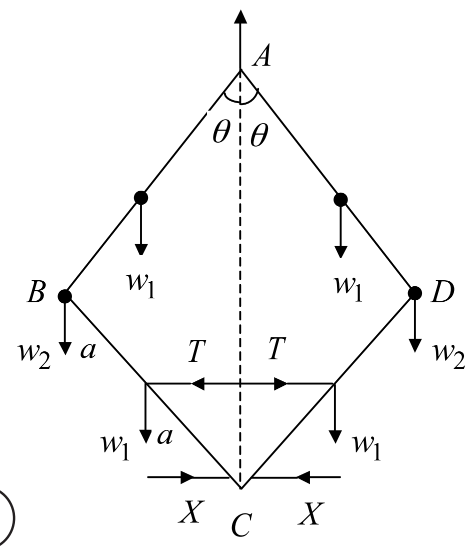
15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) එක එකක බර w_1 වූ සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක්, $ABCD$ රොම්බසයක් සෑදෙන පරිදි, ඒවායේ අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. $B\hat{A}D = 2\theta$ වන පරිදි BC හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් යා කර ඇත. B හා D එක් එක් සන්ධිය සමාන w_2 භාර දරයි. පද්ධතිය, A සන්ධියෙන් සමමිතික ලෙස එල්ලෙමින්, සැහැල්ලු දණ්ඩ තිරස් ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතියි. සැහැල්ලු දණ්ඩෙහි තෙරපුම $2(2w_1 + w_2)\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන්, අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CD, AC හා AD සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. $AC = CB$ හා $B\hat{A}C = 30^\circ = A\hat{D}C$ බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල D හි දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. B සන්ධියේ දී W බරක් එල්ලා AB තිරස් ව ද AD සිරස් ව ද ඇතිව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හි දී ක්‍රියා කරන විශාලත්වය X වූ තිරස් බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් B, C හා A සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න. **ඒ නයින්**, X හි අගය හා සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වමින් සොයන්න.



(*a*)



(10)

සමමිතියට (5)

එක් එක් බර දණ්ඩේ දිග 2a යැයි ගනිමු.

B ↶ BC සඳහා : $X \times 2a\cos\theta - w_1 \times a\sin\theta - T \times a\cos\theta = 0$. (10)

$\Rightarrow 2X - T = w_1 \tan\theta$ ---------- (1) (5)

A ↶ AB හා BC සඳහා

$X \times 4a\cos\theta + 2w_1 \times a\sin\theta + w_2 \times 2a\sin\theta - T \times 3a\cos\theta = 0$. (20)

$\Rightarrow 4X - 3T = -2(w_1 + w_2)\tan\theta$ ---------- (2) (5)

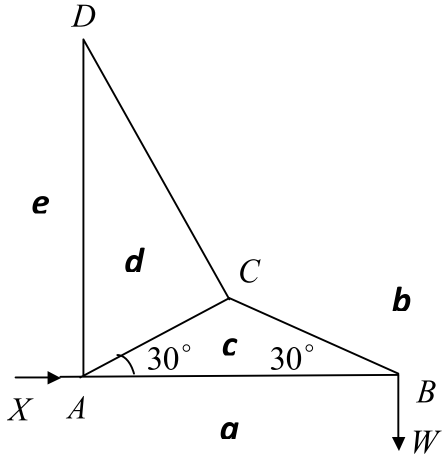
$$(1)\ \times 2 - (2) \Rightarrow T = 2w_1 \tan\theta + (2w_1 + w_2)\tan\theta$$
$$= (4w_1 + 2w_2)\tan\theta$$
$$= 2(2w_1 + w_2)\tan\theta$$

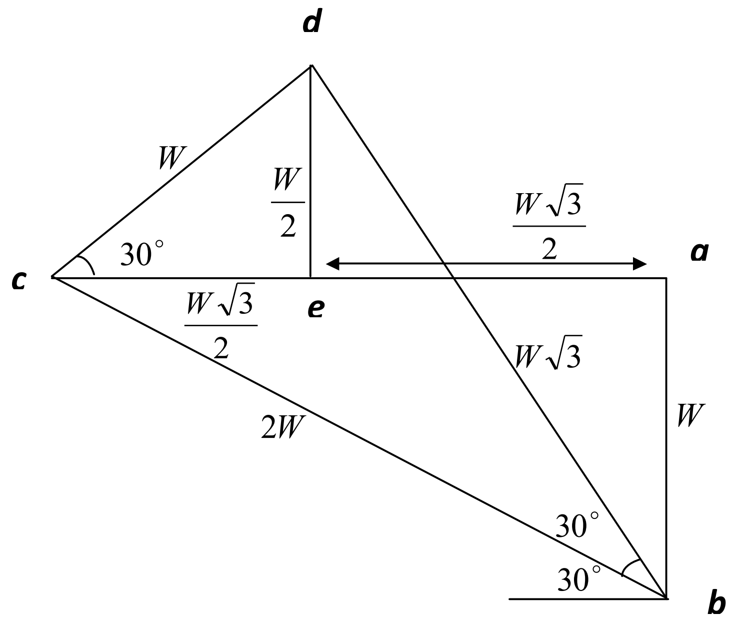
10

$\boxed{65}$

(*b*)

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතතිය/ තෙරපුම	
BC(***bc***)	$2W$	ආතතිය	10
AB(***ca***)	$\sqrt{3}W$	තෙරපුම	10
CD(***bd***)	$\sqrt{3}W$	ආතතිය	10
AC(***dc***)	W	ආතතිය	10
AD(***de***)	$\frac{W}{2}$	තෙරපුම	10
$X(\boldsymbol{ea}) = \frac{W\sqrt{3}}{2}$			5



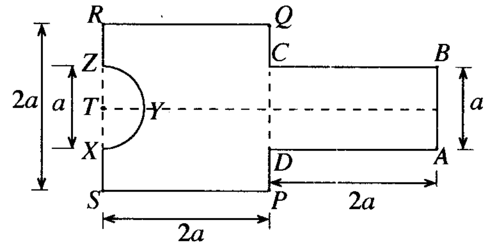


30

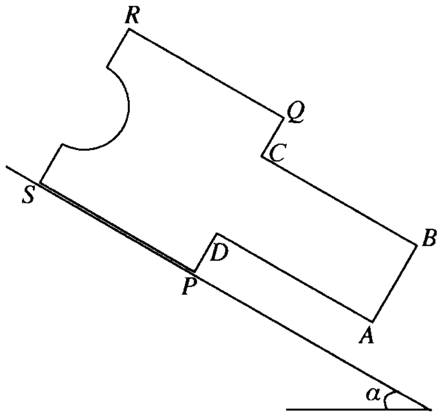
$\boxed{85}$

---

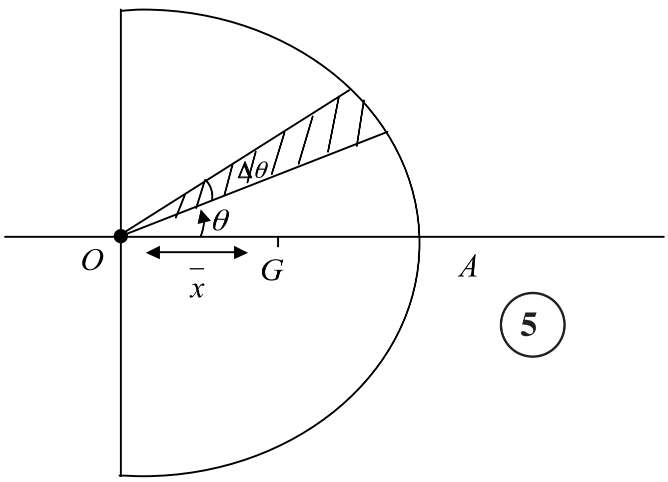
16. අරය r හා O කේන්ද්‍රය වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{4r}{3\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ඒකාකාර තල ආස්තරයක් සාදා ඇත්තේ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් $PQRS$ සමචතුරස්‍රයකට DC හා PQ ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සම්පාත වෙමින් එක ම රේඛාවේ පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කර, RS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන T හි කේන්ද්‍රය ඇති අරය $\frac{a}{2}$ වන XYZ අර්ධ වෘත්තාකාර පෙදෙසක් ඉවත් කිරීමෙනි. $AB = a$ හා $AD = PQ = 2a$ බව දී ඇත. L ආස්තරයෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත, RS සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = \dfrac{238}{3(48-\pi)}$ වේ.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ආස්තරය තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත ස්වකීය තලය සිරස් ව ද P ලක්ෂ්‍යය S ට පහළින් පිහිටන පරිදි PS දාරය උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත ද ඇතිව සමතුලිතව පිහිටයි. $\tan\alpha < (2-k)$ හා $\mu \geq \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු ආස්තරය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයයි.



5

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට OA මත පිහිටයි. 5

ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ යැයි ගනිමු.

$$\Delta m = \frac{1}{2} r^2 (\Delta\theta)\sigma.$$

5 $$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sigma \frac{2}{3} r \cos\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2} r^2 \sigma}$$ 10 5

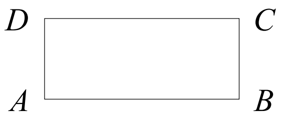
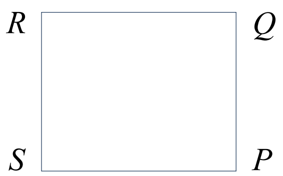
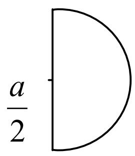
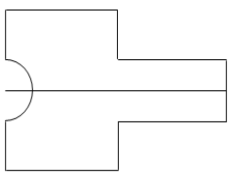
$$= \frac{2r}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2r}{3\pi} \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$ 5

$$= \frac{2r}{3\pi} \left[2 \sin\frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{4r}{3\pi}.$$ 5

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $= \dfrac{4r}{3\pi}$ **40**

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ***RS*** සිට දුර $(\rightarrow)$	
	$2a^2\sigma$	$3a$	10
	$4a^2\sigma$	a	10
	$\frac{1}{2} \cdot \pi \times \frac{a^2}{4} \sigma$	$\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a}{3\pi}$	10
	$\left(6 - \frac{\pi}{8}\right) a^2\sigma$	$\bar{x}_1$	5

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ථ දැක්වීමෙන්

$$\frac{a^2\sigma}{8}(48-\pi)\bar{x}_1 = 2a^2\sigma\times 3a + 4a^2\sigma\times a - \frac{\pi a^2}{8}\sigma\times\frac{2a}{3\pi}$$ 10

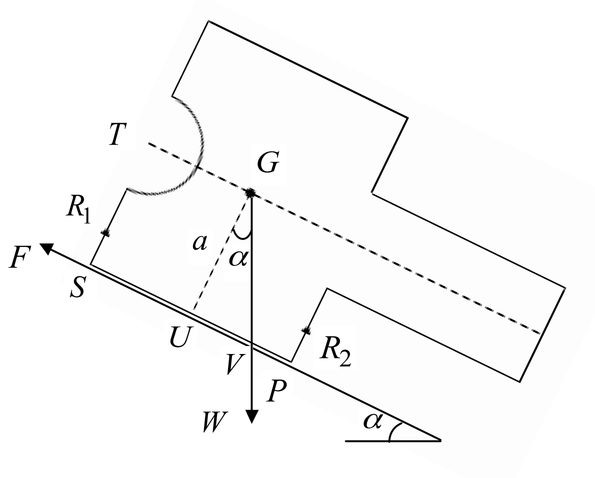
$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \left(10-\frac{1}{2}\right)a$$

$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \frac{119}{12}a$$

$$\therefore\ \bar{x}_1 = \frac{238}{3(48-\pi)}a$$ 5

$$= ka.$$

50



10

තලය සමඟ PS ස්පර්ශව තිබීම සඳහා $UV < UP$ විය යුතුය. 10

එනම් $a\tan\alpha < 2a - ka$.

$$\Rightarrow \tan\alpha < (2-k).(k<2.)$$ 10

$$R_1 + R_2 = w\cos\alpha$$ 10

$$F = w\sin\alpha$$ 5

L නොලිස්සන බැවින් $\mu \geq \dfrac{F}{R_1+R_2}$. 10

$$\Rightarrow \mu \geq \tan\alpha.$$ 5

60

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) නොනැඹුරු ඝනකාකාර A දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත $1, 2, 3, 3, 4, 5$ පෙන්වයි. A දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

මුහුණත් මත වූ සංඛ්‍යා හැරුණු විට, අන් සෑම අයුරකින් ම A ට සර්වසම තවත් B දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත $2, 2, 3, 4, 4, 5$ පෙන්වයි. B දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

දැන්, A හා B දාදු කැට දෙක පෙට්ටියකට දමනු ලැබේ. එක් දාදු කැටයක් සසම්භාවී ලෙස පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 6 බව දී ඇති විට, පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් දාදු කැටය, A දාදු කැටය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) $x_1, x_2, \dots, x_n$ යන සංඛ්‍යා n වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_1 හා σ_1 ද, $y_1, y_2, \dots, y_m$ යන සංඛ්‍යා m වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_2 හා σ_2 ද වේ. මෙම සියලු ම $n+m$ සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_3 හා σ_3 යැයි ගනිමු.

$\mu_3 = \dfrac{n\mu_1 + m\mu_2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න.

$d_1 = \mu_3 - \mu_1$ ලෙස ගනිමු. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_3\right)^2 = n\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$d_2 = \mu_3 - \mu_2$ ලෙස ගැනීමෙන්, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(y_j - \mu_3\right)^2$ සඳහා එබඳු ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

$\sigma_3^2 = \dfrac{\left(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2\right) + \left(nd_1^2 + md_2^2\right)}{n+m}$ බව අපෝහනය කරන්න.

අලුත් පොතක් ප්‍රකාශයට පත් කිරීමෙන් පසු පළමු දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 2.3 ක් ද විචලතාව 0.8 ක් ද විය. ඊළඟ දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 1.7 ක් ද විචලතාව 0.5 ක් ද විය. පළමු දින 200 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

A දාදු කැටය එක්වරක් විසි කළ විට n සංඛ්‍යාව ලකුණු කළ මුහුණත ලැබීමේ සම්භාවිතාව $P(n)$ පහත දැක්වේ.

n	1	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$i = 1, 2$ සඳහා i වන විසි කිරීමේදී ලැබෙන සංඛ්‍යාව X_i යැයි ගනිමු.

එවිට $P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1$ හා $X_2 = 5) + P(X_1 = 5$ හා $X_2 = 1)$

$+ P(X_1 = 2$ හා $X_2 = 4) + P(X_1 = 4$ හා $X_2 = 2)$

$+ P(X_1 = 3$ හා $X_2 = 3)$.

$= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 15

$= \frac{2}{9}$. 5

20

B ආදු කැටය සඳහා X_i වෙනුවට Y_i යොදමු.

n	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

එවිට $P(Y_1 + Y_2 = 6) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ 15

$= \frac{1}{4}.$ 5

20

බේයි ප්‍රමේයයෙන්

$$P(A|\text{sum}=6) = \frac{P(\text{sum}=6|A)P(A)}{P(\text{sum}=6|A).P(A) + P(\text{sum}=6|B).P(B)}$$ 10

5

$$= \frac{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{8}{17}.$$ 5

10

30

(b) $\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\mu_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j}{m}.$ 5

දැන් $\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_i}{m+n}$ 5

$= \frac{n\mu_1 + m\mu_2}{m+n}.$ 5

15

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_3)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu_3)^2$$ 5

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1 - d_1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ (x_i - \mu_1)^2 + 2d_1 (x_i - \mu_1) + d_1{}^2 \right\} \quad 5$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2 - 2d_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1) + = \sum_{i=1}^{n} d_1{}^2 \quad 5$$

$$= n\sigma_1^2 + n d_1^2 \left(\because \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1) = 0 \text{ සහ } \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2}{n} \right)$$

5 5

$$= n(\sigma_1^2 + d_1^2). \quad 5$$

30

එලෙසම $\sum_{j=1}^{m} (y_j - \mu_3)^2 = m(\sigma_2^2 + d_2^2)$, මෙහි $d_2 = \mu_3 - \mu_2$. 5

05

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_3)^2 + \sum_{j=1}^{m} (y_i - \mu_3)^2}{m+n} \quad 5$$

$$= \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m+n}$$

$$= \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + n(d_1^2 + md_2^2)}{m+n}. \quad 5$$

10

පළමු දින 100 සඳහා

$n = 100$, $\mu_1 = 2.3$, $\sigma_1 = 0.8$

දෙවන දින 100 සඳහා

$m = 100$, $\mu_2 = 1.7$, $\sigma_2 = 0.5$ 5

ඉහතින් $\mu_3 = \frac{230 + 170}{200} = 2.$ 5

$d_1 = -0.3,$ හා $d_2 = 0.3$ වේ.

$$\sigma_3^2 = \frac{100}{200}[0.8^2 + 0.5^2 + (0.3)^2 + (0.3)^2] \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}[0.64 + 0.25 + 0.09 \times 2]$$

$$= \frac{1.07}{2} = 0.535$$

$$\sigma_3 = \sqrt{0.535}. \quad 5$$

$\boxed{20}$

III කොටස

3.0 පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු හා යෝජනා :

3.1. පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු :

පොදු උපදෙස් :

- ⋆ ප්‍රශ්න පත්‍රයේ ඇති මූලික උපදෙස් කියවා හොඳින් තේරුම් ගත යුතුය. එනම් එක් එක් කොටසින් කොපමණ ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාවකට පිළිතුරු සැපයිය යුතු ද කුමන ප්‍රශ්න අනිවාර්ය වේ ද කොපමණ ලකුණු ලැබේ ද කොපමණ කාලයක් ලැබේ ද යන කරුණු පිළිබඳව සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා පිළිතුරු ඉදිරිපත් කිරීමට බලාපොරොත්තු වන ප්‍රශ්න පිළිබඳව නිරවුල් අවබෝධයක් ඇති කර ගෙන පිළිතුරු ලිවිය යුතුය.
- ⋆ I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් A කොටසෙහි සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- ⋆ I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් B කොටසෙහි ප්‍රශ්න 7න් තෝරා ගත් ප්‍රශ්න 5කට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- ⋆ B කොටසෙහි සෑම ප්‍රධාන ප්‍රශ්නයක්ම අලුත් පිටුවකින් ආරම්භ කළ යුතුය.
- ⋆ අයදුම්කරුගේ විභාග අංකය සෑම පිටුවකම අදාළ ස්ථානයේ ලිවිය යුතුය.
- ⋆ ප්‍රශ්න අංක හා අනුකොටස් අංක නිවැරදිව ලිවිය යුතුය.
- ⋆ සියලුම ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා තෝරාගෙන පිළිතුරු ලිවිය යුතුය. ප්‍රශ්න යටතේ දී ඇති තොරතුරුත්, ලබා ගත යුතු පිළිතුරු හෝ සාධනය කළ යුතු ප්‍රතිඵල කවරේ ද යන්නත් පැහැදිලිව අවබෝධ කර ගත යුතුය.
- ⋆ ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීමේදී දී ඇති කාලය නිසි පරිදි කළමනාකරණය කර ගැනීමට වග බලා ගත යුතුය.
- ⋆ පැහැදිලි අත් අකුරින් පිළිතුරු සැපයිය යුතුය. පිළිතුරු ලිවීමේදී නිල් පාට හෝ කළු පාට පෑන් පමණක් භාවිත කළ යුතුය. අනෙකුත් පාට පෑන් භාවිත කිරීමෙන් වැළකිය යුතුය.

විශේෂ උපදෙස් :

- ⋆ රූප සටහන් ඇඳිය යුතු අවස්ථාවලදී ඒවා ඉතා පැහැදිලිව ඇඳ නම් කළ යුතුය. මෙහිදී රේඛාවල දිග හා කෝණවල විශාලත්ව සංසන්දනාත්මකව නිවැරදි රූපය හා අනුරූප වන සේ දැක්වීම අවශ්‍ය වේ. රූපසටහන්වල නිරවද්‍යතාව සහ සම්බන්ධතා දැකීමටත් ඒ ඇසුරින් පහසුවෙන් පිළිතුරු කරා එළඹීමටත් මහෝපකාරී වෙයි. රූප සටහන්වල තොරතුරු ඇතුළත් කිරීමේදී ද, නිරවද්‍යතාව කෙරෙහි වැඩි අවධානයක් යොමු කිරීම අත්‍යවශ්‍ය වේ. (නිදසුන : බල ලකුණු කිරීම)
- ⋆ ගණනය කිරීම්වලදී එක් එක් පියවර පැහැදිලිව සඳහන් කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය ස්ථානවලදී පියවර අතර සම්බන්ධය දැක්වෙන සමාන ලකුණු හෝ වෙනත් අදාළ සංකේත හෝ ලියා දැක්වීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය. එක් පියවරක හෝ පිටුවක හෝ ඇති ප්‍රකාශන හා සමීකරණ ඊළඟ පියවරට හෝ පිටුවට පිටපත් කිරීමේදී ඒවායේ නිරවද්‍යතාව පිළිබඳව ඉතා සැලකිලිමත් විය යුතුය.
- ⋆ අවශ්‍ය ස්ථානවලදී නිවැරදිව ඒකක භාවිත කළ යුතුය. අවශ්‍ය අවස්ථාවලදී නිවැරදි ඒකක පරිවර්තනය පිළිබඳව ද සැලකිලිමත් විය යුතුය.

- ප්‍රස්තාර ඇඳීමේදී අක්ෂ නිවැරදිව නම් කර පරිමාණගත කළ යුතු අතර, ඒකක ද සඳහන් කළ යුතුය.

- මූලික සමානුපාත පිළිබඳ සංකල්ප නැවත පරිශීලනය කළ යුතුය.

- මූලික ජ්‍යාමිතිය පිළිබඳ දැනුම සහ අවබෝධය ලබා ගත යුතුය.

  නිදසුන්: (1) සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ
  (2) රොම්බසයක ලක්ෂණ
  (3) සවිධි ෂඩස්‍රයක / බහු අස්‍රයක ලක්ෂණ
  (4) ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත විවිධ ප්‍රමේය
  (5) සමරූපී ත්‍රිකෝණ
  (6) වෘත්ත ආශ්‍රිත ප්‍රමේය
  (7) සමමිති ගුණ

- සාධකවලට බිඳිය හැකි වර්ගජ ප්‍රකාශන එකවරම සාධකවලට වෙන්කර ගැනීමේ හැකියාව ප්‍රගුණ කළ යුතුය.

- සංකේත නිරූපණයේ දී විශේෂයෙන් දෛශික නිරූපණයේදී, නිවැරදි සංකේත භාවිත කිරීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය.

- "එනයින් ලබා ගන්න", "අපෝහනය කරන්න", "සත්‍යාපනය කරන්න", "ව්‍යුත්පන්න කරන්න" වැනි යෙදුම් කෙරෙහි සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ඒ අනුව පිළිතුර කරා එළඹීමට වග බලා ගත යුතුය. 'එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ' යනුවෙන් සඳහන් අවස්ථාවලදී බහුල වශයෙන්ම පෙර ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය භාවිත කර ඊට පසු ප්‍රතිඵලය ලබා ගැනීම වඩාත් පහසු වේ.

- දී ඇති තොරතුරු භාවිතයෙන් නිගමනයකට එළඹිය යුතු අවස්ථාවලදී විලෝම ක්‍රියාවලිය ඉදිරිපත් කිරීම ලකුණු අහිමිවීමට හෝ අඩුවීමට හේතු වේ. එබැවින් ප්‍රශ්නය මගින් අපේක්ෂිත ආකාරයට පිළිතුර ඉදිරිපත් කළ යුතුය. එහෙත් "නම් ම පමණක්" හෝ "ම නම් පමණක්" සත්‍ය බව සාධනය කළ යුතු අවස්ථාවලදී විලෝම වශයෙන් ද ප්‍රතිඵලය ලැබෙන බව සනාථ වන පරිදි පිළිතුරු ඉදිරිපත් කළ යුතු වේ.

- සෑම විටෙකදීම අවසාන පිළිතුර සරලම ආකාරයෙන් දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය. අවසාන පිළිතුර, ප්‍රශ්නයෙහි අසා ඇති ආකාරය අනුව පැහැදිලිව දැක්විය යුතුය.

- අයදුම්කරුවන් තම ඉලක්කම්, සංකේත සහ අදහස් පැහැදිලිවත් නිවැරදිවත් ලියා දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය.

- පිළිතුර කරා එළඹීමට අවශ්‍ය සුළු කිරීම් (සංඛ්‍යාමය, වීජීය හෝ ත්‍රිකෝණමිතික) කටුවැඩ ලෙස සැලකුව ද පිළිතුර සමගම පසෙකින් ඉදිරිපත් කරන්න.

- පිළිතුර සම්පූර්ණ කිරීමට නොහැකි අවස්ථාවලදී වුව ද ප්‍රශ්නයට පිළිතුර ලබා ගැනීමට අදාළ ඉදිරි පියවර ලියා දැක්වීම බොහෝවිට ඵලදායි විය හැකිය.

- ප්‍රශ්නයක අග කොටස්වල පවා මුල් කොටස්වලින් ස්වාධීන වූ පහසු කොටස් තිබිය හැකි බැවින් ප්‍රශ්නයක මුල් කොටස අපහසු වුව ද ප්‍රශ්නය අත්හැර නොයා ඉතිරි කොටස් පිළිබඳව ද අවධානය යොමු කිරීම වැදගත් වේ.

- සමහර විටෙක යම් අනුකොටසක් සාධනය නොකළ ද එම ප්‍රතිඵල අවශ්‍ය නම් යෙදීමෙන් ඉදිරි අනුකොටසක් සඳහා පිළිතුර ඉදිරිපත් කළ හැකිය.