

இணைந்த கணிதம் I பகுதி A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, யாதாயினும் ஒரு நேர நிறையெண் n இற்கு

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ என நிறுவுக.}$$

$$n=1 \text{ ஆக, L. H. S.} = 1 = \text{R. H. S.} \text{ (05)}$$

எனவே $n=1$ ஆக முடிவு உண்மை

$n=p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க

$$\text{அ-து } 1+2+\dots+p = \frac{p(p+1)}{2} \text{ (05)}$$

$n=p+1$ ஆக,

$$1+2+\dots+p+(p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \frac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2} \text{ (05)}$$

எனவே $n=p+1$ இற்கு முடிவு உண்மை

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்முழு எண் n இற்கும்

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ஆகும். (05)}$$

[25]

2. ADDING என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துகளையும் பயன்படுத்தி ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவ்வொழுங்கமைப்புகளில் எத்தனையில் உயிரெழுத்துகள் (vowels) வேறாக்கப் பட்டிருக்கும் என்பதைக் காண்க.

ஆறு எழுத்துகளில் இரண்டு ஒரே எழுத்துக்கள் உள்ளன.

எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை.

$$= \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ (05)}$$

$$\text{(05)}$$

[10]

சொல்லில் உள்ள உயிர் எழுத்துக்கள் A, I ஆகும்.

இரண்டு உயிரெழுத்துக்களையும் ஒரே எழுத்தாக கொண்டு, எல்லா எழுத்துக்களையும்

$$\text{பயன்படுத்தி ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60. \text{ (05)}$$

A, I என்பவற்றை மாற்றுவதன் மூலம், எல்லா எழுத்துக்களையும் கொண்டு ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை $= 2 \times 60 = 120. \text{ (05)}$

$$\text{எனவே உயிரெழுத்துக்கள் வேறாக்கப்பட்டிருக்கும் ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை} = 360 - 120 = 240 \text{ (05)}$$

[15]

3. p ஆனது பூச்சியமல்லாத மாறிலியாக இருக்கும் $(1+px)^{12}$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் x இன் குணகமும் x^2 இன் குணகமும் முறையே $-q, 11q$ எனின், p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$(1+px)^{12} \text{ என்னும் ஈருறுப்பு விரியில் } x \text{ இன் உறுப்பு } {}^{12}C_1 px$$

$$x \text{ இன் குணகம் : } {}^{12}C_1 p = -q \Rightarrow 12p = -q \rightarrow (1). (05)$$

$$(1+px)^{12} \text{ என்னும் ஈருறுப்பு விரியில் } x^2 \text{ இன் உறுப்பு } = {}^{12}C_2 p^2 x^2$$

$$x^2 \text{ இன் குணகம் : } {}^{12}C_2 p^2 = 11q \Rightarrow 66p^2 = 11q \Rightarrow 6p^2 = q \rightarrow (2). (05)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow p = -2 \text{ or } 0. (05)$$

$$p \text{ பூச்சியமல்லாத மாறிலி ஆகையால் } p = -2. (05)$$

$$(1) \text{ இலிருந்து } q = 24. (05)$$

[25]

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 3x - x^2 \cos x} = \frac{1}{17}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 3x - x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{2 \frac{\sin^2 3x}{x^2} - \cos x} \quad (10)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{18 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 - \cos x} \quad (05)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{18 \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) \right\}^2 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{1}{18-1} = \frac{1}{17}$$

(05)

(05)

[25]

5. $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

$$\text{இதிலிருந்து, } \int \frac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} dx \text{ ஐக் காண்க.}$$

$$2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x}).$$

$$(2A + 2B - 2)e^x + (-A + B - 3)e^{-x} = 0 \Rightarrow A + B = 1, -A + B = 3.$$

$$\Rightarrow A = -1, B = 2.$$

(05)

(05)

[10]

மறுபடி A, B

Eng - 5

Nov - 3

$$\int \frac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} dx = -\int \frac{2e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} dx + 2 \int dx. \quad (05)$$

$$= -\ln(2e^x + e^{-x}) + 2x + C. \quad (10) \quad [15]$$

6. l ஆனது $(4, 0), (0, 2)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு எனவும் m ஆனது $(2, 0), (0, 3)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். l, m ஆகிய நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இதுவிருந்து, உற்பத்தியினூடாகவும் l, m ஆகியவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$l \text{ இன் சமன்பாடு } \frac{y}{x-4} = \frac{2-0}{0-4} \Rightarrow 2x+4y-8=0 \Rightarrow x+2y-4=0. \quad (05) \quad [05]$$

$$m \text{ இன் சமன்பாடு } \frac{y}{x-2} = \frac{3-0}{0-2} \Rightarrow 3x+2y-6=0. \quad (05) \quad [05]$$

l, m என்னும் நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஊடு செல்லும் யாதேனும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x+2y-4+\lambda(3x+2y-6)=0 \text{ ஆகும். இங்கு } \lambda \text{ ஒரு பரமானம் } (05)$$

$$\text{இக்கோடு உற்பத்தியின் ஊடு செல்வதனால் } \lambda = -\frac{2}{3}. \quad (05)$$

$$\text{எனவே நேர்கோட்டின் சமன்பாடு } 2y-3x=0 \text{ ஆகும். } (05) \quad [15]$$

மாற்றுமுறை:

உற்பத்தியின் ஊடு செல்லும் யாதேனும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y-\mu x=0$, இங்கு μ ஒரு பரமானம் (05)

$$l, m \text{ நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளி } \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ ஆகும். } (05)$$

$$\text{இப்புள்ளியின் ஊடு நேர்கோடு செல்வதனால் } \mu = \frac{3}{2} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{எனவே தேவைப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு } 2y-3x=0. \quad (05) \quad [15]$$

7. ஒரு வளையி C ஆனது சமன்பாடு $y=4-4x+3x^2-x^3$ இனால் தரப்படுகின்றது. வளையி C யிற்குப் புள்ளி $(1, 2)$ இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலி வளையி $y^2=4x$ இற்குப் புள்ளி $(1, 2)$ இல் வரையப்பட்ட தொடலிக்குச் செங்குத்தானதெனக் காட்டுக.

$(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் வளையி C இற்கு தொடலியின் படித்திறன்

$$= \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,2)} = (-4+6x-3x^2) \Big|_{x=1} = -1. \quad (05) \quad (05)$$

$$\text{எனவே வளையி } C \text{ இற்கு } (1, 2) \text{ என்னும் புள்ளில் தொடலியின் சமன்பாடு } \frac{y-2}{x-1} = -1.$$

$$\text{i.e., } x+y-3=0. \quad (05) \quad [15]$$

(1, 2) என்னும் புள்ளியில் சரவளையிற்கு தொடலியின் படித்திறன்

$$= \frac{dy}{dx} \bigg|_{(1,2)} = \frac{2}{y} \bigg|_{y=2} = 1. (05)$$

எனவே வளையி C இற்கு (1,2) என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியானது, சரவளையிற்கு (1,2) என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலிக்கு செங்குத்தாகும். (05)

[10]

8. (2, 0), (0, 2) என்னும் புள்ளிகளினூடாக உள்ள யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு λ ஒரு பரமானம். இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரையையும் λ வின் சார்பில் காண்க.

புள்ளிகள் (2,0) , (0,2) என்பவற்றின் ஊடாகச் செல்லும் யாதேனும் ஒரு வட்டத்தின்

சமன்பாட்டினை $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

இதிலிருந்து $4 + 4g + c = 0$, $4 + 4f + c = 0$. (05)

ஆகவே $f = g$, $c = -4(g + 1)$. (05)

எனவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy - 4(g + 1) = 0$

i.e., $x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$, இங்கு $\lambda = 2g$. (05)

[15]

$$\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4 - 2\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 = 0$$

$$\text{i.e., } \left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{(\lambda + 2)^2 + 4}{2} = 0$$

$$\text{வட்டத்தின் மையம் } \left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right). (05)$$

[05]

$$\text{வட்டத்தின் ஆரை} = \sqrt{\frac{(\lambda + 2)^2 + 4}{2}} (05)$$

[05]

9. AB யை ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க; இங்கு $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ ஆகும். அத்துடன் வட்டம் S ஐ நிமிர்கோணமுறையாக வெட்டுகின்ற மையம் $(-1, 2)$ ஐக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

S என்னும் வட்டத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி (x, y) என்க.

$$\left(\frac{y-3}{x-1}\right)\left(\frac{y-4}{x-2}\right) = -1 (10)$$

$$\text{i.e., } x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0 (05)$$

[15]

மாற்றுமுறை:

S என்னும் வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$ என்க.

$$-g = \frac{3}{2}, -f = \frac{7}{2}. \quad (05)$$

$$\text{வட்டத்தின் ஆரை} \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (05)$$

$$\text{எனவே வட்டம் } S \text{ இன் சமன்பாடு } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{i.e., } x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0 \quad (05) \quad [15]$$

$$(-1, 2) \text{ யை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு } x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0 \quad (05)$$

இவ்வட்டமும் S என்ற வட்டமும் நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுவதனால்

$$2\left(-\frac{3}{2}\right)(1) + 2\left(-\frac{7}{2}\right)(-2) = k + 14 \Rightarrow k = -3 \quad (5)$$

$$\text{எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு } x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0 \quad (05) \quad [10]$$

10. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ என எடுத்து $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. $\tan\left(\frac{23}{12}\pi\right)$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}. \quad (05) \quad (05) \quad (5) \quad (05) \quad [15]$$

$$\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = -(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2 \quad (05) \quad (05) \quad [10]$$

இணைந்த கணிதம் I பகுதி B

11. (a) $f(x) = x^2 + 2kx + k + 2$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி.

(i) $f(x)$ ஐ வடிவம் $(x-a)^2 + b$ யில் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b ஆகியன k யின் சார்பில் துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

முன்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தாமல் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியைக் கண்டு, இப்புள்ளி ஓர் இழிவுப் புள்ளியெனக் காட்டுக.

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தை k யின் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து, வளையி $y = f(x)$ ஆனது

(α) $-1 < k < 2$ ஆக இருப்பின் x -அச்சிற்கு முழுமையாக மேலே சிடக்கின்றது.

(β) $k = -1$ அல்லது $k = 2$ ஆக இருப்பின் x -அச்சைத் தொடுகின்றது.

(γ) $k < -1$ அல்லது $k > 2$ ஆக இருப்பின் x -அச்சை இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது எனக் காட்டுக.

(ii) $k < -2$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் m இன் எல்லா மெய், முடிவுள்ள பெறுமானங்களுக்கும் நேர்கோடு $y = mx$ ஆனது வளையி $y = f(x)$ ஐ இரு மெய், வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதென நிறுவுக.

(b) $g(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ எனக் கொள்வோம்.

மீதித் தேற்றத்தை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்தி $(x+1)^2$ ஆனது $g(x)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டுக.

$g(x)$ ஐ வடிவம் $(x-a)^2(x^2+bx+c)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, c ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $g(x) \geq 0$ என உய்த்தறிக.

$$(a) f(x) = x^2 + 2kx + k + 2 = (x+k)^2 + 2 + k - k^2, \text{ (5)}$$

$$= (x-a)^2 + b \text{ இங்கு } a = -k, b = 2 + k - k^2. \text{ (5)}$$

(05)

(05)

(05)

[15]

x ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $-k$ இற்கு அதிகரிக்க சார்பு $f(x)$ ஆனது ∞ இலிருந்து $2 + k - k^2$ இற்கு குறையும். (5)

x ஆனது $-k$ இலிருந்து ∞ இற்கு அதிகரிக்க சார்பு $f(x)$ ஆனது $2 + k - k^2$ இருந்து ∞ இற்கு அதிகரிக்கும். (5)

எனவே $x = -k$ இல் ஒரு திரும்பற் புள்ளி மாத்திரம் உண்டு. அது இழிவுப்புள்ளி ஆகும். (05)

(05)

(05)

[15]

$$f(x) \text{ இன் இழிவுப் பெறுமானம் } = 2 + k - k^2. \text{ (05)}$$

[05]

$$(i) 2 + k - k^2 = (2-k)(1+k) \text{ எனலாம் } = -(k-2)(1+k)$$

(α) $-1 < k < 2$ எனின், $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் நேரானது. ஆகவே வளையி முழுவதும் x -அச்சிற்கு மேலே இருக்கும். (05) (05) [10]

(β) $k = -1$ அல்லது $k = 2$ எனின், $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் பூச்சியமாகும். எனவே வளையியானது x -அச்சைத் தொடும். (05) (05) [10]

$b = 0$ எனில் $b = 0$

(γ) $k < -1$ அல்லது $k > 2$ எனின், $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் மறையானது.

எனவே வளையியானது x -அச்சைத் தீர்ந்து வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டும்

(05) (05) [10]

(ii) $y = f(x)$ என்னும் வளையியை $y = mx$ என்னும் நேர்கோடு இடைவெட்டும் எனின்,

இடைவெட்டும் எந்த ஒரு புள்ளியின் x ஆள்கூறு $x^2 + 2kx + k + 2 = mx$

என்னும் சமன்பாட்டினைத் திருப்தி செய்யும் (05)

i.e., $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$. (05)

எனவே $y = f(x)$ வளையியை $y = mx$ என்னும் நேர்கோடு இரு வெவ்வேறு மெய்

புள்ளிகளில் இடைவெட்டும் ஆயினாயின் $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ என்பது இரு

வெவ்வேறு மெய் மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும். (05)

i.e., $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$. (05)

வரையறுத்த மெய் பெறுமானத்தை m கொண்டிருப்பதற்கு $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$

ஆயினாயின் $k < -2$. (05)

எனவே எல்லா வரையறுத்த m இன் மெய் பெறுமானங்களுக்கு $y = f(x)$

வளையியை $y = mx$ என்னும் நேர்கோடு இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில்

இடைவெட்டும் $\Leftrightarrow k < -2$ [25]

(b) $f(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2 = 0$. (05)

$f(x)$ இனை $(x + 1)$, ஆல் வகுக்க பெறப்படும் மீதி 0 ஆகும்.

$\therefore (x + 1) \mid f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். (05)

எனவே $f(x) = (x + 1)Q(x)$, (05) இங்கு $Q(x)$ ஐ $(x + 1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் ஈவு $Q(x)$ ஆகும்.

$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$. (05)

$Q(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$. (05)

$Q(x)$ இனை $(x + 1)$, ஆல் வகுக்க பெறப்படும் மீதி 0 ஆகும்.

எனவே $Q(x) = (x + 1)R(x)$, (05) இங்கு $Q(x)$ இனை $(x + 1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் ஈவு $R(x)$

$\therefore (x + 1), Q(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும் (05)

$\therefore f(x)$ இன் காரணி $(x + 1)^2$ ஆகும்.

[35]

$R(x) = x^2 + 2x + 2$. (05)

$f(x) = (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)$.

$f(x) = (x - a)^2(x^2 + bx + c)$, இங்கு $a = -1, b = 2, c = 2$. (10)

[15]

$f(x) = (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2) = (x + 1)^2 \{ (x + 1)^2 + 1 \} \geq 0$ எல்லா மெய் x இற்கும்.

(05) (10)

(05)

[10]

12. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆக மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $u_r = f(r) - f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐத் துணிக; இங்

$$u_r = \frac{12r^2 + 1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$$

$$\sum_{r=1}^n u_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) ஒரே படத்தில் $y = |2x-1|$, $y = |x| + \frac{5}{3}$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, $3|x| \geq |6x-3| - 5$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

யாதாயினும் $k \in \mathbb{R}$ இற்கு $y = |x| - k$ இன் வரைபை ஒரே படத்தில் கருதுவதன் மூலம் 1 எப்பெறுமானத்திற்குச் சமன்பாடு $3|x| = |6x-3| + 1$ ஒரு மெய்த தீர்வை மாத்திரம் கொண்டுள்ளதெனக் காண்க.

(a) $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ எல்லா $x \in \mathbb{R}$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ஆக } B = \frac{1}{2}. \quad (05)$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ஆக } A = -\frac{1}{2}. \quad (05)$$

[10]

$$\frac{12r^2 + 1}{(2r-1)^3(2r+1)^3} = \frac{-\frac{1}{2}(2r-1)^3 + \frac{1}{2}(2r+1)^3}{(2r-1)^3(2r+1)^3} \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2(2r-1)^3} - \frac{1}{2(2r+1)^3} = f(r) - f(r+1), \text{ இங்கு } f(r) = \frac{1}{2(2r-1)^3} \quad (05) \quad [15]$$

$$u_1 = f(1) - f(2) \quad (05)$$

$$u_2 = f(2) - f(3) \quad (05)$$

.....

.....

$$u_{n-1} = f(n-1) - f(n) \quad (05)$$

$$u_n = f(n) - f(n+1) \quad (05)$$

$$\sum_{r=1}^n u_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \quad (05) \quad (05)$$

[30]

if wrong
give 0

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n u_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \right\} = \frac{1}{2} \text{ இது வாய்பறுக்கப்பட்டது. (05)}$$

எனவே தொடர் $\sum u_r$ ஒருங்கு தொடராகும். (05)

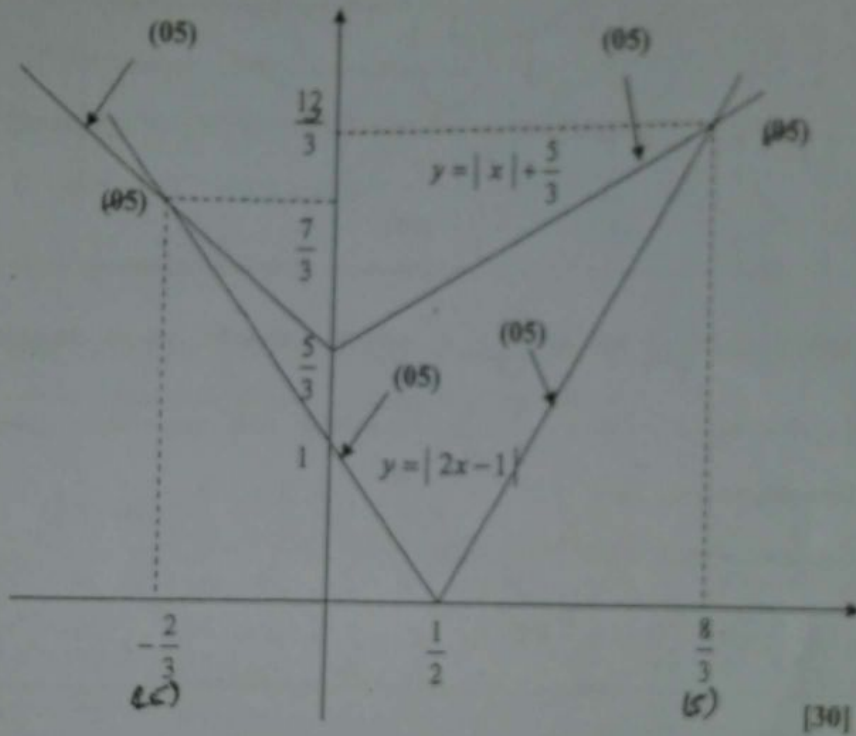
[10]

பக்க
எண்.

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = \frac{1}{2} \text{ ஆகும். (05)}$$

[05]

(b)

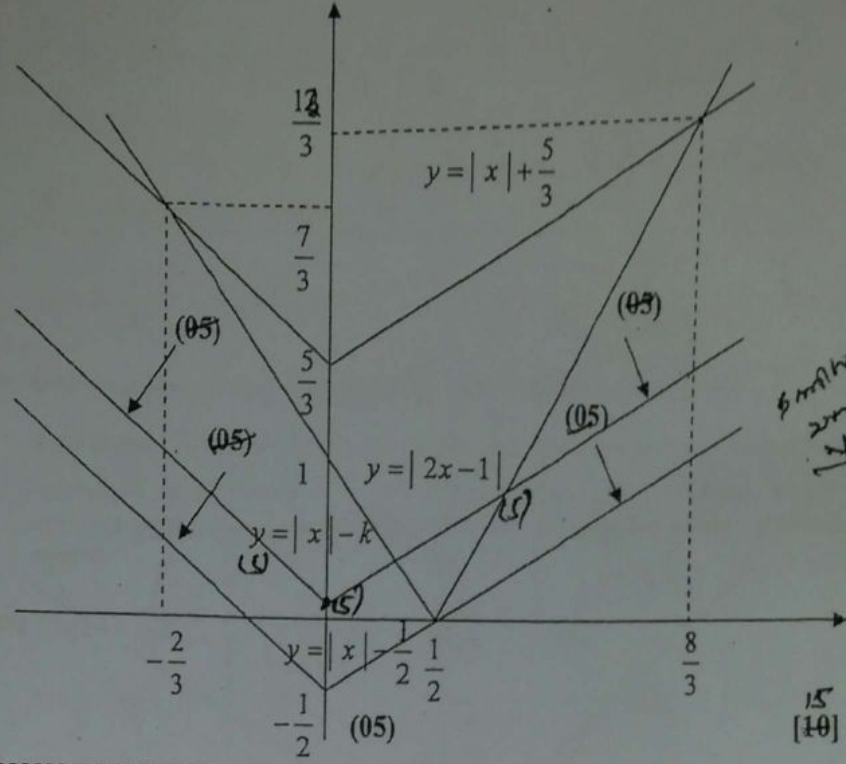


[30]

$$3|x| \geq |6x - 3| - 5 \Rightarrow |x| + \frac{5}{3} \geq |2x - 1| \text{ (05)}$$

$$3|x| \geq |6x - 3| - 5 \text{ x இன் பெறுமானத் தொடை} = \left\{ x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{3} \right\}.$$

(05) [10]



வரைபு $y = |x| + k$ என்பது $(\frac{1}{2}, 0)$ என்னும் புள்ளியின் ஊடாக செல்லும் போது (5)

$(3|x| = |6x - 3| + 1 \Rightarrow |x| - \frac{1}{3} = |2x - 1|)$ என்பது ஒரே ஒரு மெய் மூலத்தை மாத்திரம் கொண்டிருக்கும். (05)

இது நடைபெறும் எனின் $k = \frac{1}{2}$. (05)

$$|x| - \frac{1}{3} = |x| - \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} \quad (05)$$

25
[30]

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்.

$A^2 - 3A + 2I = O$ எனக் காட்டுக; இங்கு I ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் O ஆனது 2×2 பூச்சியத் தாயமும் ஆகும்.

இதிலிருந்து, A^{-1} ஐக் காண்க.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்.

$BA = B$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $BC = O$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு பூச்சியமல்லாத 2×2 தாயம் C யைக் காண்க.

(b) z ஒரு சிக்கலெண்ணெனக் கொள்வோம்.

$|z|^2 = z\bar{z}$ எனவும் $|z| \geq \operatorname{Re} z$ எனவும் நிறுவுக.

இதிலிருந்து, z_1, z_2 என்னும் எவையேனும் இரு சிக்கலெண்களுக்கு $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ எனக் காட்டுக.

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ என உய்த்தறிக.

$|z - i| < \frac{1}{2}$ எனின், $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக.

$|z - i| \leq \frac{1}{2}$ இற்கும் $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ இற்கும் சிக்கலெண் z க்கு ஆகண்ட வட்டத்தில் பாகைகளில்கூடப் புள்ளித் தொடையைக் கொண்ட பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

$$\begin{aligned} (a) A^2 - 3A + 2I &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (05) \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \\ &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad (05) \quad \quad \quad (05) \quad \quad \quad (05) \end{aligned}$$

[20]

$$\begin{aligned} 2A^{-1} &= 3AA^{-1} - AAA^{-1} = 3I - A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad (05) \quad \quad \quad (05) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow 5$$

[10]

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = B \quad (05)$$

[05]

$$BA - B = O \Rightarrow B(A - I) = O \Rightarrow BC = O \text{ இங்கு } C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (05) \quad (05) \quad (05) \quad [15]$$

(b) $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ என்க.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} \right\}^2 = |z|^2. \quad (05) \quad [05]$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \geq x = \operatorname{Re} z. \quad (05) \quad (05) \quad [10]$$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \quad (05) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \quad (05) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\theta \quad (05) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \quad (05) \\ &\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \quad (05) \\ &= (|z_1| - |z_2|)^2 \quad (05) \end{aligned}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad [25]$$

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \geq |z_1 + z_2| - |z_2| \quad (05) \quad (05)$$

$$\text{i.e., } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad [10]$$

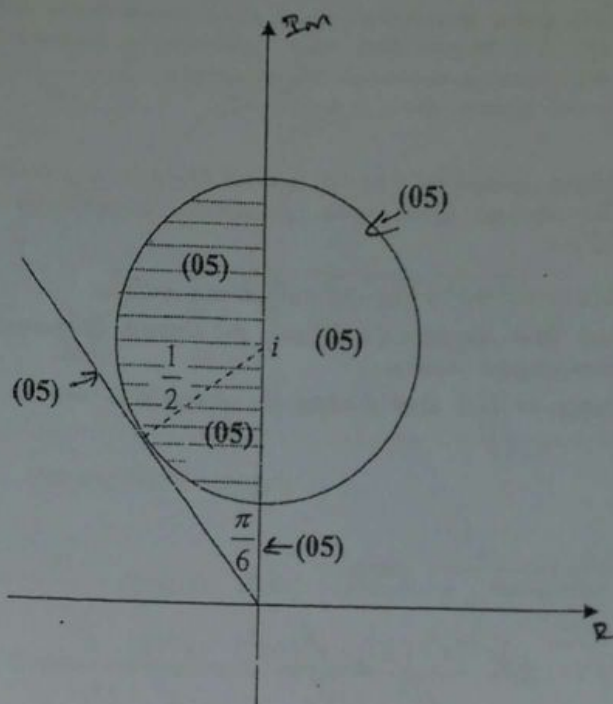
$$|z| - |i| \leq |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < \frac{3}{2} \quad (05) \quad (05)$$

$$|i| - |z| \leq |i - z| = |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}. \quad (05) \quad (05)$$

$$\text{i.e., } \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}. \quad [20]$$

$$|z-i| \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$$



[30]

14. (a) முதல் பெறுதியை மாத்திரம் கருதுவதன் மூலம் $\frac{x^3}{x^4+27}$ இன் குறைந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் காண்க.

$$y = \frac{x^3}{x^4+27} \text{ இன் வரைபைப் பருமபடியாக வரைக.}$$

இதிலிருந்து, k யின் எப்பெறுமானங்களுக்குச் சமன்பாடு $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ ஆனது

- (i) இரு ஒன்றுபடும் மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்.
 - (ii) மூன்று ஒன்றுபடும் மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்.
 - (iii) இரு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்.
 - (iv) மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருந்து
- எனக் காண்க; இங்கு k மெய்யானது.

(b) $AB = a$ ஆகவும் $BC = b (< a)$ ஆகவும் இருக்கும் ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ யைக் கருதுவோம். P ஆன CD மீது ஓர் இயங்கத்தக்க புள்ளியெனக் கொள்வோம். $AP + PB$ யின் நீளம் $L(x)$ ஆகும்; இங் $DP = x$.

$$L(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$L(x)$ இன் குறைந்தபட்ச (இழிவு) நீளத்தையும் இக்குறைந்தபட்ச நீளத்தை ஒத்து CD மீது P யின் தானத்தையும் காண்க.

அத்துடன் $L(x)$ இன் உயர்ந்தபட்ச நீளத்தையும் காண்க.

$$(a) f(x) = \frac{x^3}{x^4+27} \text{ என்க.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^4+27) - x^3(4x^3)}{(x^4+27)^2} = \frac{x^2(81-x^4)}{(x^4+27)^2} = 0 \Rightarrow x = -3, 0, 3.$$

	(05)	(05)	(05)	
x இன் வீச்சு	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	+	+	-

(05)

(05)

எனவே $f(x)$ ஆனது $x = -3$ இல் இழிவும் $x = 3$ இல் உயர்வையும் கொண்டிருக்கும் (05)

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3)^4+27} = -\frac{1}{4}, \quad f(3) = \frac{(3)^3}{(3)^4+27} = \frac{1}{4}$$

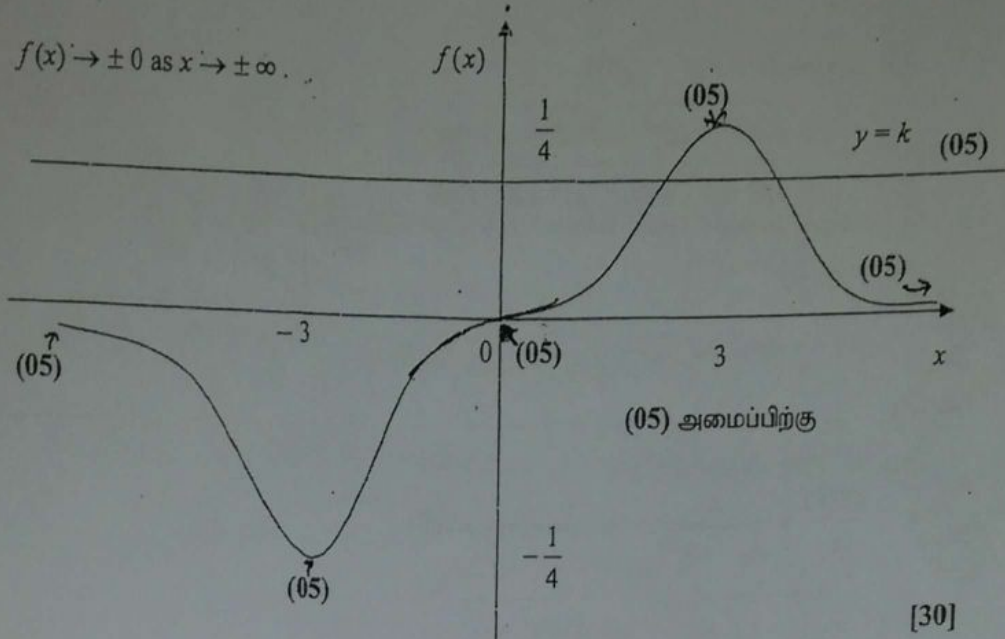
(05)

(05)

எனவே $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானமும், உயர்வுப் பெறுமானமும் முறையே $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

ஆகும்.

[40]



$y = k$, $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ என்பவற்றைக் கருதுக.

$y = k$ இனதும் $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ இனதும் இடை வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகள்

$kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும். (05)
எனவே,

(i) $k = -\frac{1}{4}$ அல்லது $\frac{1}{4}$, ஆகும் போது $y = k$ என்னும் கோடும் $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும்

வளையியும் தொடும். எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு பொருந்தும் மெய்மூலங்கள் இருக்கும். (05)

(ii) $k = 0$, ஆகும் போது $y = k$ என்னும் கோடு $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும் வளையின் ஊடு

செல்லும். எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$, $x^3 = 0$ என ஒடுங்கும். எனவே இச்சமன்பாடு மூன்று பொருந்தும் மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும். (05)

(iii) $-\frac{1}{4} < k < 0$ அல்லது $0 < k < \frac{1}{4}$, ஆகும் போது $y = k$ கோடும் $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும்

வளையியும் இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டும். எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாடு இரு வெவ்வேறு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும். (05)

(iv) $k < -\frac{1}{4}$ அல்லது $k > \frac{1}{4}$, ஆகும் போது $y = k$ என்னும் கோடும் $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$

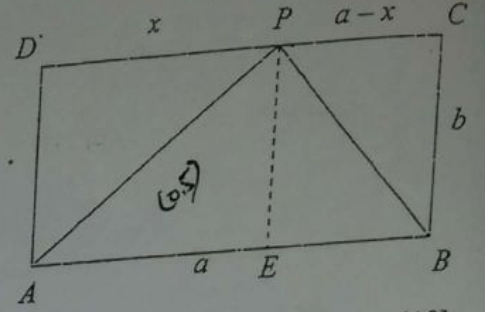
என்னும் வளையியும் இடைவெட்டாது. எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இல்லை. (05)

[30]

(b) $L(x) = AP + PB$ (05)

$$= \sqrt{AE^2 + EP^2} + \sqrt{BE^2 + EP^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \quad (05)$$



[10]

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \quad (05)$$

$$= \frac{x\sqrt{(a-x)^2 + b^2} - (a-x)\sqrt{x^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + b^2}\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$$= 0 \Rightarrow x\sqrt{(a-x)^2 + b^2} - (a-x)\sqrt{x^2 + b^2} = 0 \quad (05)$$

$$\Rightarrow x^2 \{(a-x)^2 + b^2\} = (a-x)^2 \{x^2 + b^2\} \Rightarrow x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad (05)$$

x இன் வீச்சு	$0 \leq x < \frac{a}{2}$	$x = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} < x \leq a$
$L'(x)$	-	0	+

(05)

$x = \frac{a}{2}$ ஆக $L(x)$ இழிவாகும். (05)

$$\text{இழிவு நீளம்} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

(05)

(05)

P ஆனது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும் போது இது நடைபெறும். (05)

[35]

P, C இல் அல்லது D இல் உள்ள போது $L(x)$ ஆனது உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருக்கும். $L(x) = b + \sqrt{a^2 + b^2}$ (05).

[05]

15. (a) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x) dx = \frac{8}{3}$ எனக் காட்டுக.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக $\int x^3 \tan^{-1} x dx$ ஐக் காண்க.

(c) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{2x^2 - 3}{(x-2)^2 (x^2+1)} dx$ ஐக் காண்க.

$$(a) \int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x) dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \sin x - (1 - \sin^2 x) \cos x dx \quad (05)$$

$$= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(05) (05) (05) (05) (05) [30]

மாற்றுமுறை

$$(a) \int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x) dx = \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) (\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) (1 + \sin x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x + \sin^2 x \cos x - \cos x - \cos^2 x \sin x) dx \quad (05)$$

$$= \left[-\cos x + \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(05) (05) (05) (05) (05) [30]

$$(b) \int x^3 \tan^{-1} x dx = \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx \quad - (10)$$

$$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \int \frac{(x^2+1)^2 - (2x^2+1)}{1+x^2} dx \quad (10)$$

$$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \int (x^2+1) dx + \frac{1}{4} \int \frac{2(x^2+1)-1}{1+x^2} dx \quad (10)$$

Handwritten notes for part (b):

$$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \int (x^2+1) dx + \frac{1}{4} \int \frac{2x^2+1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2x^2}{2} + \frac{1}{1+x^2} \right) + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+x^2}$$

(05) (05)

$$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \tan^{-1} x + C, \text{ இங்கு } C \text{ ஓர் ஏதேச்சை}$$

(10) ஒருமை [50]

(c) $\frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$, இங்கு A, B, C, D துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்

(05) (05) (05)

$$2x^2-3 \equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2.$$

$$x=2 \text{ என இட } B=1. (05)$$

$$\text{ஒருமை உறுப்பை ஒப்பிட } -3 = -2A + B + 4D. \quad x^3 \text{ இன் குணகத்தை ஒப்பிட } 0 = A + C.$$

$$x \text{ இன் குணகத்தை ஒப்பிட } 0 = A + 4C - 4D. (10)$$

$$B=1 \text{ என } -3 = -2A + B + 4D \text{ இல் பிரதியிட } -2 = -A + 2D \rightarrow (1).$$

$$C=-A \text{ என } 0 = A + 4C - 4D \text{ இல் பிரதியிட } 0 = 3A + 4D \rightarrow (2).$$

$$(1), (2) \text{ இலிருந்து } D = -\frac{3}{5}, A = \frac{4}{5}.$$

(05) (05)

$$C = -\frac{4}{5}. (05)$$

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4x+3}{5(x^2+1)}.$$

$$\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} dx = \frac{4}{5} \int \frac{dx}{(x-2)} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{1}{5} \int \frac{4x+3}{(x^2+1)} dx. (05)$$

$$= \frac{4}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5} \int \frac{2x}{(x^2+1)} dx - \frac{3}{5} \int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

(05) (05)

$$= \frac{4}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5} \ln(x^2+1) - \frac{3}{5} \tan^{-1} x + K, \text{ இங்கு } K \text{ ஓர்}$$

(10) ஏதேச்சை ஒருமை [70]

16. (a) $l_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $l_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்னும் இரு சமாந்தரமல்லாத நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$2x - 11y - 10 = 0$, $10x + 5y - 2 = 0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கியானது $4x - 7y - 8 = 0$, $8x + y - 4 = 0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள விரிகோணத்தின் இருகூறாக்கியெனக் காட்டுக.

(b) g, f ஆகியவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ ஆனது வட்டம் $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ இன் பரிதியை இருகூறிடுகின்றதெனக் காட்டுக.

நேர்கோடு $y + 5 = 0$ ஐத் தொட்டுக்கொண்டும் வட்டம் $x^2 + y^2 - 4 = 0$ இன் பரிதியை இருகூறிட்டுக்கொண்டும் புள்ளி $(1, 1)$ இனூடாக இரு வட்டங்களை வரையலாமெனக் காட்டுக.

இவ்விரு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(a) இரு நேர்கோடுகளிலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் உள்ள புள்ளி $P_0(x_0, y_0)$ என்க.

P_0 இலிருந்து $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்குரிய செங்குத்து தூரங்கள்

$$\text{முறையே } \frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ ஆகும்.}$$

(05)

(05)

தூரங்கள் சமம் ஆகையால்

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (05)$$

m, n என்பவற்றின் தனிப் பெறுமானங்கள் சமம் எனில், $n = m$ அல்லது $n = -m$.

$$\text{இதிலிருந்து } \frac{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

எனவே $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ எனும் நேர்கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளியின்

$$\text{ஆள்கூறு } \frac{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ எனும் சமன்பாடுகளை}$$

திருப்தி செய்யும்

(05)

$P(x, y)$ ஒருமாவும் புள்ளி எனின், P இலிருந்து $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ எனும்

நேர்கோடுகளுக்கான தூரம் சமம் எனின் P எனும் மாவும் புள்ளி $l_1 = 0$, $l_2 = 0$.

எனும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தில் இருகூறாக்கியில் இருக்கும்.

எனவே கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \quad (05)$$

[25]

$2x - 11y - 10 = 0$, $10x + 5y - 2 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட

$$\text{கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் } \frac{2x - 11y - 10}{\sqrt{2^2 + (-11)^2}} = \pm \frac{10x + 5y - 2}{\sqrt{10^2 + 5^2}}. \quad (05)$$

$$\text{i.e. } 2x-11y-10 = \pm(10x+5y-2) \Rightarrow x+2y+1=0 \text{ or } 2x-y-2=0. \quad (05)$$

$2x-11y-10=0$, $x+2y+1=0$ என்னும் நேர்கோடுகளிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{2}{11} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \frac{3}{4} < 1. \quad (05)$$

எனவே $2x-11y-10=0$, $10x+5y-2=0$ என்னும் கோடுகளிற்கு இடைப்பட்ட கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு $x+2y+1=0$ ஆகும். (05)

$4x-7y-8=0$, $8x+y-4=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின்

$$\text{இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் } \frac{4x-7y-8}{\sqrt{4^2+(-7)^2}} = \pm \frac{8x+y-4}{\sqrt{8^2+1^2}}. \quad (05)$$

$$\text{i.e. } 4x-7y-8 = \pm(8x+y-4) \Rightarrow x+2y+1=0 \text{ or } 2x-y-2=0. \quad (05) \quad (05)$$

$4x-7y-8=0$, $x+2y+1=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ϕ என்க

$$\tan \phi = \left| \frac{\frac{4}{7} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \frac{3}{2} > 1. \quad (05)$$

எனவே $4x-7y-8=0$, $8x+y-4=0$ எனும் நேர்கோடுகளிற்கு இடைப்பட்ட விரிகோண இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $x+2y+1=0$ ஆகும். (05) [50]

(b) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$, $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி $P_0(x_0, y_0)$ என்க.

$$\text{ஆகவே } x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 - r^2 = 0 \rightarrow (1) , x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \rightarrow (2).$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2gx_0 + 2fy_0 = 0 \Rightarrow gx_0 + fy_0 = 0. \quad (05)$$

எனவே இடைவெட்டும் புள்ளி $gx + fy = 0$ எனும் நேர்கோட்டில் இருக்கும். (05)

நேர்கோடு உற்பத்தியின் ஊடாக செல்வதனாலும், உற்பத்தி $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் மையமாக இருப்பதனாலும், எல்லா g, f பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ என்னும் வட்டம் $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை சமகூறிடும் (05) [15]

எல்லா g, f பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 4 = 0$ என்னும் வட்டம் $x^2 + y^2 - 4 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை சமசூறிடும். (05)

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 4 = 0 \text{ என்னும் வட்டத்தின் ஆரை} = \sqrt{g^2 + f^2 + 4}. \quad (05)$$

மையம் $(-g, -f)$ இலிருந்து $y + 5 = 0$ என்னும் கோட்டிற்கான

$$\text{செங்குத்துத் தூரம்} = |-f + 5|. \quad (05)$$

$y + 5 = 0$ என்னும் கோட்டை $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 4 = 0$ என்னும் வட்டம் தொடுவதால்

$$\sqrt{g^2 + f^2 + 4} = |-f + 5| \Rightarrow g^2 + f^2 + 4 = f^2 - 10f + 25 \Rightarrow g^2 + 10f - 21 = 0 \rightarrow (1)$$

(05)

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 4 = 0$ என்னும் வட்டம் $(1, 1)$ இனாடு செல்வதனால்

$$1 + 1 + 2g + 2f - 4 = 0 \Rightarrow g + f = 1.$$

(05)

$g + f = 1$ என (1) இல் பிரதியிட.

$$g^2 - 10g - 11 = 0 \Rightarrow (g - 11)(g + 1) = 0 \Rightarrow g = 11 \text{ or } -1.$$

(05) (05)

$$g = 11 \text{ ஆக } f = -10. \quad (05)$$

$$g = -1 \text{ ஆக } f = 2. \quad (05)$$

g, f என்பவற்றுக்கு இரு சோடிப் பெறுமானங்கள் இருப்பதனால் இரு வட்டங்கள் உண்டு. (05) [50]

வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + 22x - 20y - 4 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

(05)

(05)

[10]

17. (a) ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு, வழக்கமான குறிப்பீட்டில்,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

என நிறுவுக.

$$a = (b - c) \cos \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \left(\frac{B - C}{2} \right) \text{ என உய்த்தறிக.}$$

- (b) θ வின் எந்த மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும் கோவை $\tan \theta - 2 \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ ஆனது -7 இற்கும்

1 இற்குமிடையே எந்தப் பெறுமானத்தையும் எடுக்க முடியாதெனக் காட்டுக.

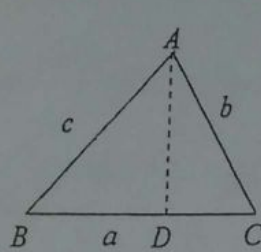
- (c) $5 \cos^2 \theta + 18 \cos \theta \sin \theta + 29 \sin^2 \theta$ ஐ வடிவம் $a + b \cos(2\theta + \alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகளும் α ஆனது θ வைச் சாராத ஒரு கோணமும் ஆகும்.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமன்பாடு

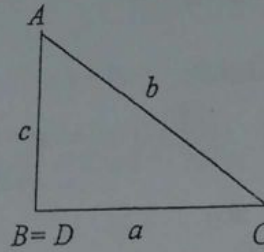
$$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5 \sin x)^2 = 19$$

இன் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

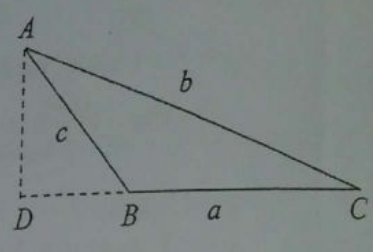
(a)



(i) ABC ஒரு கூர்கோண முக்கோணம்



(ii) ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்



(iii) ABC ஒரு விரிகோண முக்கோணம்

$$AD = AB \sin B = AC \sin C, \quad AD = AB \sin B = AC \sin C, \quad AD = AB \sin(\pi - B) = AC \sin C$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (05) \quad \therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (05) \quad \therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (05)$$

$$\text{இதே போல} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ என நிறுவலாம்(05)}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

[20]

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C} \quad (05)$$

$$\frac{a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{b - c}{2 \cos \left(\frac{B + C}{2} \right) \sin \left(\frac{B - C}{2} \right)} = \frac{b - c}{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right) \sin \left(\frac{B - C}{2} \right)}$$

(05)

(05)

(05)

$$a = (b - c) \cos \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \left(\frac{B - C}{2} \right) \quad (05)$$

[25]

(b) $k = \tan \theta - 2 \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ என்க.

$$= \tan \theta - 2 \frac{\tan \theta - 1}{1 + \tan \theta} = \frac{\tan^2 \theta - \tan \theta + 2}{1 + \tan \theta}$$

(05)

i.e., $\tan^2 \theta - (k+1) \tan \theta + 2 - k = 0$ (05)

இச்சமன்பாடு மெய்தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும் ஆயினாயின் $(k+1)^2 - 4(2-k) \geq 0$. (05)

i.e., $\iff k^2 + 6k - 7 \geq 0$ (05)

i.e., $\iff (k+7)(k-1) \geq 0$ (05)

i.e., $\iff k \leq -7$ or $k \geq 1$. (05)

எனவே θ எந்த ஒரு மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும் கோவை $\tan \theta - 2 \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ ஆனது -7 இற்கும் 1 இற்கும் இடையே எந்த பெறுமானத்தை எடுக்காது. [30]

(c) $5 \cos^2 \theta + 18 \cos \theta \sin \theta + 29 \sin^2 \theta$

$$= \frac{5}{2} (1 + \cos 2\theta) + 9 \sin 2\theta + \frac{29}{2} (1 - \cos 2\theta)$$
 (05)

$$= 17 - 12 \cos 2\theta + 9 \sin 2\theta$$

$$= 17 - 15 \left(\frac{4}{5} \cos 2\theta - \frac{3}{5} \sin 2\theta \right)$$
 (05)

$$= 17 - 15 (\cos \alpha \cos 2\theta - \sin \alpha \sin 2\theta), \text{ இங்கு } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

(05)

$$= 17 - 15 \cos(2\theta + \alpha), \text{ இங்கு } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

(05)

$$= a + b \cos(2\theta + \alpha), \text{ இங்கு } a = 17, b = -15, \alpha \text{ ஆனது } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ ஆகும்.}$$

[25]

$$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5 \sin x)^2 = 19$$

$$8(\cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x) + 2(\cos^2 x + 10 \cos x \sin x + 25 \sin^2 x) = 19$$

(05)

$$10 \cos^2 x + 36 \cos x \sin x + 58 \sin^2 x = 19$$
 (05)

$$5 \cos^2 x + 18 \cos x \sin x + 29 \sin^2 x = \frac{19}{2}$$
 (05)

$$17 - 15 \cos(2x + \alpha) = \frac{19}{2}, \alpha \text{ ஆனது } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ ஆகும்.}$$

(05)

$$15 \cos(2x + \alpha) = 17 - \frac{19}{2} = \frac{15}{2} \quad (05)$$

$$\cos(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$2x + \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \text{ இங்கு } n \text{ ஒரு முழு எண்.}$$

$$(05) \quad (05)$$

$$x = n\pi - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}, \text{ இங்கு } n \text{ முழு எண் ஆகவும் } \alpha \text{ ஆனது } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ ஆகுமாறு.}$$

[50]

உள்ளது. (05)

இணைந்த கணிதம் II பகுதி A

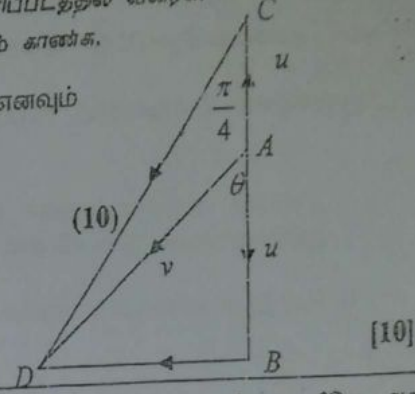
1. தெற்கு நோக்கி ஒரு நேரிய வீதி வழியே கதி $u \text{ km h}^{-1}$ உடன் ஓடுகின்ற சிறுவன் ஒருவன் காற்று மேற்கு நோக்கி வீசுவதை உணர்கின்றான். வடக்கு நோக்கி ஒரு நேரிய வீதி வழியே அதே கதியுடன் அவன் ஓடும்போது காற்று தென்மேற்கு நோக்கி வீசுவதை உணர்கின்றான். காற்றின் இயக்கங்களுக்கான தொடர்பு வேகங்களின் வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, காற்றின் உண்மைக் கதியையும் திசையையும் காண்க.

காற்றின் உண்மைக் கதி v எனவும், அதன் திசை θ எனவும் கொள்க.

$$DB = 2u \tan \frac{\pi}{4} = 2u \quad (05)$$

$$v = \sqrt{(2u)^2 + u^2} = \sqrt{5}u. \quad (05)$$

$$\tan \theta = \frac{2u}{u} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1} 2 \quad (05) \quad [15]$$

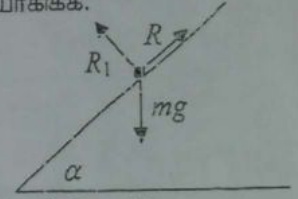


2. அதியுயர் சரிவுக் கோடு கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு சரிவு வழியே அதன் உச்சியில் ஓய்விலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை உச்சியிலிருந்து d தூரத்திற்குக் கீழ்நோக்கி இயங்குவதற்கு ஒரு செக்கன் எடுத்தால், துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு எதிரான தடை R மாறிலி எனக் கொண்டு, $R = m(g \sin \alpha - 2d)$ எனக் காட்டுக. அத்துடன், உச்சியிலிருந்து சென்ற தூரம் d ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகத்தையையும் காண்க.

துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு சாய்தளம் வழியே $F = ma$ யைப் பிரயோகிக்க.

$mg \sin \alpha - R = mf$, (05) இங்கு f துணிக்கையின் ஆர்முடுகல்.

$$f = g \sin \alpha - \frac{R}{m}.$$



சாய்தளம் வழியே துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$d = \frac{1}{2} \left(g \sin \alpha - \frac{R}{m} \right) t^2 \Rightarrow R = m(g \sin \alpha - 2d). \quad (05) \quad [15]$$

$$\therefore f = g \sin \alpha - (g \sin \alpha - 2d) = 2d \quad (05)$$

சாய்தளம் வழியே துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $v = u + at$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$v = 2d.1 \Rightarrow v = 2d \quad (05) \quad [10]$$

3. ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்திற்கு மேலே உயரம் h இல் உள்ள துணியை m க்கு உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருந்து விழுந்து, தளத்தில் அடித்து, பின்னர் பின்னடைத்கின்றது. மொத்தல் காரணமாக உண்டாகும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் இழப்பு $\frac{mgh}{4}$ எனின், துணிக்கைக்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை உயரம் $\frac{3h}{4}$ இற்குப் பின்னடைத்கின்றதெனக் காட்டுக.

தளத்தை மோதுவதற்கு சற்று முன் துணிக்கையின் வேகம் v என்க.

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (05)$$

தளத்தை மோதிய சற்றுப் பின் துணிக்கையின் வேகம் ev , (05) இங்கு e தளத்திற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான மீளமைவுக் குணகம்.

மொத்தல் காரணமாக இழக்கப்பட்ட இயக்கப்பாட்டு சக்தி

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(ev)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2(1-e^2) \Rightarrow \frac{mgh}{4} \\ &= mgh(1-e^2) = \frac{mgh}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (05) \quad [15] \end{aligned}$$

துணிக்கையின் மேல்நோக்கிய இயக்கத்திற்கு $v^2 = u^2 + 2as$ யைப் பிரயோகிக்க.

$0 = (ev)^2 - 2gs$, (05) இங்கு மோதிய பின் துணிக்கை அடைந்த உயரம் s

$$s = \frac{(ev)^2}{2g} = \frac{\frac{3gh}{4}}{2g} = \frac{3}{4}h. \quad (05) \quad [10]$$

4. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்கும்போது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் OP யிற்குச் செங்குத்தாக வேகம் $\sqrt{2gl}$ துணிக்கைக்குக் கொடுக்கப்படுகின்றது. சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, OP ஆனது கீழ்முன் நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஐ ஆக்கும்போது துணிக்கை P யின் வேகத்தைக் காண்க. இக்கணத்தில் இழையின் இழுலை $\frac{3}{2}mg$ எனக் காட்டுக.

சக்திக் காப்பு விதியினால்

$$\frac{1}{2}m(2gl) - mgl = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \frac{\pi}{3} \quad (10)$$

$$\therefore v = \sqrt{gl} \quad (05)$$

[15]

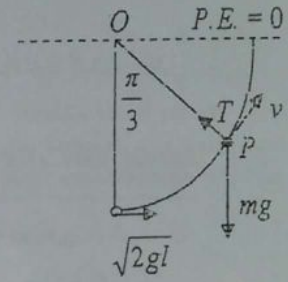
துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $F = ma$ யைப் PO திசையில் உபயோகிக்க.

$$T - mg \cos \frac{\pi}{3} = \frac{mv^2}{l} = mg \quad (05)$$

$$T - \frac{1}{2}mg = mg \quad \therefore v = \sqrt{gl} \quad (05)$$

$$T = \frac{3}{2}mg$$

[10]



5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$; இங்கு $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியன வழக்கமான சுருத்தை உடையன. $\mathbf{b}$ ஆனது, பருமன் $\sqrt{3}$ ஐ உடைய ஒரு காவியாகும். காலி $\mathbf{a}$ யிற்கும் காலி $\mathbf{b}$ யிற்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனின், $\mathbf{b}$ யை லடிவம் $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ யில் காண்க; இங்கு $x(<0)$, y ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, |\mathbf{b}| = \sqrt{3} \quad (05)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x + \sqrt{3}y = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}(1 - y) \quad (05)$$

$$x^2 + y^2 = 3(1 - y)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 4y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } \frac{3}{2}. \quad (05)$$

$$y = 0 \text{ ஆக } x = \sqrt{3}.$$

$$y = \frac{3}{2} \text{ ஆக } x = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{எனவே } \mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}. \quad (05)$$

[25]

6. நிறை W வையும் நீளம் $2a$ வையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB , அதன் முனை A ஒரு கரடான கிடைத் தரை மீதும் முனை B கோல் AB ஐயக் கொண்ட நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் இருக்குமாறு, நாப்பத்திலே இருக்கிறது. கோலிற்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ எனின், கோல் நழுவுந் தறுவாயில் இருக்கும்போது கோலின் கிடையுடனான சாய்வைக் காண்க.

கிடையாகக் துணிக்க $F = S$. (05)

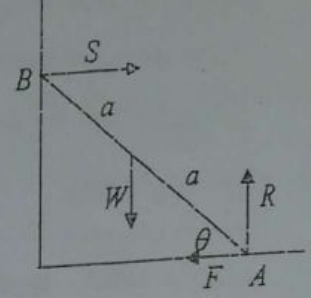
நிலைக்குத்தாக துணிக்க $R = W$ (05)

B பற்றிய திருப்புத் திறன்

$$Wa \cos \theta = S 2a \sin \theta \Rightarrow S = \frac{1}{2} W \cot \theta. (05)$$

$$\frac{F}{R} = \frac{1}{2} \cot \theta \leq \mu = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{6}} (05)$$

எனவே கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ஆகும் (05)



[25]

7. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் தம்முள் புறநீக்கும், யாவுமளாவிய (exhaustive) நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம்.

$P(A) = 2p, P(B) = p^2, P(C) = 4p - 1$ எனின், p யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$A \cup B \cup C = \Omega$ ஏனெனில் A, B, C யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்

$$P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1 (05)$$

ஆனால் $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ஏனெனில் A, B, C தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (05)

$$= 2p + p^2 + 4p - 1 = 1 (05)$$

$$\text{i.e., } p^2 + 6p - 2 = 0 \Rightarrow p = -3 \pm \sqrt{11} (05)$$

$p = -3 + \sqrt{11}$ ஏனெனில் p மறைப் பெறுமானம் கொண்டிருக்காது. (05)

[25]

8. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் மூன்று சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம்.
 $A, (B \cup C)$ ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் காட்டுக.

$$\begin{aligned}
 P\{A \cap (B \cup C)\} &= P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \quad (05) \\
 &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\} \quad (05) \\
 &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \quad A, B, C \text{ சாரா நிகழ்ச்சிகள்} \\
 &\quad \text{ஆகையால்} \quad (05) \\
 &= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B)P(C)\} \\
 &= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \quad (05) \\
 &= P(A)\{P(B \cup C)\} \quad (05)
 \end{aligned}$$

எனவே, A யும் $(B \cup C)$ யும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் [25]

9. 100 நோக்கல்களின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே 30, 4.1 எனக் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு நோக்கல் சரியான பெறுமானம் 30 இற்குப் பதிலாக 40 எனப் பிழையாகப் பதிவு செய்யப்பட்டிருப்பதாகப் பின்னர் காணப்பட்டுள்ளது. 100 நோக்கல்களின் சரியான இடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

$$\begin{aligned}
 \text{சரியான கூட்டுத்தொகை} &= 100 \times 30 - 40 + 30 = 2990. \quad (05) \\
 \therefore \text{சரியான இடை} &= \frac{2990}{100} = 29.9. \quad (05) \quad [10]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{சரியான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை} &= 100(4.1^2 + 30^2) - 40^2 + 30^2 \quad (05) \\
 &= 100(16.81 + 900) - 700 \\
 &= 91681 - 700 = 90981
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{சரியான மாறல் திறன்} = \frac{90981}{100} - 29.9^2 = 909.81 - 894.01 = 15.8 \quad (05)$$

$$\therefore \text{சரியான நியம விலகல்} = \sqrt{15.8} = 3.975 \text{ அல்லது } 3.97 \quad (05) \quad [15]$$

10. A, B என்னும் பாடசாலைகளில் அவற்றின் மாணவர்களுக்கு வழங்கப்பட்ட ஒரு சோதனைக்கான இடைய புள்ளிகள் முறையே 31, 45 ஆகும். பாடசாலை A யின் புள்ளிப் பரம்பலின் நியம விலகல் 5 ஆகும். பேறுகளை ஒப்பிடுவதற்குப் பாடசாலை B யின் இடையும் நியம விலகலும் பாடசாலை A யின் இடைக்கும் நியம விலகலிற்கும் சமமாகவும் பாடசாலை B யின் 85 புள்ளிகள் 63 புள்ளிகளாக அமையமாறும் ஒர் ஏகபரிமாண உருமாற்றத்தின் மூலம் பாடசாலை B யின் புள்ளிகள் அளவிடப்படுத்தப்படுகின்றன. ஏகபரிமாண நிலைமாற்றத்தைக் கண்டு, இதிலிருந்து, பாடசாலை B யின் புள்ளிப் பரம்பலின் தொடக்க நியம விலகலைக் காண்க.

$y = ax + b$ என்க, இங்கு x ஆரம்பப் புள்ளியாகவும் y மாற்றப்பட்ட புள்ளியாகவும் கொண்ட ஏகபரிமாண உருமாற்றம்.

$$63 = 85a + b \rightarrow (1) \quad (05)$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow 31 = 45a + b \rightarrow (2) \quad (05)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 40a = 32 \Rightarrow a = 0.8$$

$$(1) \text{ இலிருந்து } 31 = 45 \times 0.8 + b \Rightarrow b = -5.$$

$$\text{எனவே ஏகபரிமாண உருமாற்றம் } y = 0.8x - 5. \quad (05)$$

[15]

$$s.d. \text{ of } y = a \text{ s.d. of } x \Rightarrow 5 = \frac{4}{5} s.d. \text{ of } x \Rightarrow s.d. \text{ of } x = 6.25.$$

(05)

(05)

[10]

இணைந்த கணிதம் II பகுதி B

11. (a) ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி O இல் ஈர்ப்பின் கீழ் வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி

எறியப்படுகின்றது. நேரம் $\frac{u}{2g}$ இற்குப் பின்னர் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது புள்ளி O இல்

ஈர்ப்பின் கீழ் வேகம் v ($v > u$) உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. P ஆனது துணிக்கை P அடையும் மிக உயர்ந்த புள்ளியைக் கொள்வோம். P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் புள்ளி A யில் சந்திக்கின்றன. P, Q ஆகிய துணிக்கைகளின் முழு இயக்கங்களுக்கும் உரிய வேக - நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இவ்வேக - நேர வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி

(i) $OA = \frac{u^2}{2g}$ என.

(ii) $v = \frac{5u}{4}$ எனவும் புள்ளி A யில் துணிக்கை Q வின் வேகம் $\frac{3u}{4}$ எனவும்,

(iii) துணிக்கை Q அதன் அதியுயர் புள்ளியை அடையும்போது புள்ளி O விலிருந்து துணிக்கை P யின்

உயரம் $\frac{7u^2}{32g}$ எனக்

காட்டுக.

(b) திணிவு $M \text{ kg}$ ஐ உடைய ஒரு கார் சமதள வீதி ஒன்றில் எல்லாக் கதிகளிலும் மாறிலியாக இருக்கும் இயக்கத்திற்கான தடை R இற்கு எதிரே செல்கின்றது. எஞ்சினின் உயர்ந்தபட்ச வலு $H \text{ kW}$ ஆகவும் ஒரு சமதள வீதியில் காரின் உயர்ந்தபட்சக் கதி $v \text{ ms}^{-1}$ ஆகவும் இருப்பின், தடை R ஐ M, H, v ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்த ஒரு நேரிய வீதி வழியே

(i) கதி $\frac{v}{3} \text{ ms}^{-1}$ உடன் நேரே மேல்நோக்கி,

(ii) கதி $\frac{v}{2} \text{ ms}^{-1}$ உடன் நேரே கீழ்நோக்கி

இயங்கும்போது காரின் ஆர்முடுகலை M, H, v, g, α ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

சந்தர்ப்பம் (ii) இல் காரின் ஆர்முடுகல் சந்தர்ப்பம் (i) இல் காரின் ஆர்முடுகலின் இரு மடங்கொனின், $\sin \alpha$ வை M, H, v, g ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் வீதியிலே நேரே மேல்நோக்கிக் கார் செல்லும்போது அது அடையத்தக்க உயர்ந்த பட்சக் கதியை v யின் சார்பில் காண்க.

(a) (i) P எனும் துணிக்கை புள்ளி A யை

அடைய எடுத்த நேரம் T என்க

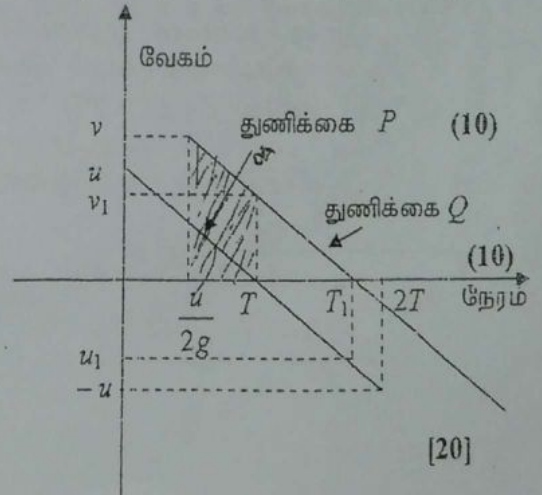
வரைபிலிருந்து $T = \frac{u}{g}$ (05)

மேலும் வரைபிலிருந்து

$OA = \frac{1}{2} uT = \frac{u^2}{2g}$.

(05)

[10]



[20]

(ii) புள்ளி A இல் துணிக்கை Q இனது வேகம் v_1 என்க

Q இன் வரைபில் இருந்து

$$\frac{v-v_1}{T-\frac{u}{2g}} = g \Rightarrow v_1 = v - g\left(T - \frac{u}{2g}\right) = v - \frac{u}{2} \rightarrow (1)$$

(05) (05)

மேலும் வரைபில் இருந்து

$$\left(\frac{v+v_1}{2}\right)\left(T - \frac{u}{2g}\right) = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow v+v_1 = 2u \rightarrow (2)$$

(05) (05)

$$(1), (2) \text{ இலிருந்து } v = \frac{5u}{4}, \quad v_1 = \frac{3u}{4}$$

(05)

(05)

[30]

(iii) துணிக்கை Q தனது அதி உயர் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் T_1 எனவும், இந்நேரத்தில் துணிக்கை P இன் வேகம் u_1 எனவும் கொள்க.

Q இன் வரைபில் இருந்து

$$T_1 - \frac{u}{2g} = \frac{v}{g} \Rightarrow T_1 = \frac{5u}{4g} + \frac{u}{2g} = \frac{7u}{4g} \text{ and } \frac{u_1}{T_1 - T} = -g \Rightarrow u_1 = -\frac{3u}{4}$$

(05) (05)

துணிக்கை Q ஆனது அதியுயர் புள்ளியில் உள்ள போது புள்ளி O இலிருந்து P இன் உயரம் h என்க.

வரைபில் இருந்து

$$h = \frac{1}{2}\left(u + \frac{3u}{4}\right)(2T - T_1) = \left(\frac{7u}{8}\right)\left(\frac{2u}{g} - \frac{7u}{4g}\right) = \frac{7u^2}{32g}$$

(05) (05)

[20]

(b) கதி உயர்வாக இருக்கையில் ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும்.

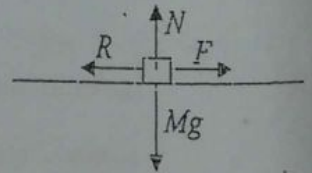
எனவே காரில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

எனவே $F - R = 0$. (05)

$$Fv = P \Rightarrow Fv = 10^3 H \Rightarrow F = \frac{10^3 H}{v} \text{ (05)}$$

$$\text{எனவே } R = \frac{10^3 H}{v} \text{ (05)}$$

[15]



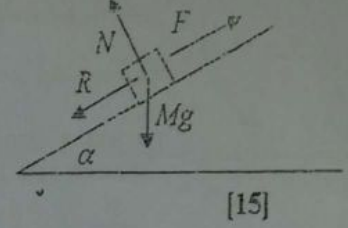
(i) தெருவில் கார் நேரே மேல் நோக்கி இயங்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் a என்க.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{3}} = \frac{3 \times 10^3 H}{v} \quad (05)$$

$$F - Mg \sin \alpha - R = Ma \quad (05)$$

$$\frac{3 \times 10^3 H}{v} - Mg \sin \alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma$$

$$a = \frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g \sin \alpha \quad (05)$$



[15]

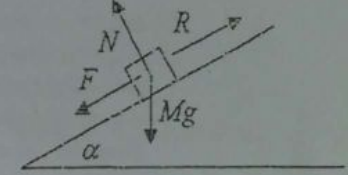
(ii) தெருவில் கார் நேரே கீழ்நோக்கி இயங்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் a' என்க.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{2}} = \frac{2 \times 10^3 H}{v} \quad (05)$$

$$F + Mg \sin \alpha - R = Ma' \quad (05)$$

$$\frac{2 \times 10^3 H}{v} + Mg \sin \alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma'$$

$$a' = \frac{10^3 H}{Mv} + g \sin \alpha \quad (05)$$



[15]

$$a' = 2a \Rightarrow \frac{10^3 H}{Mv} + g \sin \alpha = 2 \left(\frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g \sin \alpha \right) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{10^3 H}{Mgv}$$

(05)

(05)

[10]

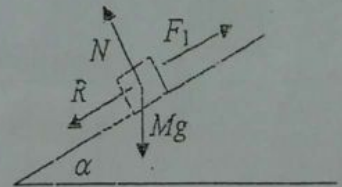
தெருவில் கார் நேரே மேல்நோக்கி இயங்கும் போது அதன் உயர் வேகத்தை v_1 என்க.

$$F_1 = \frac{10^3 H}{v_1} \quad (05)$$

உயர் வேகத்தின் போது ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும். எனவே காரில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

$$F_1 - Mg \sin \alpha - R = 0 \quad (05)$$

$$\frac{10^3 H}{v_1} - Mg \left(\frac{10^3 H}{Mgv} \right) - \frac{10^3 H}{v} = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2} \quad (05)$$



[15]

12. (a) ஒரு புள்ளி O விவிருந்து உயரம் k யில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C யில் கிடையுடன் கோணம் θ இல் சாய்ந்து வேகம் u உடன் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. புள்ளி O விவிருந்து எறியத் தளத்தில் உள்ள கிடைக் கோடு, நிலைக்குத்துக் கோடு ஆகியன முறையே Ox, Oy அச்சுகளைக் கொண்டு செங்கோணத் தெக்காட்டு ஆனகற்றுத் தொகுதி ஒன்றைக் கருதுவோம்.

நேரம் t யில் துணிக்கை புள்ளி (x, y) இல் இருக்குமெனின், $y = k + x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2}$ எனக் காட்டுக.

h நேராக இருக்கும் புள்ளி $A(0, h)$ இல் கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்வாக வேகம் v உடன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. அதே கணத்தில்

புள்ளி $B(0, \frac{h}{2})$ இல் கிடையுடன் கோணம் $\beta (> \alpha)$ இல் சாய்வாக வேகம் w உடன் நிலைக்குத்துத்

தளத்தில் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் கிடைத் தூரம் d ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், $v \cos \alpha = w \cos \beta$ எனவும் $h = 2d(\tan \beta - \tan \alpha)$ எனவும் காட்டுக.

அத்துடன் இரு துணிக்கைகளும் சந்திப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{h}{2(w \sin \beta - v \sin \alpha)}$ எனவும் காட்டுக.

- (b) ஒரு கிடை நிலத்திலிருந்து 3 மீற்றர் உயரத்தில் இருக்கும் ஒரு சீலிங்குடன் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் இயங்கத்தக்க, இலேசான, ஒப்பமான சுப்பி P யின் கீழும் சீலிங்குடன் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான ஒப்பமான சுப்பியின் மேலாகவும் அனுப்பப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் திணிவு $M(> m)$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இயங்கத்தக்க சுப்பி P யும் துணிக்கை Q வும் நிலத்திலிருந்து முறையே $\frac{1}{2}$ மீற்றர், 1 மீற்றர் உயரங்களிலும் சுப்பிகளுடன் தொடுகையுறாத இழைப் பகுதிகள் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கும்போது தொகுதி ஒவ்விவிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை Q வின் ஆர்முடுகலையும் இழையின் இழுவையையும் காண்க.

துணிக்கை Q நேரம் $\sqrt{\frac{4M+m}{2M-m}}$ செக்கனிற்குப் பின்னர் நிலத்தை அடையும் எனவும் சுப்பி P

நிலத்திலிருந்து உயரம் $\frac{1}{2} + \frac{3M}{4M+m}$ மீற்றருக்கு ஏறும் எனவும் காட்டுக.

- (a) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ நிலைக்குத்தாகப் பாவிக்க.

$$y - k = u \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow (1) \quad (10)$$

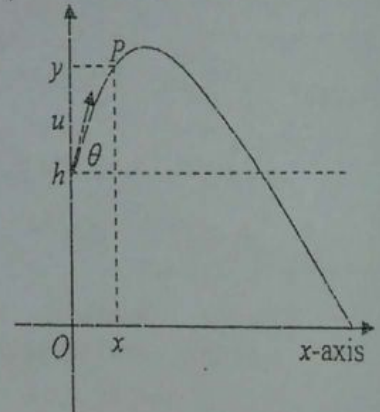
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ஐ கிடையாகப் பாவிக்க.}$$

$$x = ut \cos \theta \Rightarrow t = \frac{x}{u \cos \theta} \quad (05)$$

(1) இலிருந்து

$$y - k = x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2} \quad (05)$$

$$y = k + x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2}$$



[20]

கிடையாக $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யை துணிக்கை P இற்கு
பாவிக்க.

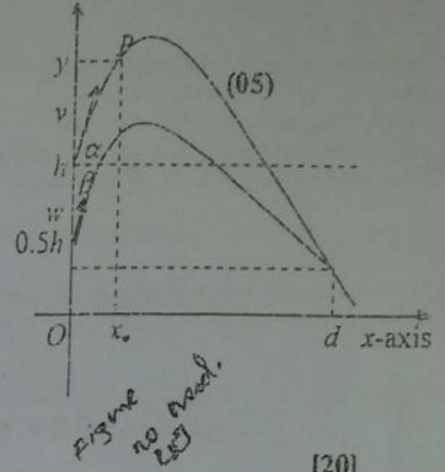
$d = vt_0 \cos \alpha \rightarrow (2)$. (05) இங்கு t_0 துணிக்கைகள்
சந்திக்க எடுக்கும் நேரம்.

கிடையாக $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யை துணிக்கை Q இற்கு
பாவிக்க.

$d = wt_0 \cos \beta \rightarrow (3)$. (05)

(2), (3) இருந்து

$v \cos \alpha = w \cos \beta$ (05)



[20]

முதல் பகுதியில் துணிக்கை P இன் இயக்கத்திற்கு பெறப்பட்ட முடிவை உபயோகிக்க.

$y_0 = h + d \tan \alpha - \frac{gd^2 \sec^2 \alpha}{2v^2} \rightarrow (4)$, (05) இங்கு y_0 துணிக்கைகள் சந்திக்கும்
புள்ளியின் உயரமாகும்.

முதல் பகுதியில் துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு பெறப்பட்ட முடிவை உபயோகிக்க.

$y_0 = \frac{h}{2} + d \tan \beta - \frac{gd^2 \sec^2 \beta}{2w^2} \rightarrow (5)$ (05)

(4), (5) இலிருந்து $h + d \tan \alpha = \frac{h}{2} + d \tan \beta \Rightarrow h = 2d(\tan \beta - \tan \alpha)$

(05)

[15]

$d = \frac{h}{2(\tan \beta - \tan \alpha)} = \frac{h \cos \alpha \cos \beta}{2(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta)} = wt_0 \cos \beta$ (05)

i.e., $t_0 = \frac{h}{2w \left(\sin \beta - \sin \alpha \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \right)} = \frac{h}{2w \left(\sin \beta - \sin \alpha \left(\frac{v}{w} \right) \right)} = \frac{h}{2(w \sin \beta - v \sin \alpha)}$

(05)

(05)

[15]

(b) துணிக்கை Q இன் ஆர்முடுகலை a என்க.

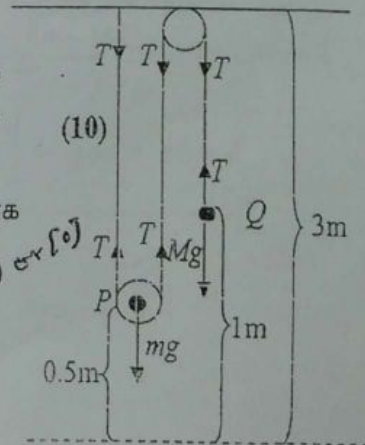
துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக
கீழ்நோக்கி $F = ma$ யைப் பிரயோகிக்க.

$Mg - T = Ma \rightarrow (1)$ (05)

கப்பி P இற்கு $F = ma$ யை நிலைக்குத்தாக

மேல்நோக்கி பிரயோகிக்க $2T - mg = m \frac{a}{2} \rightarrow (2)$ (10)

10



$$(1) \times 2 + (1), 2Mg - mg = \left(2M + \frac{m}{2}\right)a$$

$$i.e., a = \frac{\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)g}{2} \quad (05)$$

[30]

$$(1) \text{ இலிருந்து, } T = Mg - Ma = Mg \left\{ 1 - 2 \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) \right\} = \frac{3mMg}{4M + m}$$

(05)

(05)

[10]

துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$1 = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{2(2M - m)}{4M + m} \right) g t_0^2, \quad (10) \text{ இங்கு } t_0 \text{ நிலைத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம்.}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{4M + m}{(2M - m)g}} \text{ seconds.}$$

[10]

t_0 எனும் நேரத்தில் கப்பி P உயரும் உயரத்தை h_0 என்க.

மேல்நோக்கி துணிக்கை P இன் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பாலிக்க.

$$h_0 = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) \left(\frac{4M + m}{2M - m} \right) = \frac{1}{2} \text{ meters. (05)}$$

t_0 நேரத்தில் கப்பி P வேகம் v என்க.

கப்பி P இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி $v = u + at$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$v = 0 + \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) g \sqrt{\frac{4M + m}{2(M - m)g}} = \sqrt{\left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) g} \quad (05)$$

(05)

(05)

Q நிலத்தை அடைந்த பின்னர் கப்பி P உயரும் உயரத்தை h_1 என்க.

Q நிலத்தை அடைந்த பின்னர் கப்பி P இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக

மேல்நோக்கி $v^2 = u^2 + 2as$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$(05) 0 = \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) g - 2gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) \quad (05)$$

$$\text{மொத்த உயரம்} = \frac{1}{2} + h_0 + h_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3M}{4M + m} \text{ metres. (05)[30]}$$

13. A, B எப்போது ஒரே இடப்பாடான விடை மேலாக மீது இடைத்த தூரம் $8l$ இல் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். திணிவு m உடைய ஒரே இடப்பாடான துணிக்கை P ஆனது A மற்றும் B யிற்குமிடையே AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் $3l$ லும் மீள்தன்மை மட்டு 4λ வையுடைய உடைய ஒரே இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி A உடனும் இயற்கை நீளம் $2l$ லும் மீள்தன்மை மட்டு λ வையுடைய உடைய ஒரே இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி B உடனும் துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது ஒரு புள்ளி C யிலே நுழைந்ததில் இருக்குமெனின், $AC = \frac{42}{11}l$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது AB யின் நடுப் புள்ளி M இல் வைக்கப்பட்டு, பின்னர் ஒய்கிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. துணிக்கை P ஆனது AB வழியே புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கும்போது இரு இழைகளினதும் இழுவிசைகள் T_1 மற்றும் T_2 எனக் காட்டுக.

$\frac{40}{11}l \leq x \leq 4l$ இற்குத் துணிக்கை P யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி, வழக்கமான குறிப்பிட்டி.ல்

$$\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml} \left(x - \frac{42}{11}l \right) = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$y = x - \frac{42}{11}l \text{ என எழுதுவதன் மூலம் } \ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml} y = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ வடிவ உடையதெனக் கொண்டு A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் $\frac{41}{11}l$ இல் இருக்கும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை P , C இல் இருக்கும் போது AP இழையில் இழுவை T என்க.

துணிக்கை P , C இல் இருக்கும் போது PB

இழையில் இழுவை T' என்க.

ஊக்கின் விதியினால்

$$T = \left(\frac{AC - 3l}{3l} \right) 4\lambda, \quad T' = \left(\frac{8l - AC - 2l}{2l} \right) \lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l} \right) \lambda.$$

(10)

(10)

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி C இல் நுழைந்ததில் இருக்குமெனின்,

$$T = T' \Rightarrow \left(\frac{AC - 3l}{3l} \right) 4\lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l} \right) \lambda \Rightarrow 11AC = 42l \Rightarrow AC = \frac{42}{11}l.$$

(05)

(05)

(05)

[40]

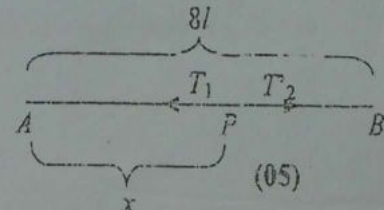
துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது AP இல் உள்ள இழுவையை T_1 என்க.

துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது PB இல் உள்ள இழுவையை T_2 என்க.

ஊக்கின் விதியினால்.

$$T_1 = \left(\frac{x - 3l}{3l} \right) 4\lambda \quad (05)$$

$$T_2 = \left(\frac{8l - x - 2l}{2l} \right) \lambda = \left(\frac{6l - x}{2l} \right) \lambda \quad (05)$$



துணிக்கை P இற்கு AB வழியே நியூட்டனின் விதியை பிரயோகிக்க

$$T_2 - T_1 = m\ddot{x}$$

(16)

$$\text{i.e., } \left(\frac{6l-x}{2l} \right) \lambda - \left(\frac{x-3l}{3l} \right) 4\lambda = m\ddot{x} \quad (15)$$

$$\text{i.e., } m\ddot{x} + \frac{\lambda}{l} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) x - 7\lambda = 0 \quad (05)$$

$$\text{i.e., } \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml} x - \frac{7\lambda}{m} = 0$$

$$\text{i.e., } \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml} \left(x - \frac{42}{11} l \right) = 0 \quad (05) \quad [40]$$

$$y = x - \frac{42}{11} l \text{ என்க.}$$

$$\dot{y} = \dot{x}, \quad \ddot{y} = \ddot{x} \quad (05)$$

$$\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml} y = 0 \rightarrow (1) \quad (05) \quad [10]$$

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \rightarrow (2).$$

$$\dot{y} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \rightarrow (3).$$

$$x = 4l, \quad \dot{x} = 0 \text{ at } t = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{11} l, \quad \dot{y} = 0 \text{ at } t = 0 \text{ இல் } (05)$$

$$\text{எனவே } (2) \Rightarrow A = \frac{2}{11} l, \quad (3) \Rightarrow B = 0.$$

(05)

(05)

$$\therefore y = \frac{2}{11} l \cos \omega t \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{2}{11} l \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y.$$

$$(1) \text{ உடன் ஒப்பிட } \omega^2 = \frac{11\lambda}{6ml} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}. \quad (05) \quad [20]$$

$$y = \frac{2}{11} l \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t \right), \quad -\frac{2}{11} l \leq y \leq \frac{2}{11} l \text{ இல் } (05) \quad \text{No need}$$

$$x = \frac{42}{11} l + \frac{2}{11} l \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t \right), \quad \frac{40}{11} l \leq x \leq 4l \text{ இல் } (05) \quad \text{No need}$$

துணிக்கை P ஆனது $x = \frac{41}{11} l$ என்னும் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் t_0 என்க.

$$\frac{2}{11} \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t_0 \right) = \frac{41}{11} - \frac{42}{11} \Rightarrow \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t_0 \right) = -\frac{1}{2}.$$

(05)

(05)

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0 = \frac{2\pi}{3} \quad (05)$$

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t\right), \frac{40}{11}l \leq x \leq 4l \quad (05)$$

இப்புள்ளியில் துணிக்கை P இன் வேகம்

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0\right) = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\lambda l}{22m}} \quad (05)$$

(05)

[40]

14. (a) A, B ஆகியன ஒரு புள்ளி O உடன் ஒரேகோட்டில்லாத இரு வேறுவேறான புள்ளிகளைக் கொள்ளோம். புள்ளி O குறித்து A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே a, b ஆகும். D ஆனது AB மீது $BD = 2DA$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளியெனின், புள்ளி O குறித்துப் புள்ளி D யின் தானக் காவி $\frac{1}{3}(2a+b)$ எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{BC} = ka, (k > 1)$ ஆகவும் O, D, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலும் இருப்பின், k யின் பெறுமானத்தையும் விவரித்து $OD : DC$ வையும் காண்க.

$\overrightarrow{AC}$ ஐ a, b ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

அத்துடன் AC யிற்குச் சமந்தரமாகப் புள்ளி O விஜயடாகச் செல்லும் கோடு E யில் AB வைச் சந்திக்குமெனின், $6DE = AB$ எனக் காட்டுக.

- (b) Ox, Oy என்னும் செங்கோணத் தொலைப்பீட்டின் அச்சுகள் குறித்து A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(\sqrt{3}, 0), (0, -1), (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1)$ ஆகும். $6P, 4P, 2P, 2\sqrt{3}P$ நியூற்றன் என்னும் பருமன்களை உடைய

விசைகள் முறையே OA, BC, CA, BO ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

விளையுளின் தாக்கக் கோடு y -அச்சை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசையில் $6\sqrt{3}P$ நியூற்றன் பருமனுள்ள வேறொரு விசை தொகுதிக்குப் பகுத்தப்பட்டுள்ளது. தொகுதி $10P$ நியூற்றன் மீற்றர் பருமனுள்ள ஓர் இணையாக ஒடுக்கப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$$(a) \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = a + \frac{1}{3}(b-a) = \frac{1}{3}(2a+b) \quad (05) \quad (05) \quad [15]$$

$$\overrightarrow{OC} = b + ka \quad (05)$$

O, D, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே

நேர்கோட்டில் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OC}$, இங்கு λ ஒரு பரமானம்

$$\text{i.e., } \frac{1}{3}(2a+b) = \lambda(b+ka) \quad (05)$$

$$(3\lambda k - 2)a + (3\lambda - 1)b = 0$$

a, b இரு சமாந்தரமற்ற காவிகள் ஆகையால்

$$3\lambda k - 2 = 0, 3\lambda - 1 = 0 \quad (05) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \quad (05), k = 2. \quad (05) \quad [20]$$

$$\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OC} \Rightarrow OD = \frac{1}{3}OC \Rightarrow OD = \frac{1}{3}(OD + DC) \Rightarrow 2OD = DC \Rightarrow OD : DC = 1 : 2$$

$$\frac{1}{2} \quad (05)$$

$$(05)$$

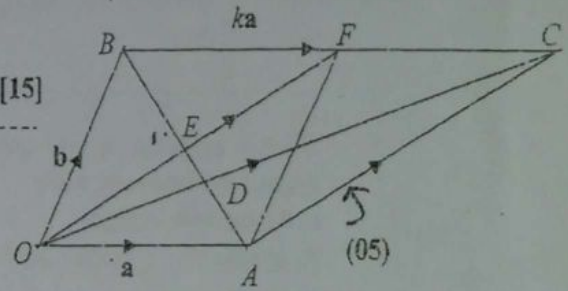
$$(05)$$

$$(05)$$

$$[20]$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = b + 2a$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -a + (b + 2a) = a + b \quad (05)$$



OE எனும் கோட்டினை நீட்டித்து BC யை F இல் சந்திக்கின்றது.

$OACF$ ஓர் இணைகரம் ஏனெனில் OE சமாந்தரம் AC

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC} = a + b \quad (05)$$

எனவே, $OAFB$ ஓர் இணைகரம்

ஆகவே, AB இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். (05)

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}(b-a) + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{6}(b-a) \quad (05)$$

$$6\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 6DE = AB \quad [20]$$

(b) Ox திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$X = 6P + 4P \cos \frac{\pi}{3} + 2P \cos \frac{\pi}{3} = 9P \quad (10)$$

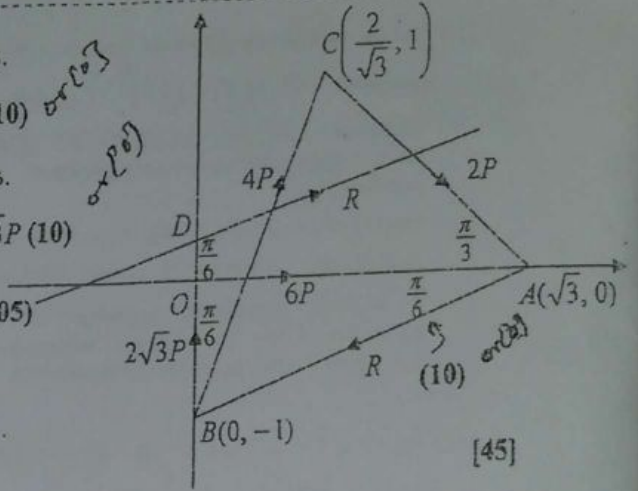
Oy திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$Y = 2\sqrt{3}P + 4P \sin \frac{\pi}{3} - 2P \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}P \quad (10)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{81 + 27}P = 6\sqrt{3}P \quad (05)$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} = \frac{3\sqrt{3}P}{9P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (05)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (05)$$



$OD = d$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி D

இனூடாக விளையுள் விசை

தாக்குவதாகக் கருதுக.

இடஞ்சுழியாக D பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$4P \cos \frac{\pi}{3} \times (d+1) + 6P \times d + 2P \cos \frac{\pi}{3} \times d - 2P \sin \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} = 0 \quad (10)$$

$$2 \times (d+1) + 6 \times d + 1 \times d - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{9} \quad (05)$$

O இனூடாக செல்லும் தெக்காட்டு ஆள்கூற்று அச்சக்கள் குறித்து, விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டில் உள்ள மாறும் புள்ளி (x, y) என்க.

$$\frac{y-d}{x} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow y - \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow 9y - 3\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (05)$$

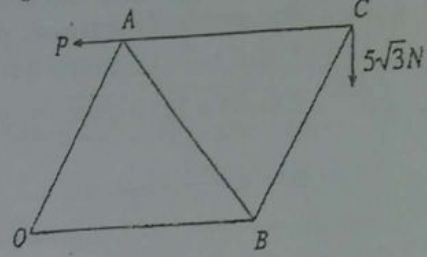
தொகுதியின் விளையுளும், AB வழியே புகுத்தப்பட்ட விசையும் சம பருமனும் எதிர்த்திசையிலும் இருப்பதனால் தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்கும். எனவே இணையின் பருமன்

$$(05) \quad 6\sqrt{3}P \times \left(1 + \frac{1}{9}\right) \sin \frac{\pi}{3} = 10P \text{ newton metres} \quad (05)$$

15. (a) ஒவ்வொன்றிலும் நிறை W ஆகவுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீரான சம கோல்கள் A யிலே சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை B, C ஆகிய முனைகள் ஒரே இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்துள்ள இரு ஒப்பமான தளங்களின் மீது B, C ஆகிய முனைகள் இருக்குமாறு கோல்கள் ஒரு நிலைத்துக்குத் தளத்திலே நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன; BC ஆனது கிடையாக இருக்கும் அதே வேளை BC யிற்கு மேலே A உள்ளது. B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

$\tan \theta > 2 \tan \alpha$ எனின், இழையின் இழுவை $\frac{1}{2} W(\tan \theta - 2 \tan \alpha)$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\hat{BAC} = 2\theta$.
மூட்டு A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

- (b) OA, OB, AC, AB, BC என்னும் ஐந்து இலேசான சம கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் O இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை C யில் $5\sqrt{3}$ நியூற்றன் நிறையைக் காவுகின்றது. OB கிடையாக இருக்குமாறு A யில் P நியூற்றன் என்னும் ஒரு கிடை விசையினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.



- (i) P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) O இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.
(iii) போவின் குறிப்பிட்டப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.

- (a) ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளம் $2a$ என்க.

நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$$2R \cos \alpha = 2W \Rightarrow R = W \sec \alpha$$

(05)

(05)

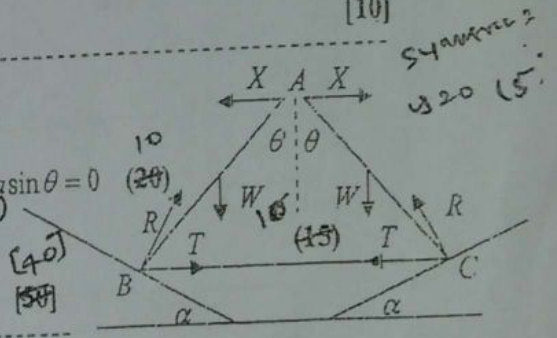
[10]

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு இடஞ்சுழியாக A பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$T \cdot 2a \cos \theta + R \sin \alpha \cdot 2a \cos \theta + W \sin \theta \cdot 2a \sin \theta - R \cos \alpha \cdot 2a \sin \theta = 0$$

$$2T + 2W \tan \alpha + W \tan \theta - 2W \cdot \tan \theta = 0 \quad (10) \text{ or } (10)$$

$$T = \frac{W}{2} (\tan \theta - 2 \tan \alpha) \quad (05)$$



கோல் AB இன் சமநிலைக்கு இடஞ்சுழியாக B பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$X \cdot 2a \cos \theta - W \sin \theta = 0 \quad (05)$$

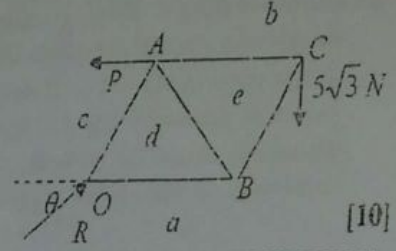
$$\text{i.e., } X = \frac{W}{2} \tan \theta \quad (05)$$

[10]

(b) யாதேனும் ஒரு கோலின் நீளத்தை $2a$ என்க.
 O பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$P \cdot 2a \sin \frac{\pi}{3} - 5\sqrt{3} \cdot \left\{ 2a + 2a \cos \frac{\pi}{3} \right\} = 0 \quad (05)$$

$$P = 15 \text{ N}. \quad (05)$$



[10]

O இல் உள்ள மறுதாக்கம் R எனவும் கிடையுடன் R அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொள்க.

நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$$R \sin \theta = 5\sqrt{3}. \quad (05)$$

கிடையாகக் விசைகளைத் துணிக்க.

$$R \cos \theta = P = 15. \quad (05)$$

$$R = \sqrt{75 + 225} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ N}. \quad (05)$$

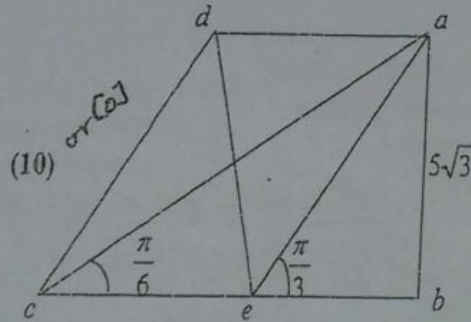
$$\tan \theta = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (05)$$

[20]

எனவே O இல் மறுதாக்கம் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

தகைப்பு வரிப்படம்:

15



[10]

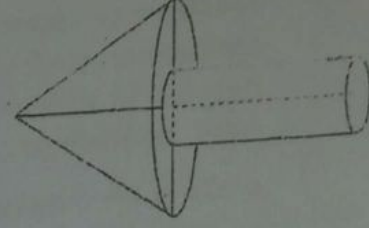
கோல்	தகைப்பு	பருமன்
OA	உதைப்பு	10N
OB	உதைப்பு	10N
AC	இழுவை	5N
AB	இழுவை	10N
BC	உதைப்பு	10N

(25)
(20)

(25)
(20)

50
[40]

16. உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம், அதன் சமச்சீர்த் திணிவு, கூம்பின் அடியிலிருந்து தூரம் $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.



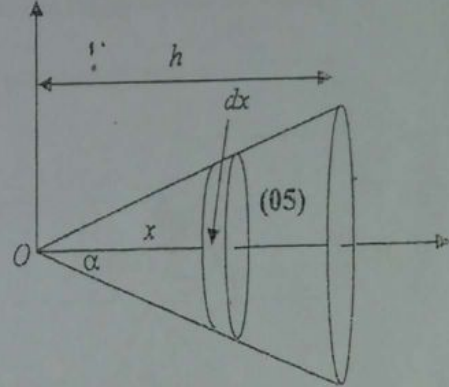
உருவில்க் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சீரான திண்மச் சேர்த்திப் பொருள் ஒருமிக்க நிலைப்படுத்தப்பட்ட அடி ஆரை $3r$ ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பையும் ஆரை r ஐயும் உயரம் $2h$ ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையையும் கொண்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம், அதன் சமச்சீர்த் திணிவு, கூம்பின் உச்சியிலிருந்து தூரம் $\frac{5}{4}h$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஒரு நுனி ஒரு சீவிற்குடனும் மற்றைய நுனி கூம்பின் வட்ட அடியின் பரிதி மீது உள்ள ஒரு புள்ளி A யிலும் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் சேர்த்திப் பொருள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்கிக்கொண்டு இருக்கின்றது.

சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீர்த் திணிவு கீழ்க்கு நிலைக்குத்துடன் கோணம் α வை ஆக்குமெனின், $\tan \alpha = \frac{12r}{h}$ எனக் காட்டுக.

கூம்பின் உச்சியில் சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீர்த் திணிவு ஒரு விசை P யைப் பிரயோகிப்பதன்மூலம் சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீர்த் திணிவு கிடைமாக இருக்குமாறு சேர்த்திப் பொருள் நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. விசை P யையும் இழையின் இழுவையையும் W, α ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க; இங்கு W ஆனது சேர்த்திப் பொருளின் நிறையாகும்.

சமச்சீரினால் திண்ம கூம்பின் புவியீர்ப்புமையம் சமச்சீர் அச்சில் இருக்கும் (05)
உச்சி O இலிருந்து திண்மக் கூம்பின் ஈர்ப்பு மையம் $\bar{x}$ தூரத்தில் உள்ளது என்க.
 ρ திண்மக் கூம்பின் அடர்த்தி என்க.



$$\frac{1}{3}\pi(h \tan \alpha)^2 h \rho \bar{x} \quad (05)$$

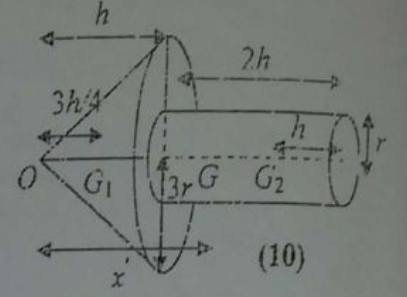
$$= \int_0^h \pi(x \tan \alpha)^2 x \rho dx \quad (15)$$

$$\text{i.e. } \frac{1}{3}h^3 \bar{x} = \int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4}h. \quad (05)$$

எனவே துணிக்கையின் ஈர்வை மையம் சமச்சீர் அச்சின் வழியே அடியிலிருந்து $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கும். (05)

[40]

சமச்சீரினால் திண்ம செவ்வட்ட உருளையின் திணிவுமையம் சமச்சீர் அச்ச வழியே கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து $2h$ தூரத்தில் இருக்கும். (05)
முதல் பகுதியிலிருந்து திண்மக் கூம்பின் திணிவுமையம் கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து சமச்சீர் அச்ச வழியே $\frac{3h}{4}$ தூரத்தில் இருக்கும்.



(05)

சேர்த்தி உடலின் திணிவு மையம் சமச்சீர் அச்ச வழியே கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து x' தூரத்தில் உள்ளது.

$$\left(\pi r^2 (2h) + \frac{1}{3} \pi (3r)^2 h \right) \rho x' = \left(\pi r^2 (2h) \right) (2h) \rho + \left(\frac{1}{3} \pi (3r)^2 h \right) \rho \left(\frac{3h}{4} \right) \quad (05), (05) \text{ சரியான சமன்பாட்டுக்கு}$$

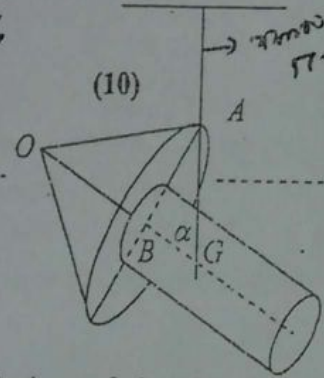
$$5x' = 4h + \frac{9}{4}h \Rightarrow x' = \frac{5}{4}h \quad (05)$$

[50]

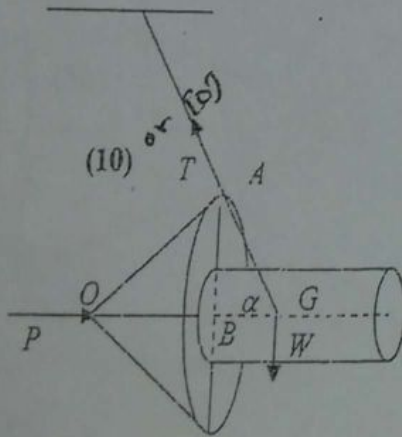
$$AB = 3r, BG = OG - OB = \frac{5h}{4} - h = \frac{h}{4} \quad (05)$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BG} = \frac{12r}{h} \quad (05)$$

பல பாய்வு எல்லை



[20]



இலாமியின் தேற்றத்தை பிரயோகிக்க.

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{T}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{W}{\sin(\pi - \alpha)} \quad (15)$$

$$\frac{P}{\cos \alpha} = T = \frac{W}{\sin \alpha} \quad (05)$$

$$P = W \cot \alpha \quad (05), T = W \operatorname{cosec} \alpha \quad (05)$$

[40]

மாத்திரம்
பல அளவு
[5] பற்றி
சொல்லுக

17. (a) ஒரு பையில் இயல்பொத்த 5 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் 7 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து பிரதிபலிப்பு இல்லாமல் மூன்று பந்துகள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றன.
- (i) எல்லா மூன்று பந்துகளும் கறுப்புப் பந்துகளாக இருப்பதற்கான,
 - (ii) அம்மூன்று பந்துகளில் எதுவும் வெள்ளைப் பந்தாக இராமைக்கான,
 - (iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்கான,
 - (iv) பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான,
 - (v) அம்மூன்று பந்துகளும் கறுப்பு, சிவப்பு, வெள்ளை என்னும் வரிசையில் எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

- (b) ஒரு குறித்த வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களுக்குப் புள்ளிவிவரவியலிலான ஒரு வினாத்தாள் கொடுக்கப் படுகின்றது. இம்மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வரும் கூட்டமாகிய மீடறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளி வீச்சு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
00 - 20	14
20 - 40	f_1
40 - 60	27
60 - 80	f_2
80 - 100	15

அட்டவணையில் 20 - 40, 60 - 80 என்னும் புள்ளி வீச்சுகளின் மீடறன்கள் தவறியுள்ளன. எனினும் கூட்டமாகிய மீடறன் பரம்பலின் ஆகாரமும் இடையமும் முறையே 48, 50 என அறியப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணையில் இரு தவறியுள்ள மீடறன்களையும் கணிக்க.

இதிலிருந்து, புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளுக்குத் தோற்றிய மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைப் பெறுக.

கூட்டமாகிய மீடறன் பரம்பலின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

$$(a) (i) \quad P(BBB) = P(B)P(B|B)P(B|BB) = \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{455}$$

(05) (10) (05) [20]

$$\text{அல்லது } P(BBB) = \frac{{}^3C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{3!}{15 \times 14 \times 13} = \frac{1}{455}$$

(10) (05) (05) [20]

$$(ii) \quad P(W'W'W') = P(W')P(W'|W')P(W'|W'W') = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

(05) (10) (05) [20]

$$\text{அல்லது } P(WWW) = \frac{{}^{10}C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{15 \times 14 \times 13} = \frac{24}{91}$$

(10) (05) (05)

[20]

(iii) $P(\text{குறைந்தது ஒரு வெள்ளைப் பந்தேனும் இருத்தல்}) = 1 - P(\text{மூன்றும் வெள்ளைப் பந்தாக இராமை.})$ (05)

$$= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

(05) (05)

[15]

(iv) $P(\text{பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்கள்}) = \frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1 \times {}^7C_1}{{}^{15}C_3} = \left(\frac{5 \times 3 \times 7}{15 \times 14 \times 13} \right) 3! = \frac{3}{13}$

(05)

(05)

(05)

[15]

(v) $P(BRW) = P(B)P(R|B)P(W|BR) = \frac{3}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{1}{26}$

(05)

(05)

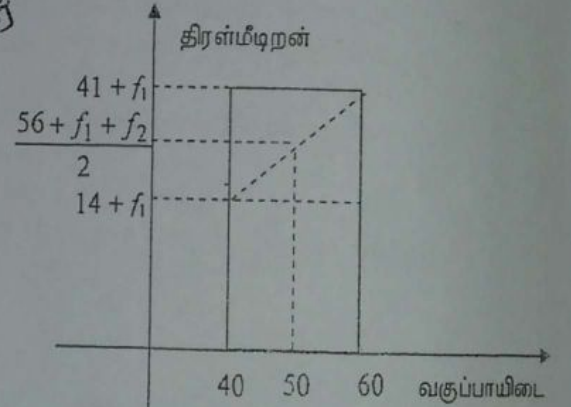
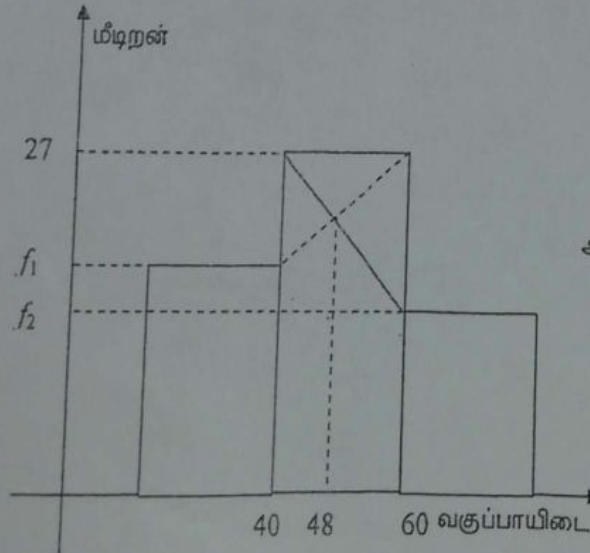
[10]

(b) இடையம் = 50 $\therefore$ இடைய வகுப்பு 40-60.

$$14 + f_1 + \frac{27}{20} \times 10 = \frac{56 + f_1 + f_2}{2} \quad (10)$$

$$28 + 2f_1 + 27 = 56 + f_1 + f_2$$

$$\text{i.e., } f_1 - f_2 = 1 \rightarrow (1)$$



ஆகாரம் = 48 $\therefore$ ஆகார வகுப்பு 40-60.

$$\frac{27 - f_1}{27 - f_2} = \frac{48 - 40}{60 - 48} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad (10)$$

$$\text{i.e., } 3f_1 - 2f_2 = 27 \rightarrow (2)$$

(1), (2) இலிருந்து

$$f_1 = 25 \quad (05), f_2 = 24. \quad (05)$$

[30]

புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளுக்கு தோற்றிய மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை.
 $= 56 + f_1 + f_2 = 56 + 25 + 24 = 105$. (05) [05]

வகுப்பாயிடை	நடுப்பெறுமானம் ($\bar{x}$)	மீழறன் (f)	$d = \frac{x - 50}{20}$	fd	fd^2
00 - 20	10	14	-2	-28	56
20 - 40	30	25	-1	-25	25
40 - 60	50	27	0	0	0
60 - 80	70	24	1	24	24
80 - 100	90	15	2	30	60
	Total	105		(05)	(05)(05)

$$\text{இடை} = 50 + 20\bar{d} = 50 + 20 \times \frac{1}{105} = 50 + \frac{4}{21} = 50.19 \text{ (05)} [10]$$

$$\text{மாறல் திறன்} = 20^2 \left\{ \frac{1}{105} \sum_{i=1}^5 f_i d_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^5 f_i d_i}{105} \right)^2 \right\} = \left(\frac{20}{105} \right)^2 (165 \times 105 - 1) = 17324 \left(\frac{4}{21} \right)^2$$

(05) (05) (05)

$$\text{நியம விலகல்} = \frac{4}{21} \sqrt{17324} = \frac{4 \times 131.62}{21} = 25.07 \text{ (05)} [25]$$

Aliter:

15. (a) Let $2a$ be the length of each of the rods.

Resolving forces vertically we have

$$2R \cos \alpha = 2W \Rightarrow R = W \sec \alpha$$

(05)

(05)

[10]

Taking moment about B in the anti-clockwise sense for the equilibrium of the rod AB we have

$$X \cdot 2a \cos \theta - W a \sin \theta = 0 \quad (05)$$

$$\text{i.e., } X = \frac{W}{2} \tan \theta \quad (05)$$

[10]

Resolving forces horizontally we have

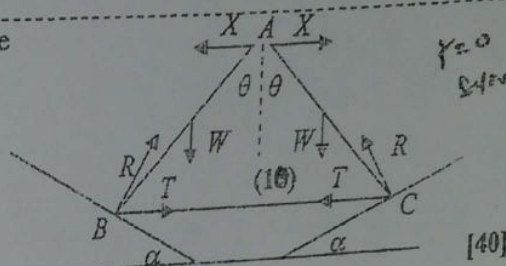
$$T + R \sin \alpha - X = 0 \quad (10)$$

$$T = -W \sec \alpha \sin \alpha + \frac{W}{2} \tan \theta$$

(05)

(05)

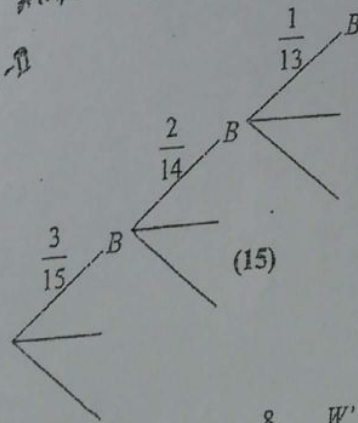
$$T = \frac{W}{2} (\tan \theta - 2 \tan \alpha) \quad (05)$$



Yes Symmetric

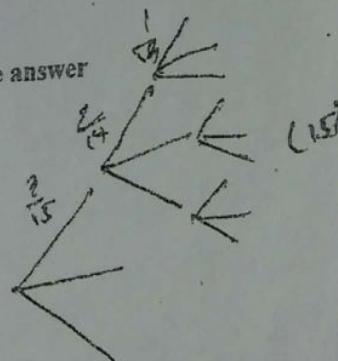
17. (a) (i)

Aliter,
m-II



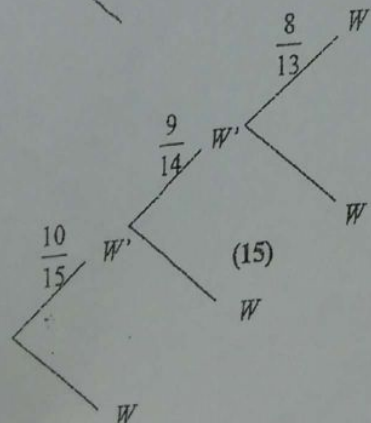
(05) for the answer

m-II
(05)



[20]

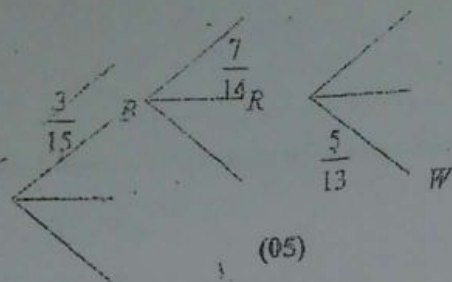
- (ii)



(05) for the answer

(iv).

(05) for the answer



(05)

இணைந்த கணிதம் II பகுதி A

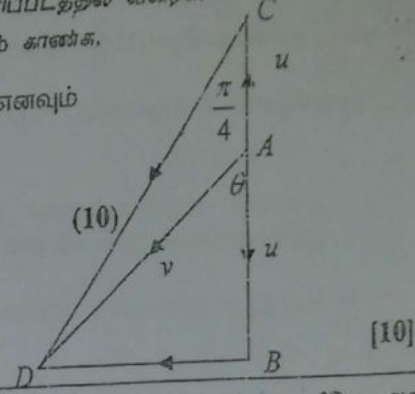
1. தெற்கு நோக்கி ஒரு நேரிய வீதி வழியே கதி $u \text{ km h}^{-1}$ உடன் ஓடுகின்ற சிறுவன் ஒருவன் காற்று மேற்கு நோக்கி வீசுவதை உணர்கின்றான். வடக்கு நோக்கி ஒரு நேரிய வீதி வழியே அதே கதியுடன் அவன் ஓடும்போது காற்று தென்மேற்கு நோக்கி வீசுவதை உணர்கின்றான். காற்றின் இயக்கங்களுக்கான தொடர்பு வேகங்களின் வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, காற்றின் உண்மைக் கதியையும் திசையையும் காண்க.

காற்றின் உண்மைக் கதி v எனவும், அதன் திசை θ எனவும் கொள்க.

$$DB = 2u \tan \frac{\pi}{4} = 2u \quad (05)$$

$$v = \sqrt{(2u)^2 + u^2} = \sqrt{5}u. \quad (05)$$

$$\tan \theta = \frac{2u}{u} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1} 2 \quad (05) \quad [15]$$

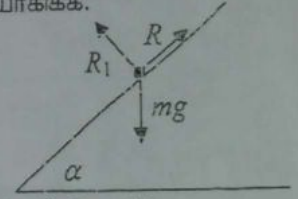


2. அதியுயர் சரிவுக் கோடு கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு சரிவு வழியே அதன் உச்சியில் ஓய்விலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை உச்சியிலிருந்து d தூரத்திற்குக் கீழ்நோக்கி இயங்குவதற்கு ஒரு செக்கன் எடுத்தால், துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு எதிரான தடை R மாறிலி எனக் கொண்டு, $R = m(g \sin \alpha - 2d)$ எனக் காட்டுக. அத்துடன், உச்சியிலிருந்து சென்ற தூரம் d ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகத்தையையும் காண்க.

துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு சாய்தளம் வழியே $F = ma$ யைப் பிரயோகிக்க.

$mg \sin \alpha - R = mf$, (05) இங்கு f துணிக்கையின் ஆர்முடுகல்.

$$f = g \sin \alpha - \frac{R}{m}.$$



சாய்தளம் வழியே துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$d = \frac{1}{2} \left(g \sin \alpha - \frac{R}{m} \right) t^2 \Rightarrow R = m(g \sin \alpha - 2d).$$

(05)

(05)

[15]

$$\therefore f = g \sin \alpha - (g \sin \alpha - 2d) = 2d \quad (05)$$

சாய்தளம் வழியே துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $v = u + at$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$v = 2d \cdot 1 \Rightarrow v = 2d \quad (05)$$

[10]

3. ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்திற்கு மேலே உயரம் h இல் உள்ள துணியை m க்கு உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருந்து விழுந்து, தளத்தில் அடித்து, பின்னர் பின்னடைத்கின்றது. மொத்தல் காரணமாக உண்டாகும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் இழப்பு $\frac{mgh}{4}$ எனின், துணிக்கைக்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை உயரம் $\frac{3h}{4}$ இற்குப் பின்னடைத்கின்றதெனக் காட்டுக.

தளத்தை மோதுவதற்கு சற்று முன் துணிக்கையின் வேகம் v என்க.

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (05)$$

தளத்தை மோதிய சற்றுப் பின் துணிக்கையின் வேகம் ev , (05) இங்கு e தளத்திற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான மீளமைவுக் குணகம்.

மொத்தல் காரணமாக இழக்கப்பட்ட இயக்கப்பாட்டு சக்தி

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(ev)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2(1-e^2) \Rightarrow \frac{mgh}{4} \\ &= mgh(1-e^2) = \frac{mgh}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (05) \quad [15] \end{aligned}$$

துணிக்கையின் மேல்நோக்கிய இயக்கத்திற்கு $v^2 = u^2 + 2as$ யைப் பிரயோகிக்க.

$0 = (ev)^2 - 2gs$, (05) இங்கு மோதிய பின் துணிக்கை அடைந்த உயரம் s

$$s = \frac{(ev)^2}{2g} = \frac{\frac{3gh}{4}}{2g} = \frac{3}{4}h. \quad (05)$$

[10]

4. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்கும்போது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் OP யிற்குச் செங்குத்தாக வேகம் $\sqrt{2gl}$ துணிக்கைக்குக் கொடுக்கப்படுகின்றது. சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, OP ஆனது கீழ்முன் நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஐ ஆக்கும்போது துணிக்கை P யின் வேகத்தைக் காண்க. இக்கணத்தில் இழையின் இழுலை $\frac{3}{2}mg$ எனக் காட்டுக.

சக்திக் காப்பு விதியினால்

$$\frac{1}{2}m(2gl) - mgl = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \frac{\pi}{3} \quad (10)$$

$$\therefore v = \sqrt{gl} \quad (05)$$

[15]

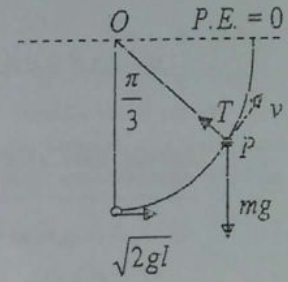
துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $F = ma$ யைப் PO திசையில் உபயோகிக்க.

$$T - mg \cos \frac{\pi}{3} = \frac{mv^2}{l} = mg \quad (05)$$

$$T - \frac{1}{2}mg = mg \quad \therefore v = \sqrt{gl} \quad (05)$$

$$T = \frac{3}{2}mg$$

[10]



5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$; இங்கு $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியன வழக்கமான சுருத்தை உடையன. $\mathbf{b}$ ஆனது, பருமன் $\sqrt{3}$ ஐ உடைய ஒரு காவியாகும். காலி $\mathbf{a}$ யிற்கும் காலி $\mathbf{b}$ யிற்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனின், $\mathbf{b}$ யை லடிவம் $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ யில் காண்க; இங்கு $x(<0)$, y ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, |\mathbf{b}| = \sqrt{3} \quad (05)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x + \sqrt{3}y = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}(1 - y) \quad (05)$$

$$x^2 + y^2 = 3(1 - y)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 4y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } \frac{3}{2} \quad (05)$$

$$y = 0 \text{ ஆக } x = \sqrt{3}.$$

$$y = \frac{3}{2} \text{ ஆக } x = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{எனவே } \mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} \quad (05)$$

[25]

6. நிறை W வையும் நீளம் $2a$ வையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB , அதன் முனை A ஒரு கரடான கிடைத் தரை மீதும் முனை B கோல் AB ஐயக் கொண்ட நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் இருக்குமாறு, நாப்பத்திலே இருக்கிறது. கோலிற்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ எனின், கோல் நழுவுந் தறுவாயில் இருக்கும்போது கோலின் கிடையுடனான சாய்வைக் காண்க.

கிடையாகக் துணிக்க $F = S$. (05)

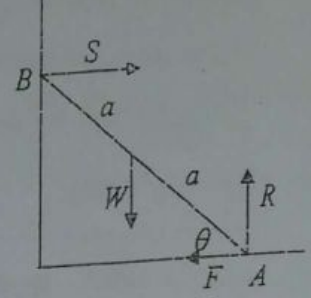
நிலைக்குத்தாக துணிக்க $R = W$ (05)

B பற்றிய திருப்புத் திறன்

$$Wa \cos \theta = S 2a \sin \theta \Rightarrow S = \frac{1}{2} W \cot \theta. (05)$$

$$\frac{F}{R} = \frac{1}{2} \cot \theta \leq \mu = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{6}} (05)$$

எனவே கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ஆகும் (05)



[25]

7. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் தம்முள் புறநீக்கும், யாவுமளாவிய (exhaustive) நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம்.

$P(A) = 2p, P(B) = p^2, P(C) = 4p - 1$ எனின், p யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$A \cup B \cup C = \Omega$ ஏனெனில் A, B, C யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்

$$P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1 (05)$$

ஆனால் $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ஏனெனில் A, B, C தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (05)

$$= 2p + p^2 + 4p - 1 = 1 (05)$$

$$\text{i.e., } p^2 + 6p - 2 = 0 \Rightarrow p = -3 \pm \sqrt{11} (05)$$

$p = -3 + \sqrt{11}$ ஏனெனில் p மறைப் பெறுமானம் கொண்டிருக்காது. (05)

[25]

8. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் மூன்று சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம்.
 $A, (B \cup C)$ ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் காட்டுக.

$$\begin{aligned}
 P\{A \cap (B \cup C)\} &= P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \quad (05) \\
 &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\} \quad (05) \\
 &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \quad A, B, C \text{ சாரா நிகழ்ச்சிகள்} \\
 &\quad \text{ஆகையால்} \quad (05) \\
 &= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B)P(C)\} \\
 &= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \quad (05) \\
 &= P(A)\{P(B \cup C)\} \quad (05)
 \end{aligned}$$

எனவே, A யும் $(B \cup C)$ யும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் [25]

9. 100 நோக்கல்களின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே 30, 4.1 எனக் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு நோக்கல் சரியான பெறுமானம் 30 இற்குப் பதிலாக 40 எனப் பிழையாகப் பதிவு செய்யப்பட்டிருப்பதாகப் பின்னர் காணப்பட்டுள்ளது. 100 நோக்கல்களின் சரியான இடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

$$\begin{aligned}
 \text{சரியான கூட்டுத்தொகை} &= 100 \times 30 - 40 + 30 = 2990. \quad (05) \\
 \therefore \text{சரியான இடை} &= \frac{2990}{100} = 29.9. \quad (05) \quad [10]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{சரியான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை} &= 100(4.1^2 + 30^2) - 40^2 + 30^2 \quad (05) \\
 &= 100(16.81 + 900) - 700 \\
 &= 91681 - 700 = 90981
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{சரியான மாறல் திறன்} = \frac{90981}{100} - 29.9^2 = 909.81 - 894.01 = 15.8 \quad (05)$$

$$\therefore \text{சரியான நியம விலகல்} = \sqrt{15.8} = 3.975 \text{ அல்லது } 3.97 \quad (05) \quad [15]$$

10. A, B என்னும் பாடசாலைகளில் அவற்றின் மாணவர்களுக்கு வழங்கப்பட்ட ஒரு சோதனைக்கான இடைய புள்ளிகள் முறையே 31, 45 ஆகும். பாடசாலை A யின் புள்ளிப் பரம்பலின் நியம விலகல் 5 ஆகும். பேறுகளை ஒப்பிடுவதற்குப் பாடசாலை B யின் இடையும் நியம விலகலும் பாடசாலை A யின் இடைக்கும் நியம விலகலிற்கும் சமமாகவும் பாடசாலை B யின் 85 புள்ளிகள் 63 புள்ளிகளாக அமையமாறும் ஒர் ஏகபரிமாண உருமாற்றத்தின் மூலம் பாடசாலை B யின் புள்ளிகள் அளவிடப்படுத்தப்படுகின்றன. ஏகபரிமாண நிலைமாற்றத்தைக் கண்டு, இதிலிருந்து, பாடசாலை B யின் புள்ளிப் பரம்பலின் தொடக்க நியம விலகலைக் காண்க.

$y = ax + b$ என்க, இங்கு x ஆரம்பப் புள்ளியாகவும் y மாற்றப்பட்ட புள்ளியாகவும் கொண்ட ஏகபரிமாண உருமாற்றம்.

$$63 = 85a + b \rightarrow (1) \quad (05)$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow 31 = 45a + b \rightarrow (2) \quad (05)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 40a = 32 \Rightarrow a = 0.8$$

$$(1) \text{ இலிருந்து } 31 = 45 \times 0.8 + b \Rightarrow b = -5.$$

$$\text{எனவே ஏகபரிமாண உருமாற்றம் } y = 0.8x - 5. \quad (05)$$

[15]

$$s.d. \text{ of } y = a \text{ s.d. of } x \Rightarrow 5 = \frac{4}{5} s.d. \text{ of } x \Rightarrow s.d. \text{ of } x = 6.25.$$

(05)

(05)

[10]

இணைந்த கணிதம் II பகுதி B

11. (a) ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி O இல் ஈர்ப்பின் கீழ் வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. நேரம் $\frac{u}{2g}$ இற்குப் பின்னர் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது புள்ளி O இல் ஈர்ப்பின் கீழ் வேகம் v ($> u$) உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. $\frac{u}{2g}$ ஆனது துணிக்கை P அடையும் மிக உயர்ந்த புள்ளியெனக் கொள்வோம். P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் புள்ளி A யில் சந்திக்கின்றன. P, Q ஆகிய துணிக்கைகளின் முழு இயக்கங்களுக்கும் உரிய வேக - நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இவ்வேக - நேர வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி

(i) $OA = \frac{u^2}{2g}$ என.

(ii) $v = \frac{5u}{4}$ எனவும் புள்ளி A யில் துணிக்கை Q வின் வேகம் $\frac{3u}{4}$ எனவும்,

(iii) துணிக்கை Q அதன் அதியுயர் புள்ளியை அடையும்போது புள்ளி O விலிருந்து துணிக்கை P யின் உயரம் $\frac{7u^2}{32g}$ எனக்

காட்டுக.

(b) திணிவு $M \text{ kg}$ ஐ உடைய ஒரு கார் சமதள வீதி ஒன்றில் எல்லாக் கதிகளிலும் மாறிலியாக இருக்கும் இயக்கத்திற்கான தடை R இற்கு எதிரே செல்கின்றது. எஞ்சினின் உயர்ந்தபட்ச வலு $H \text{ kW}$ ஆகவும் ஒரு சமதள வீதியில் காரின் உயர்ந்தபட்சக் கதி $v \text{ ms}^{-1}$ ஆகவும் இருப்பின், தடை R ஐ M, H, v ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்த ஒரு நேரிய வீதி வழியே

(i) கதி $\frac{v}{3} \text{ ms}^{-1}$ உடன் நேரே மேல்நோக்கி,

(ii) கதி $\frac{v}{2} \text{ ms}^{-1}$ உடன் நேரே கீழ்நோக்கி

இயங்கும்போது காரின் ஆர்முடுகலை M, H, v, g, α ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

சந்தர்ப்பம் (ii) இல் காரின் ஆர்முடுகல் சந்தர்ப்பம் (i) இல் காரின் ஆர்முடுகலின் இரு மடங்கொனின், $\sin \alpha$ வை M, H, v, g ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் வீதியிலே நேரே மேல்நோக்கிக் கார் செல்லும்போது அது அடையத்தக்க உயர்ந்த பட்சக் கதியை v யின் சார்பில் காண்க.

(a) (i) P எனும் துணிக்கை புள்ளி A யை

அடைய எடுத்த நேரம் T என்க

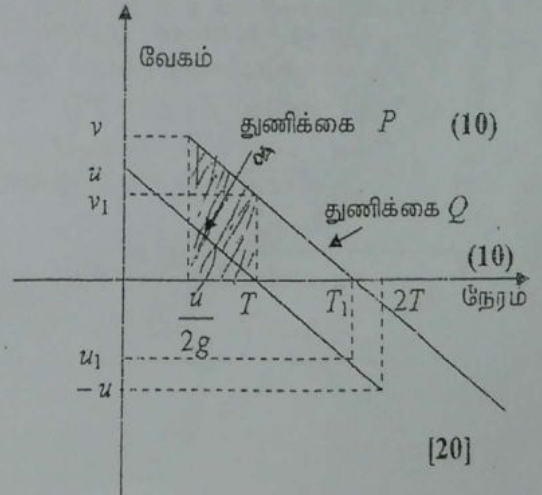
வரைபிலிருந்து $T = \frac{u}{g}$ (05)

மேலும் வரைபிலிருந்து

$OA = \frac{1}{2} uT = \frac{u^2}{2g}$.

(05)

[10]



(ii) புள்ளி A இல் துணிக்கை Q இனது வேகம் v_1 என்க

Q இன் வரைபில் இருந்து

$$\frac{v-v_1}{T-\frac{u}{2g}} = g \Rightarrow v_1 = v - g\left(T - \frac{u}{2g}\right) = v - \frac{u}{2} \rightarrow (1)$$

(05) (05)

மேலும் வரைபில் இருந்து

$$\left(\frac{v+v_1}{2}\right)\left(T - \frac{u}{2g}\right) = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow v+v_1 = 2u \rightarrow (2)$$

(05) (05)

$$(1), (2) \text{ இலிருந்து } v = \frac{5u}{4}, \quad v_1 = \frac{3u}{4}$$

(05)

(05)

[30]

(iii) துணிக்கை Q தனது அதி உயர் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் T_1 எனவும், இந்நேரத்தில் துணிக்கை P இன் வேகம் u_1 எனவும் கொள்க.

Q இன் வரைபில் இருந்து

$$T_1 - \frac{u}{2g} = \frac{v}{g} \Rightarrow T_1 = \frac{5u}{4g} + \frac{u}{2g} = \frac{7u}{4g} \text{ and } \frac{u_1}{T_1 - T} = -g \Rightarrow u_1 = -\frac{3u}{4}$$

(05) (05)

துணிக்கை Q ஆனது அதியுயர் புள்ளியில் உள்ள போது புள்ளி O இலிருந்து P இன் உயரம் h என்க.

வரைபில் இருந்து

$$h = \frac{1}{2}\left(u + \frac{3u}{4}\right)(2T - T_1) = \left(\frac{7u}{8}\right)\left(\frac{2u}{g} - \frac{7u}{4g}\right) = \frac{7u^2}{32g}$$

(05) (05)

[20]

(b) கதி உயர்வாக இருக்கையில் ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும்.

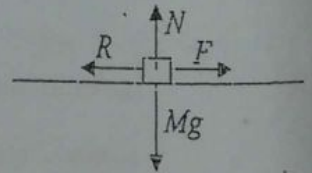
எனவே காரில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

எனவே $F - R = 0$. (05)

$$Fv = P \Rightarrow Fv = 10^3 H \Rightarrow F = \frac{10^3 H}{v} \text{ (05)}$$

$$\text{எனவே } R = \frac{10^3 H}{v} \text{ (05)}$$

[15]



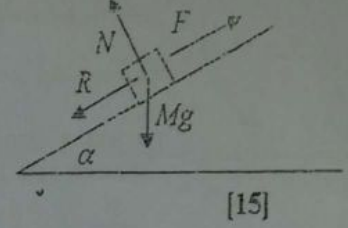
(i) தெருவில் கார் நேரே மேல் நோக்கி இயங்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் a என்க.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{3}} = \frac{3 \times 10^3 H}{v} \quad (05)$$

$$F - Mg \sin \alpha - R = Ma \quad (05)$$

$$\frac{3 \times 10^3 H}{v} - Mg \sin \alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma$$

$$a = \frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g \sin \alpha \quad (05)$$



[15]

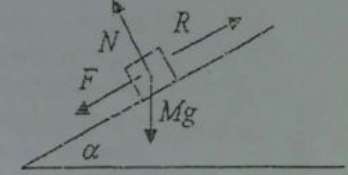
(ii) தெருவில் கார் நேரே கீழ்நோக்கி இயங்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் a' என்க.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{2}} = \frac{2 \times 10^3 H}{v} \quad (05)$$

$$F + Mg \sin \alpha - R = Ma' \quad (05)$$

$$\frac{2 \times 10^3 H}{v} + Mg \sin \alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma'$$

$$a' = \frac{10^3 H}{Mv} + g \sin \alpha \quad (05)$$



[15]

$$a' = 2a \Rightarrow \frac{10^3 H}{Mv} + g \sin \alpha = 2 \left(\frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g \sin \alpha \right) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{10^3 H}{Mgv} \quad (05) \quad (05) \quad (10)$$

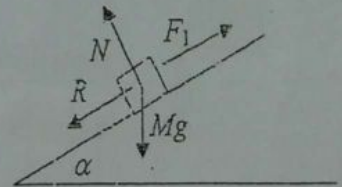
தெருவில் கார் நேரே மேல்நோக்கி இயங்கும் போது அதன் உயர் வேகத்தை v_1 என்க.

$$F_1 = \frac{10^3 H}{v_1} \quad (05)$$

உயர் வேகத்தின் போது ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும். எனவே காரில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

$$F_1 - Mg \sin \alpha - R = 0 \quad (05)$$

$$\frac{10^3 H}{v_1} - Mg \left(\frac{10^3 H}{Mgv} \right) - \frac{10^3 H}{v} = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2} \quad (05)$$



[15]

12. (a) ஒரு புள்ளி O விவிருந்து உயரம் k யில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C யில் கிடையுடன் கோணம் θ இல் சாய்ந்து வேகம் u உடன் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. புள்ளி O விவிருந்து எறியத் தளத்தில் உள்ள கிடைக் கோடு, நிலைக்குத்துக் கோடு ஆகியன முறையே Ox, Oy அச்சுகளைக் கொண்டு செங்கோணத் தொகுதி ஆனது. தொகுதி ஒன்றைக் கருதுவோம்.

நேரம் t யில் துணிக்கை புள்ளி (x, y) இல் இருக்குமெனின், $y = k + x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2}$ எனக் காட்டுக.

h நேராக இருக்கும் புள்ளி $A(0, h)$ இல் கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்வாக வேகம் v உடன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. அதே கணத்தில்

புள்ளி $B\left(0, \frac{h}{2}\right)$ இல் கிடையுடன் கோணம் $\beta (> \alpha)$ இல் சாய்வாக வேகம் w உடன் நிலைக்குத்துத்

தளத்தில் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் கிடைத் தூரம் d ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், $v \cos \alpha = w \cos \beta$ எனவும் $h = 2d(\tan \beta - \tan \alpha)$ எனவும் காட்டுக.

அத்துடன் இரு துணிக்கைகளும் சந்திப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{h}{2(w \sin \beta - v \sin \alpha)}$ எனவும் காட்டுக.

- (b) ஒரு கிடை நிலத்திலிருந்து 3 மீற்றர் உயரத்தில் இருக்கும் ஒரு சீலிங்குடன் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் இயங்கத்தக்க, இலேசான, ஒப்பமான சுப்பி P யின் கீழும் சீலிங்குடன் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான ஒப்பமான சுப்பியின் மேலாகவும் அனுப்பப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் திணிவு $M(> m)$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இயங்கத்தக்க சுப்பி P யும் துணிக்கை Q வும் நிலத்திலிருந்து முறையே $\frac{1}{2}$ மீற்றர், 1 மீற்றர் உயரங்களிலும் சுப்பிகளுடன் தொடுகையுறாத இழைப் பகுதிகள் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கும்போது தொகுதி ஒவ்வொன்று விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை Q வின் ஆர்முடுகளையும் இழையின் இழுவையையும் காண்க.

துணிக்கை Q நேரம் $\sqrt{\frac{4M+m}{2M-m}}$ செக்கனிற்குப் பின்னர் நிலத்தை அடையும் எனவும் சுப்பி P

நிலத்திலிருந்து உயரம் $\frac{1}{2} + \frac{3M}{4M+m}$ மீற்றருக்கு ஏறும் எனவும் காட்டுக.

- (a) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ நிலைக்குத்தாகப் பாவிக்க.

$$y - k = u \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow (1) \quad (10)$$

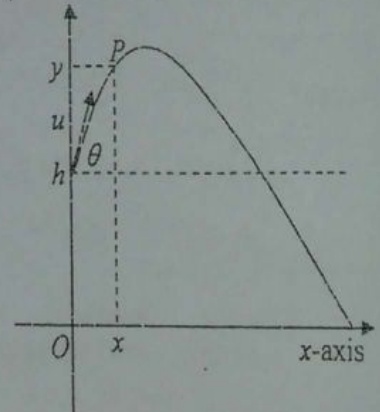
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ஐ கிடையாகப் பாவிக்க.}$$

$$x = ut \cos \theta \Rightarrow t = \frac{x}{u \cos \theta} \quad (05)$$

(1) இலிருந்து.

$$y - k = x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2} \quad (05)$$

$$y = k + x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2}$$



[20]

கிடையாக $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யை துணிக்கை P இற்கு
பாவிக்க.

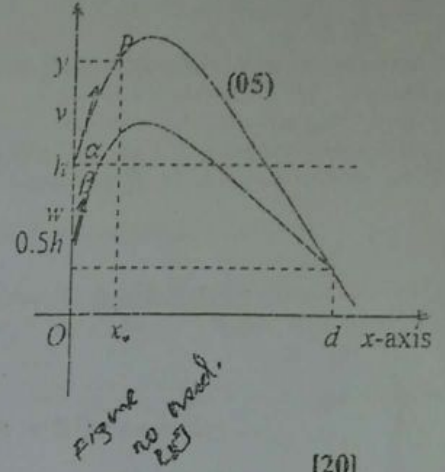
$d = vt_0 \cos \alpha \rightarrow (2)$. (05) இங்கு t_0 துணிக்கைகள்
சந்திக்க எடுக்கும் நேரம்.

கிடையாக $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யை துணிக்கை Q இற்கு
பாவிக்க.

$d = wt_0 \cos \beta \rightarrow (3)$. (05)

(2), (3) இருந்து

$v \cos \alpha = w \cos \beta$ (05)



[20]

முதல் பகுதியில் துணிக்கை P இன் இயக்கத்திற்கு பெறப்பட்ட முடிவை உபயோகிக்க.

$y_0 = h + d \tan \alpha - \frac{gd^2 \sec^2 \alpha}{2v^2} \rightarrow (4)$, (05) இங்கு y_0 துணிக்கைகள் சந்திக்கும்
புள்ளியின் உயரமாகும்.

முதல் பகுதியில் துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு பெறப்பட்ட முடிவை உபயோகிக்க.

$y_0 = \frac{h}{2} + d \tan \beta - \frac{gd^2 \sec^2 \beta}{2w^2} \rightarrow (5)$ (05)

(4), (5) இலிருந்து $h + d \tan \alpha = \frac{h}{2} + d \tan \beta \Rightarrow h = 2d(\tan \beta - \tan \alpha)$

(05)

[15]

$d = \frac{h}{2(\tan \beta - \tan \alpha)} = \frac{h \cos \alpha \cos \beta}{2(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta)} = \frac{h}{2(w \sin \beta - v \sin \alpha)}$ (05)

i.e., $t_0 = \frac{h}{2w \left(\sin \beta - \sin \alpha \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \right)} = \frac{h}{2w \left(\sin \beta - \sin \alpha \left(\frac{v}{w} \right) \right)} = \frac{h}{2(w \sin \beta - v \sin \alpha)}$

(05)

(05)

[15]

(b) துணிக்கை Q இன் ஆர்முடுகலை a என்க.

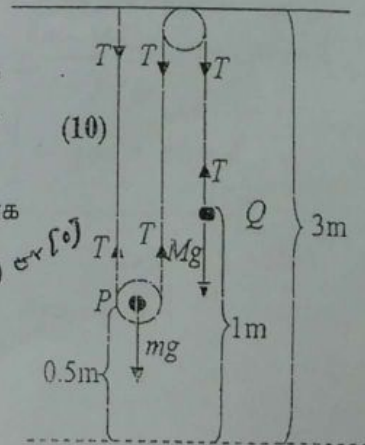
துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக
கீழ்நோக்கி $F = ma$ யைப் பிரயோகிக்க.

$Mg - T = Ma \rightarrow (1)$ (05)

கப்பி P இற்கு $F = ma$ யை நிலைக்குத்தாக

மேல்நோக்கி பிரயோகிக்க $2T - mg = m \frac{a}{2} \rightarrow (2)$ (10)

10



$$(1) \times 2 + (1), 2Mg - mg = \left(2M + \frac{m}{2}\right)a$$

$$i.e., a = \frac{\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)g}{2} \quad (05)$$

[30]

$$(1) \text{ இலிருந்து, } T = Mg - Ma = Mg \left\{ 1 - 2 \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) \right\} = \frac{3mMg}{4M + m}$$

(05)

(05)

[10]

துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$1 = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{2(2M - m)}{4M + m} \right) g t_0^2, \quad (10) \text{ இங்கு } t_0 \text{ நிலைத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம்.}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{4M + m}{(2M - m)g}} \text{ seconds.}$$

[10]

t_0 எனும் நேரத்தில் கப்பி P உயரும் உயரத்தை h_0 என்க.

மேல்நோக்கி துணிக்கை P இன் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பாலிக்க.

$$h_0 = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) \left(\frac{4M + m}{2M - m} \right) = \frac{1}{2} \text{ meters. (05)}$$

t_0 நேரத்தில் கப்பி P வேகம் v என்க.

கப்பி P இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி $v = u + at$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$v = 0 + \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) g \sqrt{\frac{4M + m}{2(M - m)g}} = \sqrt{\left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) g} \quad (05)$$

(05)

(05)

Q நிலத்தை அடைந்த பின்னர் கப்பி P உயரும் உயரத்தை h_1 என்க.

Q நிலத்தை அடைந்த பின்னர் கப்பி P இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக

மேல்நோக்கி $v^2 = u^2 + 2as$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$(05) 0 = \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) g - 2gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) \quad (05)$$

$$\text{மொத்த உயரம்} = \frac{1}{2} + h_0 + h_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2M - m}{4M + m} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3M}{4M + m} \text{ metres. (05)[30]}$$

13. A, B எப்போது ஒரே இடப்பாடான விடை மேலாக மீது இடைத்த தூரம் $8l$ இல் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். திணிவு m உடைய ஒரே இடப்பாடான துணிக்கை P ஆனது A மற்றும் B யிற்குமிடையே AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் $3l$ லும் மீள்தன்மை மட்டு 4λ வையம் உடைய ஒரே இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி A உடனும் இயற்கை நீளம் $2l$ லும் மீள்தன்மை மட்டு λ வையம் உடைய ஒரே இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி B உடனும் துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது ஒரு புள்ளி C யிலே நுழைந்ததில் இருக்குமெனின், $AC = \frac{42}{11}l$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது AB யின் நடுப் புள்ளி M இல் வைக்கப்பட்டு, பின்னர் ஒய்கிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. துணிக்கை P ஆனது AB வழியே புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கும்போது இரு இழைகளினதும் இழுவிசைகள் பெறுக.

$\frac{40}{11}l \leq x \leq 4l$ இற்குத் துணிக்கை P யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி, வழக்கமான குறிப்பிட்டி.ல்

$$\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml} \left(x - \frac{42}{11}l \right) = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$y = x - \frac{42}{11}l \text{ என எழுதுவதன் மூலம் } \ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml} y = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ வைய உடையதெனக் கொண்டு A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் $\frac{41}{11}l$ இல் இருக்கும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை P, C இல் இருக்கும் போது AP

இழையில் இழுவை T என்க.

துணிக்கை P, C இல் இருக்கும் போது PB

இழையில் இழுவை T' என்க.

ஊக்கின் விதியினால்

$$T = \left(\frac{AC - 3l}{3l} \right) 4\lambda, \quad T' = \left(\frac{8l - AC - 2l}{2l} \right) \lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l} \right) \lambda.$$

(10)

(10)

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி C இல் நுழைந்ததில் இருக்குமெனின்,

$$T = T' \Rightarrow \left(\frac{AC - 3l}{3l} \right) 4\lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l} \right) \lambda \Rightarrow 11AC = 42l \Rightarrow AC = \frac{42}{11}l.$$

(05)

(05)

(05)

[40]

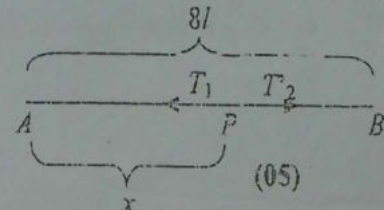
துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது AP இல் உள்ள இழுவையை T_1 என்க.

துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது BP இல் உள்ள இழுவையை T_2 என்க.

ஊக்கின் விதியினால்.

$$T_1 = \left(\frac{x - 3l}{3l} \right) 4\lambda \quad (05)$$

$$T_2 = \left(\frac{8l - x - 2l}{2l} \right) \lambda = \left(\frac{6l - x}{2l} \right) \lambda \quad (05)$$



துணிக்கை P இற்கு AB வழியே நியூட்டனின் விதியை பிரயோகிக்க

$$T_2 - T_1 = m\ddot{x}$$

(16)

$$\text{i.e., } \left(\frac{6l-x}{2l} \right) \lambda - \left(\frac{x-3l}{3l} \right) 4\lambda = m\ddot{x} \quad (15)$$

$$\text{i.e., } m\ddot{x} + \frac{\lambda}{l} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) x - 7\lambda = 0 \quad (05)$$

$$\text{i.e., } \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml} x - \frac{7\lambda}{m} = 0$$

$$\text{i.e., } \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml} \left(x - \frac{42}{11} l \right) = 0 \quad (05) \quad [40]$$

$$y = x - \frac{42}{11} l \text{ என்க.}$$

$$\dot{y} = \dot{x}, \quad \ddot{y} = \ddot{x} \quad (05)$$

$$\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml} y = 0 \rightarrow (1) \quad (05) \quad [10]$$

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \rightarrow (2).$$

$$\dot{y} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \rightarrow (3).$$

$$x = 4l, \quad \dot{x} = 0 \text{ at } t = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{11} l, \quad \dot{y} = 0 \text{ at } t = 0 \text{ இல் } (05)$$

$$\text{எனவே } (2) \Rightarrow A = \frac{2}{11} l, \quad (3) \Rightarrow B = 0.$$

(05)

(05)

$$\therefore y = \frac{2}{11} l \cos \omega t \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{2}{11} l \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y.$$

$$(1) \text{ உடன் ஒப்பிட } \omega^2 = \frac{11\lambda}{6ml} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}. \quad (05) \quad [20]$$

$$y = \frac{2}{11} l \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t \right), \quad -\frac{2}{11} l \leq y \leq \frac{2}{11} l \text{ இல் } (05) \quad \text{No need}$$

$$x = \frac{42}{11} l + \frac{2}{11} l \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t \right), \quad \frac{40}{11} l \leq x \leq 4l \text{ இல் } (05) \quad \text{No need}$$

துணிக்கை P ஆனது $x = \frac{41}{11} l$ என்னும் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் t_0 என்க.

$$\frac{2}{11} \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t_0 \right) = \frac{41}{11} - \frac{42}{11} \Rightarrow \cos \left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}} t_0 \right) = -\frac{1}{2}.$$

(05)

(05)

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0 = \frac{2\pi}{3} \quad (05)$$

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t\right), \frac{40}{11}l \leq x \leq 4l \quad (05)$$

இப்புள்ளியில் துணிக்கை P இன் வேகம்

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0\right) = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\lambda l}{22m}} \quad (05)$$

(05)

[40]

14. (a) A, B ஆகியன ஒரு புள்ளி O உடன் ஒரே கோட்டில்லாத இரு வேறுவேறான புள்ளிகளைக் கொள்ளோம். புள்ளி O குறித்து A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே a, b ஆகும். D ஆனது AB மீது $BD = 2DA$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளியெனின், புள்ளி O குறித்துப் புள்ளி D யின் தானக் காவி $\frac{1}{3}(2a+b)$ எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{BC} = ka$, ($k > 1$) ஆகவும் O, D, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலும் இருப்பின், k யின் பெறுமானத்தையும் விவரித்து $OD : DC$ வையும் காண்க.

$\overrightarrow{AC}$ க்கு a, b ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

அத்துடன் AC யிற்குச் சமந்தரமாகப் புள்ளி O விஜயடாகச் செல்லும் கோடு E யில் AB வையச் சந்திக்குமெனின், $6DE = AB$ எனக் காட்டுக.

- (b) Ox, Oy என்னும் செங்கோணத் தொகாட்டின் அச்சுகள் குறித்து A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(\sqrt{3}, 0)$, $(0, -1)$, $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1)$ ஆகும். $6P, 4P, 2P, 2\sqrt{3}P$ நியூற்றன் என்னும் பருமன்களை உடைய விசைகள் முறையே OA, BC, CA, BO ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

விளையுளின் தாக்கக் கோடு y-அச்சை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசையில் $6\sqrt{3}P$ நியூற்றன் பருமனுள்ள வேறொரு விசை தொகுதிக்குப் பகுத்தப்பட்டுள்ளது. தொகுதி $10P$ நியூற்றன் மீற்றர் பருமனுள்ள ஓர் இணையாக ஒடுக்கப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$$(a) \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = a + \frac{1}{3}(b-a) = \frac{1}{3}(2a+b) \quad (05) \quad (05) \quad [15]$$

$$\overrightarrow{OC} = b + ka \quad (05)$$

O, D, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே

நேர்கோட்டில் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OC}$, இங்கு λ ஒரு பரமானம்

$$\text{i.e., } \frac{1}{3}(2a+b) = \lambda(b+ka) \quad (05)$$

$$(3\lambda k - 2)a + (3\lambda - 1)b = 0$$

a, b இரு சமாந்தரமற்ற காவிகள் ஆகையால்

$$3\lambda k - 2 = 0, 3\lambda - 1 = 0 \quad (05) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \quad (05), k = 2. \quad (05) \quad [20]$$

$$\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OC} \Rightarrow OD = \frac{1}{3}OC \Rightarrow OD = \frac{1}{3}(OD + DC) \Rightarrow 2OD = DC \Rightarrow OD : DC = 1 : 2$$

$$\frac{1}{2} \quad (05)$$

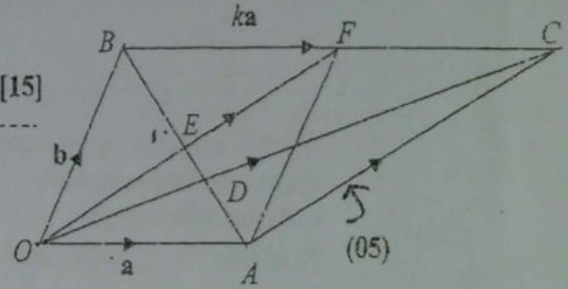
$$(05)$$

$$(05)$$

$$(05) \quad [20]$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = b + 2a$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -a + (b + 2a) = a + b \quad (05)$$



OE எனும் கோட்டினை நீட்டித்து BC யை F இல் சந்திக்கின்றது.

$OACF$ ஓர் இணைகரம் ஏனெனில் OE சமாந்தரம் AC

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC} = a + b \quad (05)$$

எனவே, $OAFB$ ஓர் இணைகரம்

ஆகவே, AB இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். (05)

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}(b-a) + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{6}(b-a) \quad (05)$$

$$6\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 6DE = AB \quad [20]$$

(b) Ox திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$X = 6P + 4P \cos \frac{\pi}{3} + 2P \cos \frac{\pi}{3} = 9P \quad (10)$$

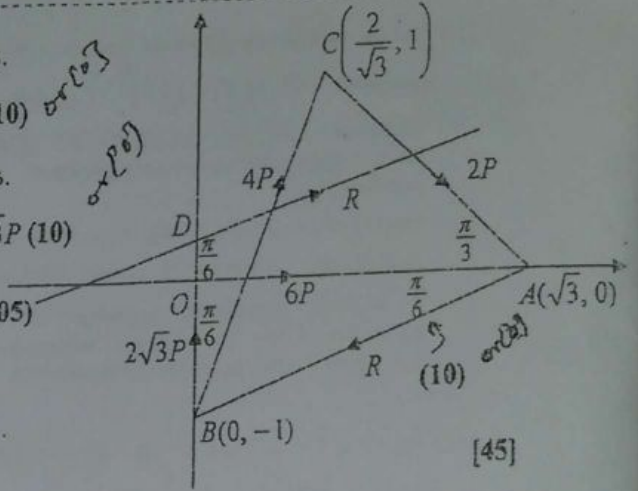
Oy திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$Y = 2\sqrt{3}P + 4P \sin \frac{\pi}{3} - 2P \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}P \quad (10)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{81 + 27}P = 6\sqrt{3}P \quad (05)$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} = \frac{3\sqrt{3}P}{9P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (05)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (05)$$



$OD = d$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி D

இனூடாக விளையுள் விசை

தாக்குவதாகக் கருதுக.

இடஞ்சுழியாக D பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$4P \cos \frac{\pi}{3} \times (d+1) + 6P \times d + 2P \cos \frac{\pi}{3} \times d - 2P \sin \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} = 0 \quad (10)$$

$$2 \times (d+1) + 6 \times d + 1 \times d - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{9} \quad (05)$$

O இனூடாக செல்லும் தெக்காட்டு ஆள்கூற்று அச்சக்கள் குறித்து, விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டில் உள்ள மாறும் புள்ளி (x, y) என்க.

$$\frac{y-d}{x} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow y - \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow 9y - 3\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (05)$$

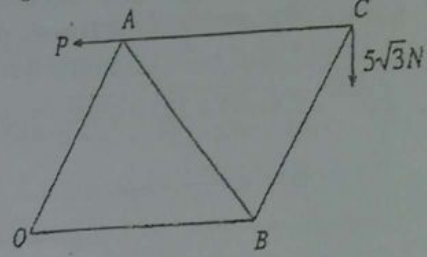
தொகுதியின் விளையுளும், AB வழியே புகுத்தப்பட்ட விசையும் சம பருமனும் எதிர்த்திசையிலும் இருப்பதனால் தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்கும். எனவே இணையின் பருமன்

$$(05) \quad 6\sqrt{3}P \times \left(1 + \frac{1}{9}\right) \sin \frac{\pi}{3} = 10P \text{ newton metres} \quad (05)$$

15. (a) ஒவ்வொன்றிலும் நிறை W ஆகவுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீரான சம கோல்கள் A யிலே சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை B, C ஆகிய முனைகள் ஒரே இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்துள்ள இரு ஒப்பமான தளங்களின் மீது B, C ஆகிய முனைகள் இருக்குமாறு கோல்கள் ஒரு நிலைத்துக்குத் தளத்திலே நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன; BC ஆனது கிடையாக இருக்கும் அதே வேளை BC யிற்கு மேலே A உள்ளது. B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

$\tan \theta > 2 \tan \alpha$ எனின், இழையின் இழுவை $\frac{1}{2} W(\tan \theta - 2 \tan \alpha)$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\hat{BAC} = 2\theta$.
மூட்டு A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

- (b) OA, OB, AC, AB, BC என்னும் ஐந்து இலேசான சம கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் O இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை C யில் $5\sqrt{3}$ நியூற்றன் நிறையைக் காவுகின்றது. OB கிடையாக இருக்குமாறு A யில் P நியூற்றன் என்னும் ஒரு கிடை விசையினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.



- (i) P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) O இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.
(iii) போவின் குறிப்பிட்டப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.

- (a) ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளம் $2a$ என்க.

நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$$2R \cos \alpha = 2W \Rightarrow R = W \sec \alpha$$

(05)

(05)

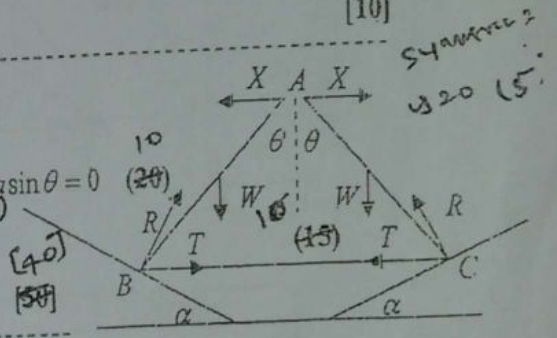
[10]

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு இடஞ்சுழியாக A பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$T \cdot 2a \cos \theta + R \sin \alpha \cdot 2a \cos \theta + W \sin \theta \cdot 2a \sin \theta - R \cos \alpha \cdot 2a \sin \theta = 0$$

$$2T + 2W \tan \alpha + W \tan \theta - 2W \cdot \tan \theta = 0 \quad (10) \text{ or } (10)$$

$$T = \frac{W}{2} (\tan \theta - 2 \tan \alpha) \quad (05)$$



கோல் AB இன் சமநிலைக்கு இடஞ்சுழியாக B பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$X \cdot 2a \cos \theta - W \sin \theta = 0 \quad (05)$$

$$\text{i.e., } X = \frac{W}{2} \tan \theta \quad (05)$$

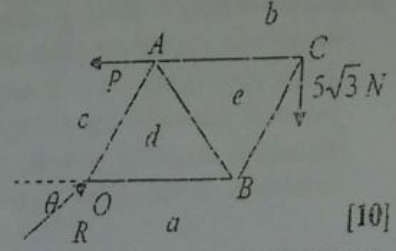
[10]

(b) யாதேனும் ஒரு கோலின் நீளத்தை $2a$ என்க.

O பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$P \cdot 2a \sin \frac{\pi}{3} - 5\sqrt{3} \cdot \left\{ 2a + 2a \cos \frac{\pi}{3} \right\} = 0 \quad (05)$$

$$P = 15 \text{ N}. \quad (05)$$



[10]

O இல் உள்ள மறுதாக்கம் R எனவும் கிடையுடன் R அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொள்க.

நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$$R \sin \theta = 5\sqrt{3}. \quad (05)$$

கிடையாகக் விசைகளைத் துணிக்க.

$$R \cos \theta = P = 15. \quad (05)$$

$$R = \sqrt{75 + 225} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ N}. \quad (05)$$

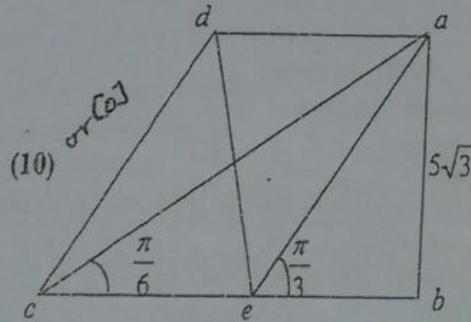
$$\tan \theta = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (05)$$

[20]

எனவே O இல் மறுதாக்கம் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

தகைப்பு வரிப்படம்:

15



[10]

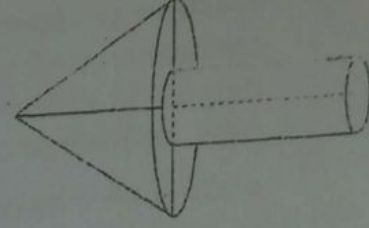
கோல்	தகைப்பு	பருமன்
OA	உதைப்பு	10N
OB	உதைப்பு	10N
AC	இழுவை	5N
AB	இழுவை	10N
BC	உதைப்பு	10N

(25)
(20)

(25)
(20)

50
[40]

16. உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம், அதன் சமச்சீர்த் திணிவு, கூம்பின் அடியிலிருந்து தூரம் $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.



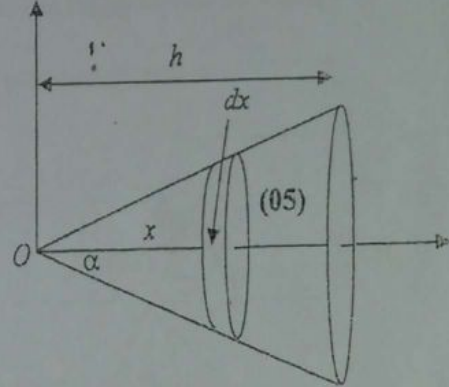
உருவில்க் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சீரான திண்மச் சேர்த்திப் பொருள் ஒருமிக்க நிலைப்படுத்தப்பட்ட அடி ஆரை $3r$ ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பையும் ஆரை r ஐயும் உயரம் $2h$ ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையையும் கொண்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம், அதன் சமச்சீர்த் திணிவு, கூம்பின் உச்சியிலிருந்து தூரம் $\frac{5}{4}h$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஒரு நுனி ஒரு சீவிற்குடனும் மற்றைய நுனி கூம்பின் வட்ட அடியின் பரிதி மீது உள்ள ஒரு புள்ளி A யிலும் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் சேர்த்திப் பொருள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்கிக்கொண்டு இருக்கின்றது.

சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீர்த் திணிவு கீழ்க்கு நிலைக்குத்துடன் கோணம் α வை ஆக்குமெனின், $\tan \alpha = \frac{12r}{h}$ எனக் காட்டுக.

கூம்பின் உச்சியில் சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீர்த் திணிவு ஒரு விசை P யைப் பிரயோகிப்பதன்மூலம் சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீர்த் திணிவு கிடையாக இருக்குமாறு சேர்த்திப் பொருள் நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. விசை P யையும் இழையின் இழுவையையும் W, α ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க; இங்கு W ஆனது சேர்த்திப் பொருளின் நிறையாகும்.

சமச்சீரினால் திண்ம கூம்பின் புவியீர்ப்புமையம் சமச்சீர் அச்சில் இருக்கும் (05)
உச்சி O இலிருந்து திண்மக் கூம்பின் ஈர்ப்பு மையம் $\bar{x}$ தூரத்தில் உள்ளது என்க.
 ρ திண்மக் கூம்பின் அடர்த்தி என்க.



$$\frac{1}{3}\pi(h \tan \alpha)^2 h \rho \bar{x} \quad (05)$$

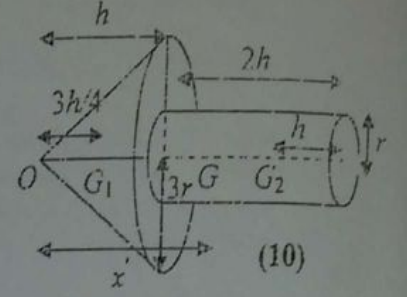
$$= \int_0^h \pi(x \tan \alpha)^2 x \rho dx \quad (15)$$

$$\text{i.e. } \frac{1}{3}h^3 \bar{x} = \int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4}h. \quad (05)$$

எனவே துணிக்கையின் ஈர்வை மையம் சமச்சீர் அச்சின் வழியே அடியிலிருந்து $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கும். (05)

[40]

சமச்சீரினால் திண்ம செவ்வட்ட உருளையின் திணிவுமையம் சமச்சீர் அச்ச வழியே கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து $2h$ தூரத்தில் இருக்கும். (05)
முதல் பகுதியிலிருந்து திண்மக் கூம்பின் திணிவுமையம் கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து சமச்சீர் அச்ச வழியே $\frac{3h}{4}$ தூரத்தில் இருக்கும்.



(05)

சேர்த்தி உடலின் திணிவு மையம் சமச்சீர் அச்ச வழியே கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து x' தூரத்தில் உள்ளது.

$$\left(\pi r^2 (2h) + \frac{1}{3} \pi (3r)^2 h \right) \rho x' = \left(\pi r^2 (2h) \right) (2h) \rho + \left(\frac{1}{3} \pi (3r)^2 h \right) \rho \left(\frac{3h}{4} \right) \quad (05), (05) \text{ சரியான சமன்பாட்டுக்கு}$$

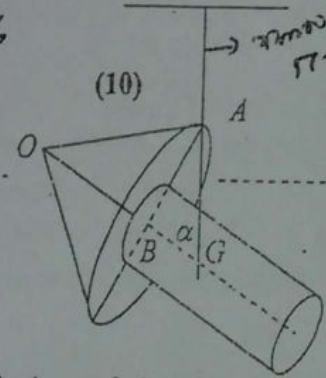
$$5x' = 4h + \frac{9}{4}h \Rightarrow x' = \frac{5}{4}h \quad (05)$$

[50]

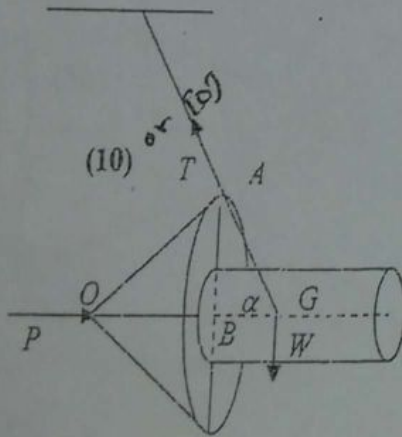
$$AB = 3r, BG = OG - OB = \frac{5h}{4} - h = \frac{h}{4} \quad (05)$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BG} = \frac{12r}{h} \quad (05)$$

பல பாய்வு வரலட்சு



[20]



இலாமியின் தேற்றத்தை பிரயோகிக்க.

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{T}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{W}{\sin(\pi - \alpha)} \quad (15)$$

$$\frac{P}{\cos \alpha} = T = \frac{W}{\sin \alpha} \quad (05)$$

$$P = W \cot \alpha \quad (05), T = W \operatorname{cosec} \alpha \quad (05)$$

[40]

↑ மாதிரிப் பல் வரலட்சு [5] பற்றித் தகவல்

17. (a) ஒரு பையில் இயல்பொத்த 5 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் 7 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து பிரதிபலிப்பு இல்லாமல் மூன்று பந்துகள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றன.
- (i) எல்லா மூன்று பந்துகளும் கறுப்புப் பந்துகளாக இருப்பதற்கான,
 - (ii) அம்மூன்று பந்துகளில் எதுவும் வெள்ளைப் பந்தாக இராமைக்கான,
 - (iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்கான,
 - (iv) பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான,
 - (v) அம்மூன்று பந்துகளும் கறுப்பு, சிவப்பு, வெள்ளை என்னும் வரிசையில் எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

- (b) ஒரு குறித்த வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களுக்குப் புள்ளிவிவரவியலிலான ஒரு வினாத்தாள் கொடுக்கப் படுகின்றது. இம்மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வரும் கூட்டமாகிய மீடறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளி வீச்சு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
00 - 20	14
20 - 40	f_1
40 - 60	27
60 - 80	f_2
80 - 100	15

அட்டவணையில் 20 - 40, 60 - 80 என்னும் புள்ளி வீச்சுகளின் மீடறன்கள் தவறியுள்ளன. எனினும் கூட்டமாகிய மீடறன் பரம்பலின் ஆகாரமும் இடையமும் முறையே 48, 50 என அறியப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணையில் இரு தவறியுள்ள மீடறன்களையும் கணிக்க.

இதிலிருந்து, புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளுக்குத் தோற்றிய மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைப் பெறுக.

கூட்டமாகிய மீடறன் பரம்பலின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

$$(a) (i) \quad P(BBB) = P(B)P(B|B)P(B|BB) = \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{455}$$

(05) (10) (05) [20]

$$\text{அல்லது } P(BBB) = \frac{{}^3C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{3!}{15 \times 14 \times 13} = \frac{1}{455}$$

(10) (05) (05) [20]

$$(ii) \quad P(W'W'W') = P(W')P(W'|W')P(W'|W'W') = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

(05) (10) (05) [20]

$$\text{அல்லது } P(WWW) = \frac{{}^{10}C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{15 \times 14 \times 13} = \frac{24}{91}$$

(10) (05) (05)

[20]

(iii) $P(\text{குறைந்தது ஒரு வெள்ளைப் பந்தேனும் இருத்தல்}) = 1 - P(\text{மூன்றும் வெள்ளைப் பந்தாக இராமை.})$ (05)

$$= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

(05) (05)

[15]

(iv) $P(\text{பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்கள்}) = \frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1 \times {}^7C_1}{{}^{15}C_3} = \left(\frac{5 \times 3 \times 7}{15 \times 14 \times 13} \right) 3! = \frac{3}{13}$

(05)

(05)

(05)

[15]

(v) $P(BRW) = P(B)P(R|B)P(W|BR) = \frac{3}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{1}{26}$

(05)

(05)

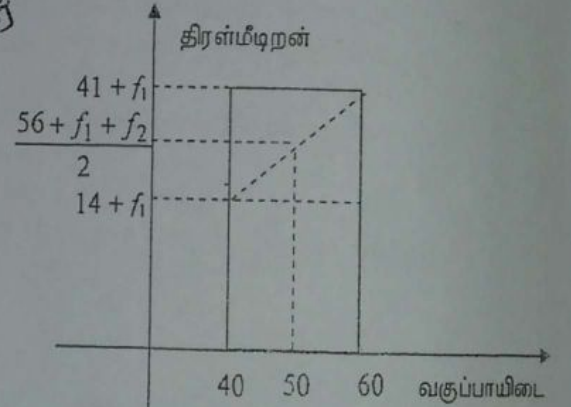
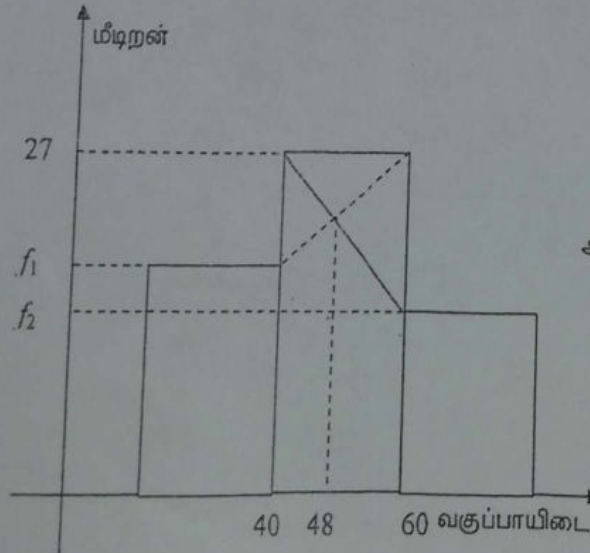
[10]

(b) இடையம் = 50 $\therefore$ இடைய வகுப்பு 40-60.

$$14 + f_1 + \frac{27}{20} \times 10 = \frac{56 + f_1 + f_2}{2} \quad (10)$$

$$28 + 2f_1 + 27 = 56 + f_1 + f_2$$

$$\text{i.e., } f_1 - f_2 = 1 \rightarrow (1)$$



ஆகாரம் = 48 $\therefore$ ஆகார வகுப்பு 40-60.

$$\frac{27 - f_1}{27 - f_2} = \frac{48 - 40}{60 - 48} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad (10)$$

$$\text{i.e., } 3f_1 - 2f_2 = 27 \rightarrow (2)$$

(1), (2) இலிருந்து

$$f_1 = 25 \quad (05), f_2 = 24. \quad (05)$$

[30]

புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளுக்கு தோற்றிய மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை.
 $= 56 + f_1 + f_2 = 56 + 25 + 24 = 105$. (05) [05]

வகுப்பாயிடை	நடுப்பெறுமானம் ($\bar{x}$)	மீழறன் (f)	$d = \frac{x - 50}{20}$	fd	fd^2
00 - 20	10	14	-2	-28	56
20 - 40	30	25	-1	-25	25
40 - 60	50	27	0	0	0
60 - 80	70	24	1	24	24
80 - 100	90	15	2	30	60
	Total	105		(05)	(05)(05)

$$\text{இடை} = 50 + 20\bar{d} = 50 + 20 \times \frac{1}{105} = 50 + \frac{4}{21} = 50.19 \text{ (05)} [10]$$

$$\text{மாறல் திறன்} = 20^2 \left\{ \frac{1}{105} \sum_{i=1}^5 f_i d_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^5 f_i d_i}{105} \right)^2 \right\} = \left(\frac{20}{105} \right)^2 (165 \times 105 - 1) = 17324 \left(\frac{4}{21} \right)^2$$

(05) (05) (05)

$$\text{நியம விலகல்} = \frac{4}{21} \sqrt{17324} = \frac{4 \times 131.62}{21} = 25.07 \text{ (05)} [25]$$

Aliter:

15. (a) Let $2a$ be the length of each of the rods.

Resolving forces vertically we have

$$2R \cos \alpha = 2W \Rightarrow R = W \sec \alpha$$

(05)

(05)

[10]

Taking moment about B in the anti-clockwise sense for the equilibrium of the rod AB we have

$$X \cdot 2a \cos \theta - W a \sin \theta = 0 \quad (05)$$

$$\text{i.e., } X = \frac{W}{2} \tan \theta \quad (05)$$

[10]

Resolving forces horizontally we have

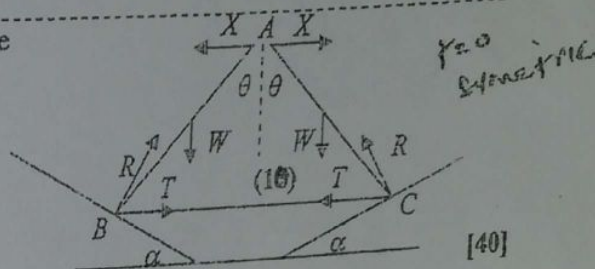
$$T + R \sin \alpha - X = 0 \quad (10)$$

$$T = -W \sec \alpha \sin \alpha + \frac{W}{2} \tan \theta$$

(05)

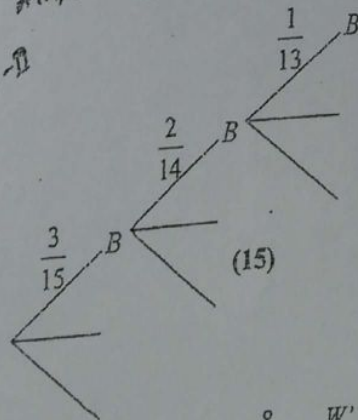
(05)

$$T = \frac{W}{2} (\tan \theta - 2 \tan \alpha) \quad (05)$$



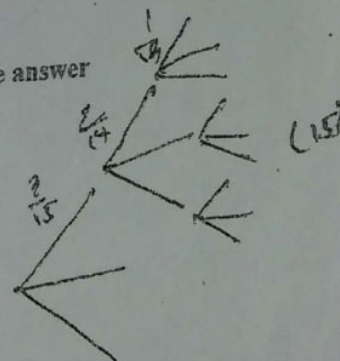
17. (a) (i)

Aliter,
m-II

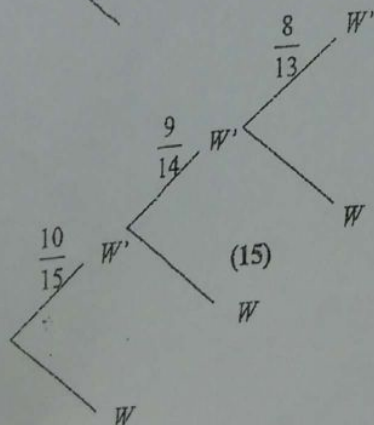


(05) for the answer

m-II
(05)



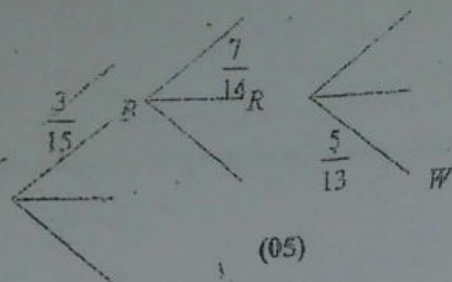
- (ii)



(05) for the answer

(iv).

(05) for the answer



(05)