අ
அந்தரங்கமானது

NEW/OLD

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த. (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2020

10 - இணைந்த கணிதம் I

புதிய / பழைய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துகளுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2020

10 - இணைந்த கணிதம்

(புதிய / பழைய பாடத்திட்டம்)

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பகுதி I

பகுதி A	10 × 25	=	250
பகுதி B	05 × 150	=	750

மொத்தம்	=	1000/10
வினாத்தாள் I மொத்தப் புள்ளி	=	100

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடபட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

o o o

புதிய பாடத்திட்டம்

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ என நிறுவுக.

$n = 1$ இற்கு இ. கை.ப. = 4 + 1 = 5, வ.கை.ப. = 1 (2 + 3) = 5

$\therefore n = 1$ இற்குப் பேறு உண்மையானது 5

யாதாயினும் $k \in \mathbb{Z}^+$ ஐ எடுத்து $n = k$ இற்குப் பேறு உண்மையானதெனக் கொள்வோம்.

அ - து. $\sum_{r=1}^{k}(4r+1) = k(2k+3)$ 5

இப்போது $\sum_{r=1}^{k}(4r+1) = \sum_{r=1}^{k}(4r+1) + \{4(k+1)+1\}$

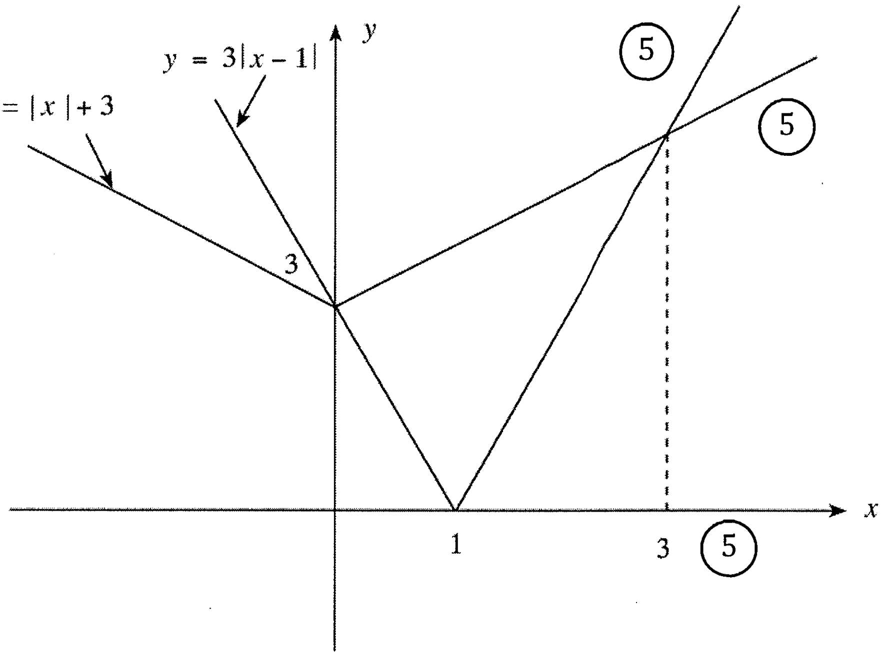
$$= k(2k+3) + (4k+5) \quad 5$$
$$= 2k^2 + 7k + 5$$
$$= (k+1)(2k+5) \quad 5$$
$$= (k+1[2(k+1)+3])$$

இதிலிருந்து, $n = k$ இற்குப் பேறு உண்மையானதெனின், $n = k + 1$ இற்கும் பேறு உண்மையாகும். $n = 1$ இற்குப் பேறு உண்மையானதென நாம் ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ளோம்.

இதிலிருந்து, கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டிற்கேற்ப எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் பேறு உண்மை யானதாகும். 5

25

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y=3|x-1|$, $y=|x|+3$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $3|2x-1|>2|x|+3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



ஒரு வெட்டுப் புள்ளியின் x ஆள்கூறு $x = 0$ ஆகும். மற்றைய வெட்டுப் புள்ளியின் x - ஆள்கூறு $x>1$ இற்கு $3(x-1) = x+3$ இனால் தரப்படுகின்றது.

இதிலிருந்து $x = 3$.

இப்போது $3|2x-1|>2|x|+3$

$\Leftrightarrow 3|u-1|>|u|+3$ இங்கு $u = 2x$ 5

$\Leftrightarrow u < 0$ அல்லது $u > 3$ (வரைபுகளுக்கேற்ப)

$\Leftrightarrow x < 0$ அல்லது $x > \frac{3}{2}$ 5

25

மாற்று முறை 1

முன்னர் போன்று வரைபுகளுக்கு 5 + 5

X இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு மாற்று முறை

சந்தர்ப்பம் (i) $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

அப்போது $3|2x-1| > 2|x|+3 \Leftrightarrow 3(2x-1) > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 6x-3 > 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

இதிலிருந்து, இச்சந்தர்ப்பத்தில் தீர்வுகள் $x > \frac{3}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் X இன் பெறுமானங்களாகும்.

சந்தர்ப்பம் (ii) $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

அப்போது $3|2x-1| > 2|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 8x$$

$$\Leftrightarrow 0 > x$$

இதிலிருந்து, இச்சந்தர்ப்பத்தில் தீர்வுகள் இல்லை.

சந்தர்ப்பம் (iii) $\boxed{x < 0}$

சரியான தீர்வுகளுடன் 3 சந்தர்ப்பங்களுக்கும் 10
சரியான தீர்வுகளுடன் 2 சந்தர்ப்பங்களுக்கு மாத்திரம் 5

அப்போது $3|2x-1| > 2|x|+3 \Leftrightarrow 6x+3 > -2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 4x$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

இதிலிருந்து, இச்சந்தர்ப்பத்தில் தீர்வுகள் $X<0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் X இன் பெறுமானங்களாகும்.

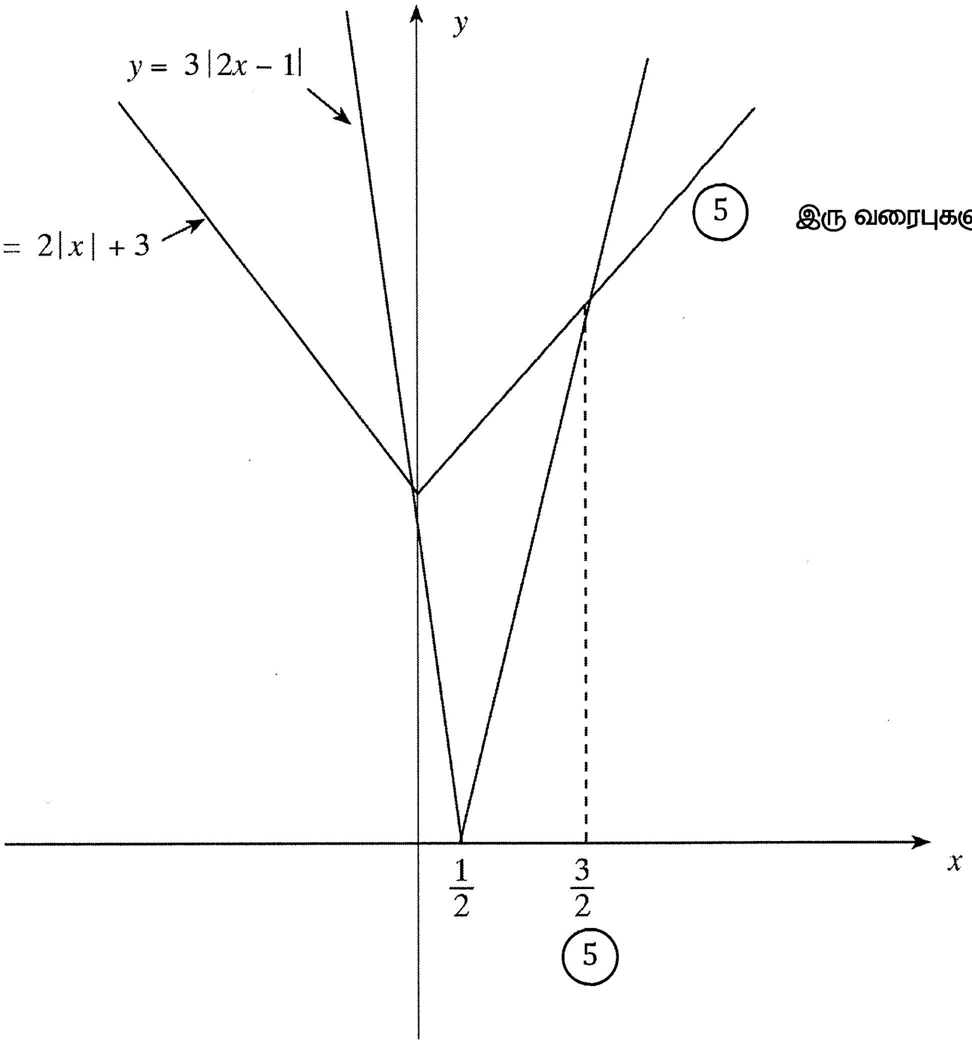
$\therefore$ தரப்பட்டுள்ள சமனிலியின் தீர்வுகள் $X<0$ ஐ அல்லது $x > \frac{3}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் X இன் பெறுமானங்களாகும். 5

25

மாற்று முறை 2

முன்னர் போன்று வரைபுகளுக்கு 5 + 5

x இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு மாற்று முறை :



வரைபுகளிலிருந்து

$3|2x-1| > 2|x|+3$

$\Leftrightarrow x < 0$ அல்லது $x > \frac{3}{2}$ 5

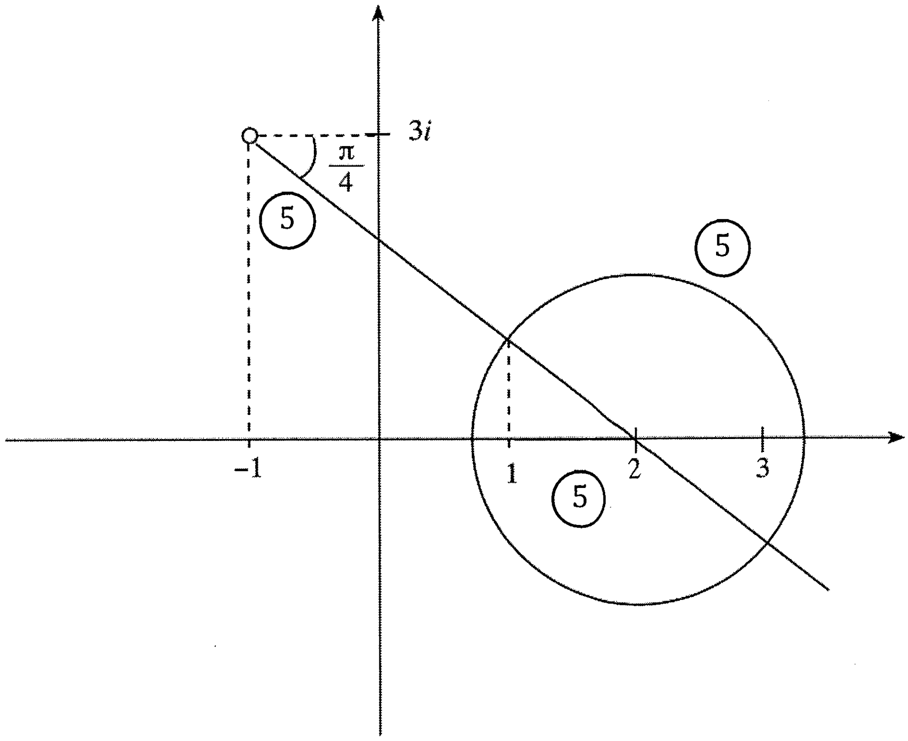
3. ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில்

(i) $\operatorname{Arg}(z+1-3i) = -\dfrac{\pi}{4}$,

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

என்பவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கல் எண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்குகளைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, இவ்வொழுக்குகளின் வெட்டுப் புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்களை எழுதுக.



தேவையான சிக்கல் எண்கள் $1 + i$ 5 , $3 - i$ 5 ஆகும்.

25

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். $(1+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரியை x இன் வலுக்களின் ஏறுவரிசையில் எழுதுக. மேலே தரப்பட்ட விரியில் இரு அடுத்துள்ள உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமன் எனின், n ஒற்றையானது எனக் காட்டுக.

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$; இங்கு ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$; $r = 1, 2$ ....n அத்துடன் ${}^nC_0 = 1$ 5

இரு அடுத்துள்ள உறுப்புகளை ${}^nC_r, {}^nC_{r+1}$ என எடுக்கலாம்.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$ 5 யாதாயினும் $r \in \{0,1,\dots n-1\}$ இற்கு

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n-r} = \frac{1}{r+1}$$

$$\Leftrightarrow n-r = r+1$$

$$\Leftrightarrow n = 2r+1 \quad 5$$

$\therefore n$ ஒற்றையானது.

25

மாற்று முறை

இரு அடுத்துள்ள உறுப்புகளை ${}^nC_{r-1}, {}^nC_r$ என எடுக்கலாம்.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$ 5 யாதாயினும் $r \in \{1,2,3.........n\}$ இற்கு

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{[n-(r-1)]!(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow n-r+1 = r$$

$$\Leftrightarrow n = 2r-1 \quad 5$$

$\therefore n$ ஒற்றையானது.

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{3x} + \sqrt{\pi}\right)}{\left(\sqrt{3x} + \sqrt{\pi}\right)} \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{(3x - \pi)} . \left(\sqrt{3x} + \sqrt{\pi}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} . \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3x} + \sqrt{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} . \left(\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}\right) \quad 5$$

5

$$= \frac{1}{3} . 1 . 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

மாற்று முறை

$$\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\right] . \left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5 5

$$= \left[\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 . 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} . \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

6. $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x=0$, $x=\ln 3$, $y=0$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x–அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2-1)$ எனக் காட்டுக.

தேவையான கனவளவு

$$= \pi\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x \quad 5$$

$$= \pi\int_2^{4} \frac{u-1}{u^2}\,\mathrm{d}u \quad ;$$ இங்கு $u = 1 + e^x$ 5

$$= \pi\int_2^{4} \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\}\mathrm{d}u \quad 5$$

$$= \pi\left\{\ln|u| + \frac{1}{u}\right\}\Big|_2^4 \quad 5$$

$$= \pi\left\{\ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\}$$

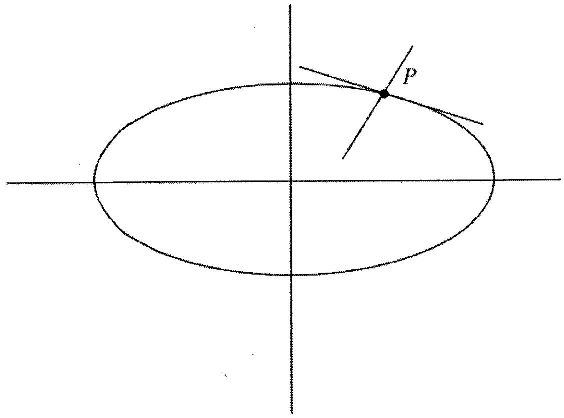
$$= \frac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\} \quad 5$$

25

7. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ இற்கு அதன் மீது இருக்கும் புள்ளி $P\equiv(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $5\sin\theta\, x-3\cos\theta\, y=16\sin\theta\cos\theta$ எனக் காட்டுக.

மேலே தரப்பட்ட நீள்வளையத்திற்கு அதன் மீது உள்ள புள்ளி $\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ இல் வரையப்பட்ட செவ்வன் கோட்டின் $y-$வெட்டுத்துண்டைக் காண்க.

$x=5\cos\theta,\ y=3\sin\theta$



$\frac{dx}{d\theta}=-5\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$ 5

$\frac{dx}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ இற்கு $\sin\theta\neq 0$
5

$\therefore$ $\cos\theta\neq 0$ இற்கு P இல் வரையப்பட்டுள்ள செவ்வனின் படித்திறன் $=\frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$ 5

தேவையான சமன்பாடு $\cos\theta\neq 0$ இற்கு $y-3\sin\theta=\frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x-5\cos\theta)$ 5 ஆகும்.

$5\sin\theta x-3\cos\theta y=16\sin\theta\ \ \cos\theta$

$\cos\theta=0$ ஆக இருக்கும்போதும் இச்சமன்பாடு வலிதாகும் (Pஆனது y - அச்சு மீது இருக்கும்போது)

y - வெட்டுத்துண்டிற்கு $y-\frac{16}{3}\sin\theta$

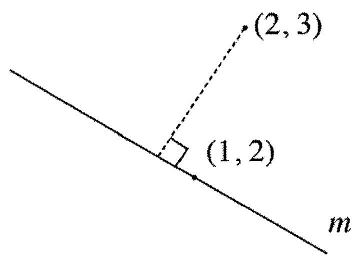
ஆனால் $3\ \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\ \theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore y=-\frac{8}{\sqrt{3}}.$ 5

$\therefore$ தேவையான y வெட்டுத்துண்டு $\left(0,-\frac{8}{\sqrt{3}}\right).$

25

8. $m \in \mathbb{R}$ எனவும் l ஆனது புள்ளி $A \equiv (1, 2)$ இனூடாகச் செல்லும் படித்திறன் m ஐக் கொண்ட நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். l இன் சமன்பாட்டை m இல் எழுதுக.
புள்ளி $B \equiv (2, 3)$ இலிருந்து கோடு l இற்குச் செங்குத்துத் தூரம் $\frac{1}{\sqrt{5}}$ அலகுகள் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. m இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.



l இன் சமன்பாடு $y-2=m(x-1)$

அ-து $y-mx-2+m=0$ 5

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{|3-2m-2+m|}{\sqrt{1+m^2}}$$ 5

$$\Leftrightarrow 1+m^2=5(1-m)^2$$ 5

$$\Leftrightarrow 1+m^2=5(1-2m+m^2)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-10m+4=0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-5m+2=0$$ 5

$$\Leftrightarrow (2m-1)(m-2)=0$$

$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ அல்லது $m=2$ 5

25

9. புள்ளி $(-2, 0)$ இல் மையத்தைக் கொண்டதும் புள்ளி $(-1, \sqrt{3})$ இனூடாகச் செல்வதுமான வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளி $A \equiv (1, -1)$ இலிருந்து வட்டம் S இற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

இதிலிருந்து, A இலிருந்து S இற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகைப் புள்ளிகளின் $x-$ ஆள்கூறுகள் சமன்பாடு $5x^2 + 8x + 2 = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன எனக் காட்டுக.

$S : (x+2)^2 + y^2 = r^2$ (5)

இது $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ இனூடாகச் செல்கின்றது.

$\therefore 1 + 3 = r^2$

$\therefore 4 = r^2$

இலிருந்து, S இன் சமன்பாடு $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ஆகும். (5)

அ - து $x^2 + y^2 + 4x = 0$

$A \equiv (1-1)$ இலிருந்து S இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகளின் தொடுகை நாண் $x - y + 2(x+1) = 0$ ஆகும். (5)

அ - து $3x - y + 2 = 0$

தொடுகைப் புள்ளிகளுக்காக $y = 3x + 2$ (1) இற் பிரதியிடுவோம். (5)

அப்போது $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0$

இதிலிருந்து, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0.$ ஆகவே $5x^2 + 8x + 2 = 0$ (5)

25

10. $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம்.

சர்வசமன்பாடு $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ஐப் பயன்படுத்தி, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ எனக் காட்டுக.

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ எனக் காட்டுக.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$............. (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ஆனது $\cos^2\theta \neq 0$ ஐத் தருகின்றது.

இதிலிருந்து, (1) இனின்றும் $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (5)

இப்போது $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ இலிருந்து $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ கிடைக்கின்றது.

(5)

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ ஆகையால், $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ $\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$ (5)

25

11. (*a*) $f(x) = x^2 + px + c$, $g(x) = 2x^2 + qx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p, q \in \mathbb{R}$ உம் $c > 0$ உம் ஆகும்.
$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ ஆகியன ஒரு பொது மூலம் α ஐக் கொண்டுள்ளன எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\alpha = p - q$ எனக் காட்டுக.
c ஐ p, q ஆகியவற்றில் கண்டு,
(i) $p > 0$ எனின் $p < q < 2p$ எனவும்
(ii) $f(x) = 0$ இன் பிரித்துக்காட்டி $(3p - 2q)^2$ எனவும்
உய்த்தறிக.
$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ ஆகியவற்றின் மற்றைய மூலங்கள் முறையே β, γ எனக் கொள்வோம். $\beta = 2\gamma$ எனக் காட்டுக. மேலும் β, γ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.
(*b*) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $h(x)$ இன் ஒரு காரணி $x^2 - 1$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $b = -1$ எனக் காட்டுக.
மேலும் $h(x)$ ஆனது $x^2 - 2x$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $5x + k$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு $k \in \mathbb{R}$ ஆகும். k இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $h(x)$ ஐ வடிவம் $(x - \lambda)^2(x - \mu)$ இல் எழுதலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α ஆனது $f(x) = 0, g(x) = 0$ ஆகியவற்றின் ஒரு பொது மூலம் ஆகையால்,

$\alpha^2 + p\alpha + c = 0$ _____ (1) (5)

$2\alpha^2 + q\alpha + c = 0$ (5)

$\therefore \alpha^2 + (q - p)\alpha = 0$ ஆகவே, $\alpha\left[\alpha - (p - q)\right] = 0$ (5)

இதிலிருந்து, $\alpha = p - q$ (5) $(\because c > 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

20

(1) $\Rightarrow c = -\alpha(\alpha + p)$ (5)

$= -(p - q)(2p - q)$ (5) (α இற்குப் பிரதியிடும்போது)

$= -(p - q)(q - 2p)$

10

(i) $c > 0$ ஆகையால் $(q - p)(q - 2p) < 0$ (5)

$\therefore$ q ஆனது p இற்கும் $2p$ இற்குமிடையே இருக்கிறது.

$p > 0$ எனின், $p < 2p$ ஆகையால், $p < q < 2p$ (5)

10

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ 5

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ 5

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2\ ]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ 5

15

$\alpha + \beta = -p$ 5

$\alpha + \gamma = -\dfrac{q}{2}$ 5

$\therefore \beta - 2y = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0$ 5

$\therefore \beta = 2\gamma$

மாற்று முறை

$\alpha\beta = c$ 5

$\alpha r = \dfrac{c}{2}$ 5

$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ஆகையால்

$\dfrac{\beta}{\gamma} = 2$ 5

$\beta = 2\gamma$

15

தேவையான சமன்பாடு $(x-\beta)(x-\gamma) = 0$ ஆகும்.

இதிலிருந்து $x^2 - (\beta+\gamma)x + \gamma\beta = 0$ (10)

மேலும் $\beta + \gamma = -p - \dfrac{q}{2} - 2\alpha = -p - \dfrac{q}{2} - (2p - 2q) = \dfrac{3}{2}(q - 2p)$ (05)

இப்போது $\alpha^2\beta\gamma = \dfrac{c^2}{2}$

$\therefore \beta\gamma = \dfrac{c^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{1}{2}(q-2p)^2$ (05)

$x^2 - \dfrac{3}{2}(q-2p)x + \dfrac{1}{2}(q-2p)^2 = 0$ (05)

$2x^2 + 3(2p-q)x + (2p-q)^2 = 0$

25

$(b)(x^2 - 1)$ ஆனது $h(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகையால்,

$(x - 1), (x + 1)$ ஆகிய இரண்டும் $h(x)$ இன் காரணிகளாகும்.

காரணித் தேற்றத்திற்கேற்ப $h(1) = 0, h(-1) = 0$ ஆகும். 05

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ 1 $\quad \therefore h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— 2

05 05

1 - 2 இன் மூலம் $2 + 2b = 0$

$\therefore b = -1$ 5

20

$h(x) = p(x).(x^2 - 2x) + 5x + k$ 05

$h(0) = k$ 05

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ 05

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ 05

1 + 2 இன் மூலம் $a = -c$

$\therefore c = -1$

இதிலிருந்து, $k = -1$ 5

25

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x^3 + x^2 - x - 1 \\
&= (x+1)x^2 - (x+1) \\
&= (x+1)(x^2 - 1) \quad 05 \\
&= (x+1)^2(x-1) \quad 05
\end{aligned}
$$

$(\gamma = -1, \quad \mu = 1)$

10

---

12. (*a*) ஐந்து பியானோ வாசிப்பவர்கள், ஐந்து கிதார் வாசிப்பவர்கள், மூன்று பெண் பாடகர்கள், ஏழு ஆண் பாடகர்கள் ஆகியோரிலிருந்து **செப்பமாக** இரு பியானோ வாசிப்பவர்களும் **குறைந்தபட்சம்** நான்கு கிதார் வாசிப்பவர்களும் இடம்பெறுமாறு பதினொரு உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஓர் இசைக் குழுவைத் தெரிவுசெய்ய வேண்டியுள்ளது. அத்தகைய எத்தனை வெவ்வேறு இசைக் குழுக்கள் தெரிவுசெய்யப்பட முடியுமெனக் காண்க.
இவற்றுள் செப்பமாக இரு பெண் பாடகர்களைக் கொண்டிருக்கும் இசைக் குழுக்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$, $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $A, B \in \mathbb{R}$.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகிறதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இப்போது $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ எனக் கொள்வோம். $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்குகிறதென **உய்த்தறிந்து**, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a) P = பியானோ வாசிப்பவர்கள் (5), G = கிதார் வாசிப்பவர்கள் (5), பாடகர்கள் (10)
FS = பெண் பாடகர்கள் (3)
MS = ஆண் பாடகர்கள் (7)

P	G	S	வழிகளின் எண்ணிக்கை
2	4	5	(10) ${}^5C_2 \; {}^5C_4 \; {}^{10}C_5 = 12600$ (05)
2	5	4	(10) ${}^5C_2 \; {}^5C_5 \; {}^{10}C_4 = 2100$ (05)

தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= 12600 + 2100$

$= 14700$ (05)

35

P	G	FS	MS	வழிகளின் எண்ணிக்கை
2	4	2	3	${}^5C_2\ {}^5C_4\ {}^3C_2\ {}^7C_3 = 5250$ (05) (10)
2	5	2	2	${}^5C_2\ {}^5C_5\ {}^3C_2\ {}^7C_2 = 630$ (05) (10)

தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 5250 + 630$$
$$= 5880 \quad (05)$$

35

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \qquad V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}$$

எனவே $U_r = V_r - V_{r+1}$. இதிலிருந்து $\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ (05)

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)}$$

இதிலிருந்து, $3r - 2 = Ar - B(r+2), \quad r \in \mathbb{Z}$ இற்கு
(05)

r இன் வலுக்களின் குணகங்களை ஒப்பிடும்போது

$$\left.\begin{aligned} r^1 &: \quad 3 = A - B \\ r^0 &: \ -2 = -2B \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A &= 4 \quad (05) \\ B &= 1 \quad (05) \end{aligned}$$

20

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$$r = 1 \; ; \quad U_r = V_r - \cancel{V_2}$$
$$r = 2 \; ; \quad U_r = \cancel{V_r} - V_3 \qquad 05$$

$$\vdots \qquad \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots$$

$$r = n-1 \; ; \quad U_{n-1} = V_{n-1} - \cancel{V_n}$$
$$r = n \; ; \quad U_n = \cancel{V_n} - V_{n+1} \qquad 05$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1}$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)} \right) \quad 05$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \quad 05$$

$\boxed{25}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right\} \quad 5$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{(1+\frac{1}{n})\;(1+\frac{2}{n})} \right\}$$

$$= 1. \quad 5$$

ஆகவே முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் அதே வேளை கூட்டுத்தொகை ஆகும். 05

$\boxed{15}$

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2\sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r . \quad 5$$

$\boxed{10}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}W_r = \lim_{n\to\infty} \quad U_{n+1} - U_1 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad (05)$$

$$= -\frac{7}{6}$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்கும் அதே வேளை கூட்டுத்தொகை $-\frac{7}{6}$ ஆகும். (05)

$\boxed{10}$

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{A}^T\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{I}$ வரிசை 2 ஐ உடைய சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

மேலும், $a \neq 0$ ஆக **இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம்** $\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

இப்போது, $a = 1$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{C}^{-1}$ ஐ எழுதுக.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ ஆகுமாறு தாயம் $\mathbf{P}$ ஐக் காண்க.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். $|z|^2 = z\bar{z}$ எனக் காட்டி, அதனை $z - w$ இற்குப் பிரயோகித்து,

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ எனக் காட்டுக.

$|1 - z\bar{w}|^2$ இற்கும் ஓர் ஒத்த கோவையை எழுதி, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ எனக் காட்டுக.

$|w| = 1$, $z \neq w$ எனின், $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ என **உய்த்தறிக**.

(*c*) $1+\sqrt{3}\,i$ ஐ வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

$(1+\sqrt{3}\,i)^m(1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^8$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு m, n ஆகியன நேர் நிறையெண்கள். த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, m, n ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் துணிவதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(*a*) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ 5

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ 5

$\therefore\ A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ 5

20

C^{-1} இருக்கின்றது $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 05

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 05

10

$a = 1$ ஆக இருக்கும்போது $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (05)

$$\therefore C^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (05)$$

$\boxed{10}$

$$CPC = 2I + C$$

$$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C \quad (05)$$

$$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$$

$$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1} \quad (05)$$

$$\therefore P = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (05)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (05)$$

$\boxed{20}$

(*b*) Let $z = x + iy$.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) \quad (5)$$

$$= x^2 - i^2y^2$$

$$= x^2 + y^2$$

$$= |z|^2$$

$$\therefore |z|^2 = z\bar{z}. \quad (5)$$

$\boxed{10}$

$$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)} \quad 5$$

$$= (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w}) \quad 5$$

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow 1$$

15

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow \boxed{2} \quad 05$$

$\boxed{1}$ - $\boxed{2}$ இலிருந்து

$$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2 \quad 05$$

$$= -\left(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2\right) \quad 05$$

$$= -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right) \longrightarrow \boxed{3}$$

20

$|w| = 1$ ஆகையால் 3 இலிருந்து $|z-w|^2 - |1-zw|^2 = 0$ 05

$\therefore |z-w| = |1-z\bar{w}|.$

இதிலிருந்து, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1.$ $\quad \begin{bmatrix} \therefore z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1 \quad 05$$

10

(c) $$1+\sqrt{3}\, i = 2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad 05$$

$$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right\} \quad 05$$

10

$$\left(1+\sqrt{3}\, i\right)^m\left(1-\sqrt{3}\, i\right)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\ \ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)^n\right) \quad 05$$

$$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3}+i\ \sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\ \ \sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\ \sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) \quad 05$$

$$\therefore 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\ \sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$$

இதிலிருந்து $\Rightarrow m+n=8$ $\qquad (m-n)\frac{\pi}{3} = 2k\pi;\ \ k\in\mathbb{Z}$

05 $\qquad$ 05

25

14. (*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 3$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடையையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க.

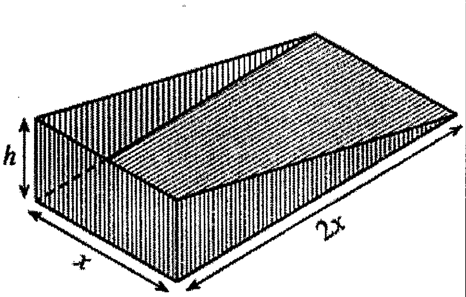
மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq 3$ இற்கு $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

(*b*) ஒரு தூசித் தட்டின் கைப்பிடி இல்லாத பகுதியை அருகே உள்ள உரு காட்டுகின்றது. சென்ரிமீற்றரில் அதன் பரிமாணங்கள் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவு x^2h cm^3 ஆனது 4500 cm^3 எனத் தரப்பட்டுள்ளது.
அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $S = 2x^2 + 3xh$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. $x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும் எனக் காட்டுக.



(ய) $x \neq 3;$ $\quad f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

அப்போது $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x - 3 + 2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$$= \frac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{9(1-x)}{(x-3)^3}.$$ 5

25

$f^1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(-)	(-)	(-)
$f(x)$	↘ 05 குறைகின்றது	↗ 05 அதிகரிக்கின்றது	↘ 05 குறைகின்றது

$\therefore f(x)$ ஆனது (1, 3) மீது அதிகரிக்கும் அதே வேளை, (- 2, 1) மீதும் $(3, \infty)$ மீதும் குறைகின்றது.

20

திரும்பற் புள்ளி : $\left(1,-\frac{1}{4}\right)$ ஓர் ஒரிட இழிவாகும்.

05

$x \neq 3;$ இற்கு $f^{1}(x)=\frac{18x}{(x-3)^{4}}$

$f^{1}(x)=0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 0$ 05

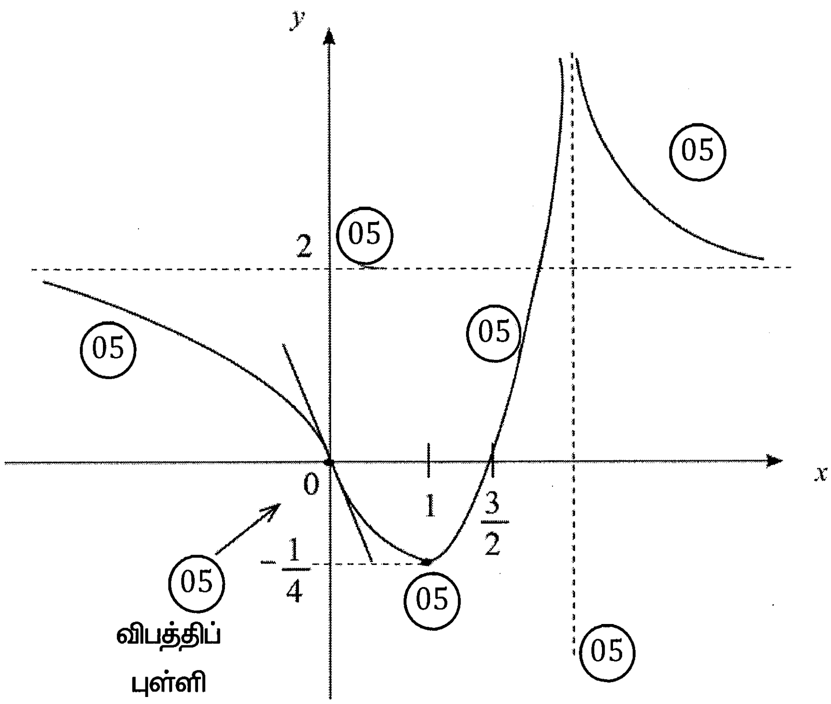
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f^{1}(x)$ இன் குறி	(-)	(+)
குழிவு	கீழ்நோக்கிக் குழிவானது 05	மேல்நோக்கி குழிவானது 05

$\therefore$ விபத்திப் புள்ளி = $(0, 0)$ 05

20

கிடை அணுகுகோடு : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \quad \therefore y=2$

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு : $x = 3$



45

(b) $x^2h = 4500$

இதிலிருந்து $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x.\frac{4500}{x^2},$$ ஒ, 0 இற்கு

(05)

$$\therefore \frac{ds}{dx} = 4x - 3\times 4500\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^3 - 3375\right)}{x^2},$$

(05)

$\frac{ds}{dx} = 0$ (05) $\Leftrightarrow x = 15$ (05)

$0 < x < 15$ இற்கு $\frac{ds}{dr} < 0;$ $x > 15$ இற்கு $x > 15, \frac{ds}{dr} > 0$ (05)

$\therefore$ *x = 15* ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும். (05)

35

15. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$ ஆகுமாறு A, B ஆகிய மாறிலிகள் உள்ளனவெனத் தரப்பட்டுள்ளது.
A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(c) a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ ஐப் பயன்படுத்தி,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ எனக் காட்டுக.

(ய) எல்லா $x \in \mathbb{R}$

$$x^3+13x-16 = A\left(x^2+9\right)\left(x+1\right)+2\left(x^2+9\right)+2\left(x+1\right)^2$$

x இன் வலுக்களின் குணகங்களை ஒப்பிடும் போது

$x^3 : 1 = A.$

$x^0 : -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3.$

மாற்று முறை

பிரதியிடும்போது

$x = 1 : -30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0 : -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

35

$$\therefore \quad \frac{x^2 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+9} \cdot \quad 10$$

$$\int \frac{x^2 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \cdot \quad 5$$

5 5 5

30

(b)

$$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1 - \cos 2\pi x) \ dx \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ dx}_{I} \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1) - \frac{1}{2} I . \quad (05) \qquad \text{———} \ (1)$$

இப்போது $I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \ dx$

$$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \ dx \quad (05) \quad (05)$$

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ dx}_{I}\right] \quad (05) \quad (05)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e - 1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I . \quad (05) \quad (05)$$

$$\therefore I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e - 1).$$

$$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2 + 1} . \quad (05)$$

$$\therefore (1) \quad \int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ dx = \frac{1}{2}(e - 1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2 + 1)} \quad (05) + (05)$$

$$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2 + 1}\right]$$

$$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1 + 4\pi^2} .$$

60

(c) $I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^6 x \sin^3 x \quad 05 \quad 05$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx}_{I} \quad 05$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx \,. \quad 05$$

20

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \quad 05$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx \right] \quad 05$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\underbrace{\frac{-\cos^7 x}{7} \Bigg|_0^{\pi}}_{05} + \underbrace{\frac{\cos^9 x}{9} \Bigg|_0^{\pi}}_{05} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right] \quad 05$$

$$= \frac{2\pi}{63} \,.$$

25

---

16. $A \equiv (1, 2)$ எனவும் $B \equiv (3, 3)$ எனவும் கொள்வோம்.

A, B ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு l இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

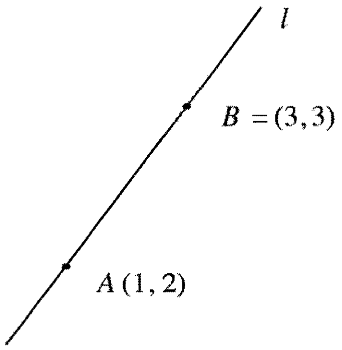
ஒவ்வொன்றும் l உடன் கூர்ங்கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஐ ஆக்கிக்கொண்டு A இனூடாகச் செல்லும் l_1, l_2 என்னும் நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் வடிவம் $(1 + 2t, 2 + t)$ இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

l_1, l_2 ஆகிய இரண்டையும் தொடுவதும் மையம் l மீது உள்ளதும் ஆரை $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ஐ உடையதும் முழுவதும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் அமைகின்றதுமான வட்டம் C_1 இன் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ எனவும் காட்டுக.

விட்டம் ஒன்றின் முனைகள் A ஆகவும் B ஆகவும் உள்ள வட்டம் C_2 இன் சமன்பாட்டை எழுதுக.

C_1, C_2 ஆகிய வட்டங்கள் நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுகின்றனவா எனத் துணிக.



$$= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2} \quad 05$$

l இன் சமன்பாடு $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ 05

அ - து $x - 2y + 3 = 0$

10

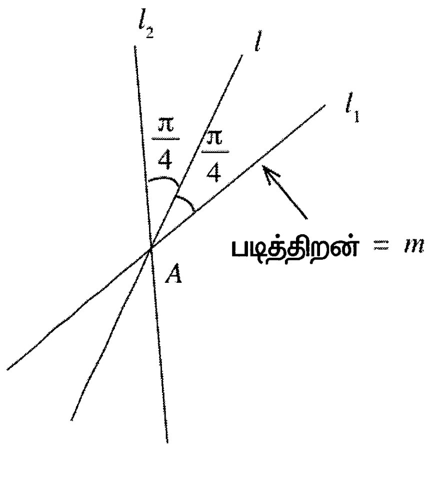
$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad 10$$

$$\therefore 1 = \left|\frac{2m-1}{2+m}\right|$$
05

$$\Leftrightarrow 2 + m = \pm(2m - 1) \quad 05$$

$$\Leftrightarrow 2 + m = 2m - 1 \text{ அல்லது } 2 + m = -2m + 1$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \quad or \quad m = -\frac{1}{3} \quad 05$$
05



$l_1 : y-2 = 3(x-1);$ $l_2 : y-2 = -\frac{1}{3}(x-1)$

$l_1 : 3x - y - 1 = 0;$ (05) $l_2 : x + 3y - 7 = 0$ (05)

40

$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = t$ எனக். (05)

அப்போது $x = 1 + 2t, y = 2 + t$ இங்கு $t \in \mathbb{R}$ (05)

10

C_1 இற்கு

$P \equiv (1+2t, 2+t)$ l_1 இற்கு உள்ள செங்குதம்து தூரம் C_1 இன் ஆரைக்குச் சமன்

அ- து $\frac{|3(1+2t)-(2+t)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\ (05)} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (05)

அ -து $|3 + 6t - 2 - t - 1| = 5.$ (05)

$|5t| = 5.$

$t = \pm 1$ (05)

$P = (3, 3) = B$ (05) ஆகையால் $P = (-1, 1)$ (05) உகந்ததன்று.

$C_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{2}.$ (05)

அ - து $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \frac{5}{2}$

அ - து $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ (05)

45

C_2 இன் சமன்பாடு

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y-3) = 0$ (15)

மையம்	(05)
ஆரை	(05)
சமன்பாடு	(05)

15

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(\frac{-5}{2}\right) = 27.$$

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}.$$

$$\therefore 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2.$$

$\therefore c_1, c_2$ ஆகியன நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுவதில்லை. **30**

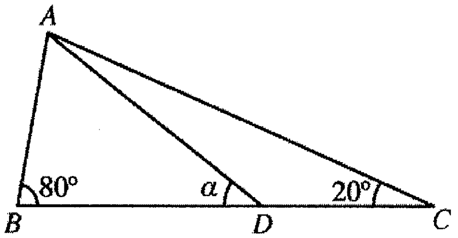
17. (a) $\sin(A-B)$ ஐ $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

(i) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$,

(ii) $2\sin 10^\circ=\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ$

என **உயத்தறிக.**

(b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு முக்கோணி ABC இற்குச் **சைன் நெறியைக்** கூறுக.



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C=80^\circ$ உம் $A\hat{C}B=20^\circ$ உம் ஆகும். BC மீது புள்ளி D ஆனது $AB=DC$ ஆகுமாறு உள்ளது. $A\hat{D}B=\alpha$ எனக் கொள்வோம்.

பொருத்தமான முக்கோணிகளுக்குச் **சைன் நெறியைப்** பயன்படுத்தி, $\sin 80^\circ\sin(\alpha-20^\circ)=\sin 20^\circ\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

ஏன் $\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$ என விளக்கி, **இதிலிருந்து,** $\tan\alpha=\dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ-2\sin 10^\circ}$ எனக் காட்டுக.

மேலே (a)(ii) இல் உள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி $\alpha=30^\circ$ என **உய்த்தறிக.**

(c) சமன்பாடு $\tan^{-1}(\cos^2 x)+\tan^{-1}(\sin x)=\dfrac{\pi}{4}$ ஐத் தீர்க்க.

(a) *sin (A-B)= sin A cos B - cos A sin B* (05) **10**

(i) $\sin\left(90^0-\theta\right)=\sin 90^0\cos\theta-\cos 90^0\sin\theta$ (05)

$=\cos\theta$ (05) *($\because$ sin 90^0 = 1, cos 90^0 = 0)*

10

(iii) $2\sin 10^0=2\sin\left(30^0-20^0\right)$ (05)

$=2\sin 30^0\cos-20^0-2\cos 30^0\sin 20^0$ (05)

$=\cos 20^0-\sqrt{3}\sin 20^0$ (05) $\left(\sin 30^0=\dfrac{1}{2},\quad \cos 30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

15

(b) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 05 + 05

10

இங்கு $BC = a,\ CA = b,\ AB = C$

சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தும்போது

முக்கோணி ABD இற்கு $\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin 80^0}$ 10

முக்கோணி ADC இற்கு $\dfrac{DC}{\sin\left(\alpha-20^0\right)}=\dfrac{AD}{\sin 20^0}$ 10

$\therefore \dfrac{\sin\left(\alpha-20^0\right)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 20^0}{\sin 80^0}$

$\therefore \sin 80^0 \sin\left(\alpha-20^0\right)=\sin 20^0 \sin\alpha$ 05

25

$\sin 80^0 \sin\left(90^0-20^0\right)=\cos 10^0$ 05

05

இப்போது $\sin 80^0 \sin\left(\alpha-20^0\right)=\sin 20^0 \sin\alpha$ இதிலிருந்து

$\sin 10^0 \sin\left(\alpha-20^0\right)=2\sin 10^0 \cos 10^0 \sin\alpha$

05 05

$\therefore \sin\alpha\cos 20^0-\cos\alpha\sin 20^0 = 2\sin 10^0 \sin\alpha$

05

$\therefore \tan\alpha\left(\cos 20^0-2\sin 10^0\right)-\sin 20^0$ இதிலிருந்து $\tan\alpha=\dfrac{\sin 20^0}{\cos 20^0-2\ \sin 10^0}$

05 05

35

(a) (ii) இதற்கேற்ப $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 20^0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (05)

$\therefore \alpha = 30^0$ (05) $\left(20^0 < \alpha < 90^0\right)$

10

(c) $\tan^{-1}\left(\cos^2 x\right) + \tan^{-1}\left(\sin x\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}\left(\cos^2 x\right)$ அல்லது $\beta = \tan^{-1}\left(\sin x\right)$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta.$$

$$\therefore \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \quad (5)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\beta}. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}. \quad (5)$$

$\cos^2 x\left(1 + \sin x\right) = \left(1 - \sin x\right)$

$\left(1 - \sin^2 x\right)\left(1 + \sin x\right) = \left(1 - \sin x\right)$ (05)

$\left(1 - \sin x\right)\left(1 + \sin x\right)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow \sin x = 1$ அல்லது $\sin x = \pm 1$ $\qquad (\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow \sin x = 1$ அல்லது $\sin x = 0$ (05) $\qquad (\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\Rightarrow x = n\pi + \left(-1\right)\dfrac{\pi}{2}$ (05) அல்லது $m \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = m\pi$ (05)

35

மாற்று முறை

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{\pi}{4} \quad (05)$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = 1 \quad (05)$$

$$\therefore \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \sin x \quad (05)$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1-\sin^2 x)\sin x \quad (05)$$

$$\sin x\,(1-\sin x)(2+\sin x) = 0$$

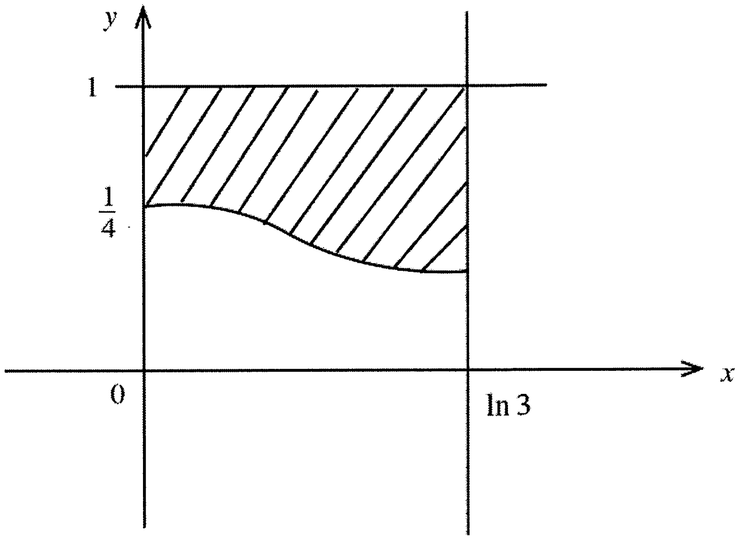
$\Rightarrow \sin x = 1$ அல்லது $\sin x = 0$ (05) $\quad (\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}$ (05) $\quad x = m\pi\,;\, m \in \mathbb{Z}$.

35

பழைய பாடத்திட்டம்

6. $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$, $x=0, x=\ln 3$, $y=1$ என்னும் வளையிகளினால் வரைப்புற்ற பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ எனக் காட்டுக.



தேவையான பரப்பளவு $= \displaystyle\int_0^{\ln 3}\left\{1 - \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\right\} dx$ 5

$u = 1 + e^x.$

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\, du$ 5

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \ln 3 - \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ 5

$= \ln 3 - \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

$= \ln 3 - \left\{\ln 2 - \dfrac{1}{4}\right\}$

$= \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{4}.$ 5

25

7. ஒரு வளையி C ஆனது $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ இற்கு $x = 2t - \cos 2t,\ y = 1 - \sin 2t$ ஆகியவற்றினால் பரமானமாகத் தரப்படுகின்றது. $\frac{dy}{dx}$ ஐ t இல் காண்க.
வளையி C இற்கு அதன் மீது $t = \frac{\pi}{12}$ இற்கு ஒத்த புள்ளியில் வரையப்படும் செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $6\sqrt{3}x - 6y - \sqrt{3}\pi + 12 = 0$ எனக் காட்டுக.

$$x = 2t - \cos 2t, \quad y = 1 - \sin 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 + 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\cos 2t. \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos 2t}{2 + 2\sin 2t} = -\frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t} \quad 5$$

$t = \frac{\pi}{12}$ ஆகையால் $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad 5$

தேவையான செவ்வன்னின் படித்திறன் $= \dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \quad 5$$

தேவையான சமன்பாடு

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

அ - து $6\sqrt{3x} - 6y - \sqrt{3}\pi + 12 = 0 \quad 5$

25

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{I}$ வரிசை 2 ஐ உடைய சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

மேலும், $a \neq 0$ ஆக **இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம்** $\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

இப்போது, $a = 1$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{C}^{-1}$ ஐ எழுதுக.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ ஆகுமாறு தாயம் $\mathbf{P}$ ஐக் காண்க.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். $|z|^2 = z\bar{z}$ எனக் காட்டி, அதனை $z - w$ இற்குப் பிரயோகித்து,

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ எனக் காட்டுக.

$|1 - z\bar{w}|^2$ இற்கும் ஓர் ஒத்த கோவையை எழுதி, $|z-w|^2 - |1 - z\bar{w}|^2 = -\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)$ எனக் காட்டுக.

$|w| = 1$, $z \neq w$ எனின், $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ என **உயத்தறிக**.

(*c*) $1 + \sqrt{3}i$ ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளி O ஆனது உற்பத்தியையும் புள்ளி A ஆனது சிக்கல் எண் $1 + \sqrt{3}i$ ஐயும் வகைகுறிக்கின்றன. $OABCDE$ ஆனது, O, A ஆகியன அதன் இரு அடுத்தடுத்த உச்சிகளாகவும் உச்சிகளின் வரிசை இடஞ்சுழிப் போக்கிலும் எடுக்கப்பட்ட, ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். B, C, D, E ஆகிய புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்களைக் காண்க.

(*a*) $A^T B = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ 5

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ 5

$\therefore\ A^T B - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ 5

20

C^{-1} **இருக்கின்றது** $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 05

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 05

10

$a = 1$ ஆக இருக்கும் போது

$$= 1,\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\quad 5$$

$$\therefore\ C^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\quad 5$$

10

$$CPC = 2I + C$$

$$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C \quad 5$$

$$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$$

$$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1} \quad 5$$

$$\therefore\ P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 5$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \quad 5$$

20

(b) $Z = x + iy$ எனக் கொள்வோம்.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) \quad 5$$

$$= x^2 - i^2y^2$$

$$= x^2 + y^2$$

$$= |z|^2$$

$$\therefore\ |z|^2 = z\bar{z}. \quad 5$$

10

$$|Z-W|^2=(Z-W)(\overline{Z-W}) \quad 05$$

$$=(Z-W)(\overline{Z}-\overline{W}) \quad 05$$

$$=Z\overline{Z}-Z\overline{W}-\overline{Z}W+W\overline{W}$$

$$=|Z|^2-(Z\overline{W}+Z\overline{W})+|W|^2 \quad 05$$

$$=|Z|^2-2\operatorname{Re}(Z\overline{W})+|W|^2 \longrightarrow 1$$

15

$$|1-\overline{z}w|^2=1-2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|z\overline{w}|^2 \longrightarrow 2 \quad 05$$

1 - 2 இலிருந்து

$$|z-w|^2-|1-z\overline{w}|^2=|z|^2+|w|^2-1-|z\overline{w}|^2 \quad 05$$

$$=-\left(1-|w|^2-|z|^2+|z|^2|w|^2\right) \quad 05$$

$$=-\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right) \longrightarrow 3$$

20

$|w|=1$ ஆகையால் 3 இலிருந்து $|z-w|^2-|1-zw|^2=0$ 05

$\therefore |z-w|=|1-z\overline{w}|$

இதிலிருந்து $\dfrac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|}=1$ $\left[\begin{array}{l}\therefore z\neq w\\ \Rightarrow z\overline{w}\neq 1\end{array}\right]$

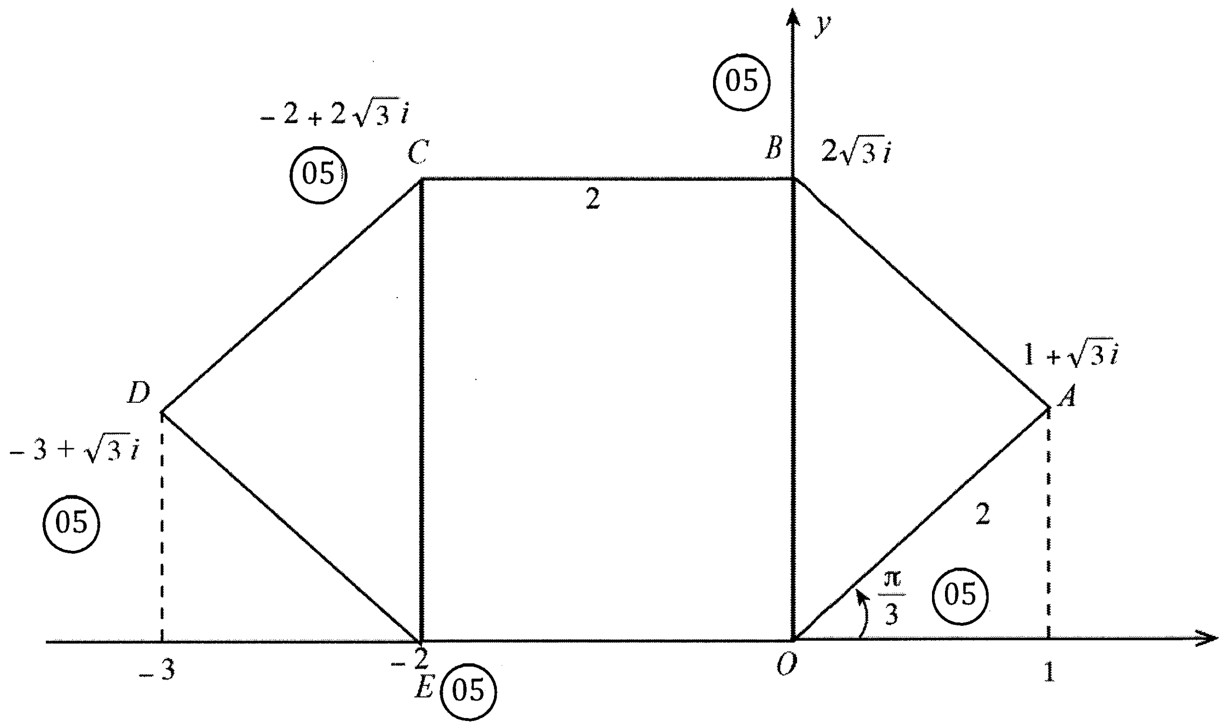
$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=1 \quad 05$$

10

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 05

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ 05

10



25

14. (a) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

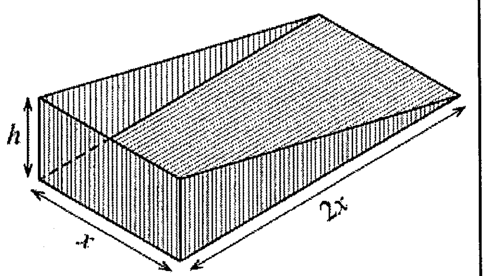
$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq 3$ இற்கு $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடையையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க. மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, x - வெட்டுத்துண்டுகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $\dfrac{1}{1+f(x)} \leq \dfrac{1}{3}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(b) ஒரு தூசித் தட்டின் கைப்பிடி இல்லாத பகுதியை அருகே உள்ள உரு காட்டுகின்றது. சென்ரிமீற்றரில் அதன் பரிமாணங்கள் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவு x^2h cm^3 ஆனது 4500 cm^3 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $S = 2x^2 + 3xh$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. $x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும் எனக் காட்டுக.



(a) $x \neq 3$; $\quad f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

அப்போது $f^1(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}[2x-3+2x] - \dfrac{2x-(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$$= \frac{(x-3)(4x-3)-2x(2x-3)}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{4x^2-15x+9-4x^2+6x}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{9(1-x)}{(x-3)^3}$$ 05

25

$f^1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(-)	(-)	(-)
$f(x)$	↘ 05 குறைகின்றது	↗ 05 அதிகரிக்கின்றது	↘ 05 குறைகின்றது

$\therefore f(x)$ ஆனது (1, 3) மீது அதிகரிக்கும் அதே வேளை, $(-\infty, 1)$ மீதும் $(3, \infty)$ மீதும் குறைகின்றது.

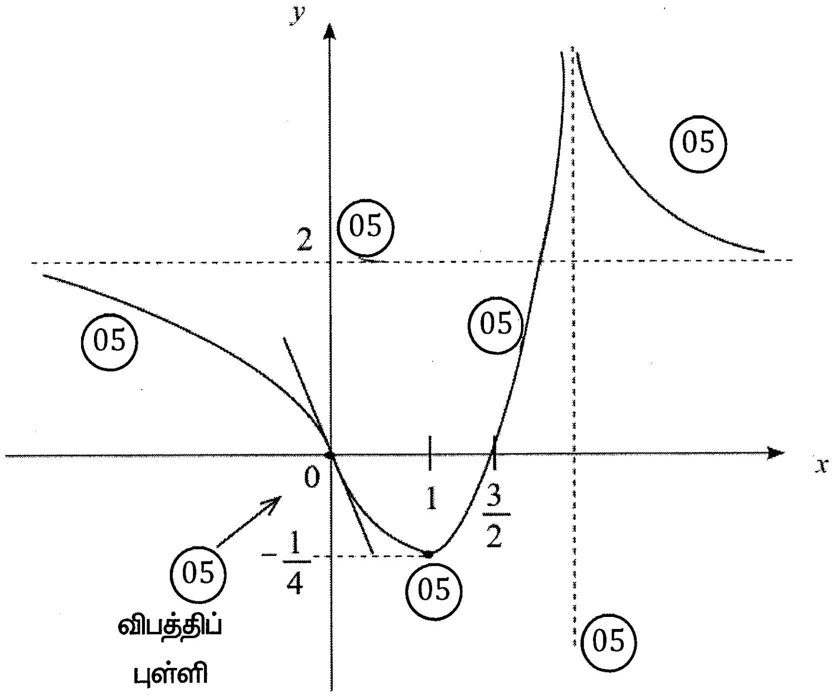
20

திரும்பற் புள்ளி : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ஓர் ஒளிட இழிவாகும்.

05

கிடை அணுகுகோடு : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore y = 2$

நிலைக்குத்து அணுகோடு : $x = 3$



45

$$\frac{1}{1+f(x)} \le \frac{1}{3}$$

$1+f(x) > 0$ ஆகும்.

$\therefore 3 \le 1 + f(x).$

$\therefore f(x) \ge 2.$ 05

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x(2x-3) = 2(x-3)^2.$ 05

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 6x + 9)$

$\Leftrightarrow x = 2$ 05

x இன் தேவையான பெறுமானங்கள் $2 \le x < 3, \quad x > 3$ ஆகும்.

20

(b) $x^2h = 4500$

இதிலிருந்து $S = 2x^2 + 3xh$

$= 2x^2 + 3x.\frac{4500}{x^2},$ x> 0 இற்கு

05

$\therefore \frac{ds}{dx} = 4x - 3\times4500\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^3 - 3375\right)}{x^2}$

05

$\frac{ds}{dx} = 0$ 05 $\Leftrightarrow x = 15$ 05

$0 < x < 15$ இற்கு $\frac{ds}{dr} < 0;$ $x > 15$ இற்கு, $\frac{ds}{dr} > 0$ 05

$\therefore x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும். 05

35