

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1991
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I
(02) Applied Mathematics I

02	
S	I

පැය තුනයි / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O, A, B, C යනු O, A, B ලක්ෂ්‍ය එක රේඛීය නොවන පරිදි වූ ප්‍රමිත ලක්ෂ්‍ය හතරකි. α හා β යනු නිශ්ශුන්‍ය සංඛ්‍යා වී $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{OC} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ වේ.

(i) OA රේඛාව මත D නම් ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන ඇත්තේ $\vec{OD} = \gamma\mathbf{a}$ වන පරිදි ය. $\vec{DC} = \delta\mathbf{b}$ වන අයුරින් γ හිත් δ හිත් අගයන් සොයන්න.

(ii) $\alpha, \beta, \mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරින් $\vec{AB}$ හා $\vec{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\alpha + \beta = 1$ නම්, A, B, C ලක්ෂ්‍ය එක-රේඛීය බව පෙන්වන්න. තව ද, A හිත් B හිත් අතර C පිහිටන බව දී ඇති නම්, α ඇසුරෙන් පමණක් $AC : CB$ අනුපාතය ප්‍රකාශ කර, $0 < \alpha < 1$ බව අපේක්ෂා කරන්න.

(iii) P, Q යනු $\vec{OP} = 2\mathbf{a}$ ද $\vec{OQ} = 3\mathbf{b}$ ද වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AB හිත් PQ හිත් ඡේදන ලක්ෂ්‍යය R ය. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\vec{OR}$ ප්‍රකාශ කර, $AR : RB$ හා $PR : RQ$ යන අනුපාත සොයන්න.

2. (අ) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යන නිශ්-ශුන්‍ය දෛශික දෙකේ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ අදිය ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. පහත සඳහන් ඒවා පිහිටුවන්න :

(i) $(-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

(ii) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ලම්බ නම් ම පමණක් $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

$\mathbf{e}$ යනු ඒකක දෛශිකයක් නම් $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ යන ඕනෑම දෛශික තුනක් සඳහා

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) ABC යනු ත්‍රිකෝණයකි. අදිය ගුණිතය පිළිබඳ ගුණ භාවිත කර, ABC ත්‍රිකෝණයේ, A, B, C යන ශීර්ෂවල සිට පිළිවෙළින් BC, CA, AB සමමුඛ පාදවලට ඇඳි AL, BM, CN ලම්බ එකලක්ෂ්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

3. a හා b යන දෛශික දෛශක $a \times b$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$Oxyz$ යනු සූරත් සාප්තෝණෙහි කාර්ටීසිය බන්ධන දේශිකයකි. i, j, k යනු පිළිවෙලින් Ox, Oy, Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික යි.

$i \times i$ සහ $k \times j$ සොයන්න.

O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්,

$$p = 2i - 3j + k,$$

$$q = i - j + 2k$$

$$r = -i + 2j + 3k$$

වේ. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ S ලක්ෂ්‍යයේ s පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

තව ද

(i) $\vec{PQ} \times \vec{PS}$ ද

(ii) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ද

(iii) $PQRS$ තලයට ලම්භ ඒකක දෛශිකය ද සොයන්න.

4. ඛර W වූ ද G ඉරුක්වි ගන්නාදයෙන් දණ්ඩ a හා b දිගැති ගොටක් දෙකකට බෙදන්නාවූ ද AB දණ්ඩක දෙකෙළවරට I ($> a + b$) දිග ලුහු අවිභාග්‍ය තන්තුවක් ගැට ගසා තිබේ. තන්තුව, කුඩා සුමට P නාදක්කත් උඩින් යවා දණ්ඩ සම්පූර්ණයෙන් තබා ඇත.

(අ) (i) $\hat{APG} = \hat{BPG}$ බව ද

(ii) $\cos \hat{APG} = \frac{a+b}{2I} \left[\frac{I^2 - (a+b)^2}{ab} \right]^{\frac{1}{2}}$ බව ද

පෙන්වන්න.

(ආ) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

5. n ඒකතල බල පද්ධතියක r වැනි (X_r, Y_r) බලය, තලයේ වූ Oxy සාප්තෝණෙහි කාර්ටීසිය අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් $A_r \equiv (x_r, y_r)$, $r = 1, 2 \dots n$, ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරයි.

$P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යය වටා බල පද්ධතියේ G_P සූර්ණය,

$$G_P = G_0 - xY + yX$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි

$$G_0 = \sum_{r=1}^n (x_r Y_r - y_r X_r), \quad X = \sum_{r=1}^n X_r, \quad Y = \sum_{r=1}^n Y_r.$$

ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, BC හා CA පාද පිළිවෙලින් $x + y = a$, $y - x = a$ හා $y = 2a$ මගින් දෙනු ලැබේ: මෙහි $a > 0$. විශාලත්වය R, R හා S වූ ද පිළිවෙලින් AB, BC හා CA ඔස්සේ අක්ෂරවල පටිපාටියෙන් දක්වෙන අතට ක්‍රියා කරන්නා වූ ද බල තුනකින් හා සූර්ණය $2aS$ වූ ද ABC ත්‍රිකෝණයෙහි තලයේ ACB අභිදිශාවට ක්‍රියා කරන්නා වූ ද යුග්මයකින් පද්ධතියක් සමන්විත වෙයි. $S + \sqrt{2} R$ නම් පද්ධතිය, තනි බලයකට උත්තතය වන බව පෙන්වා, එහි ක්‍රියා වේදාවේ සම්කරණය සොයන්න.

$S = \sqrt{2} R$ වීම කීමෙන් සිදු වෙයි ද?

6. එක එකක බර W ද දිග $2a$ ද වන AB සහ AC සමාන, ඒකාකාර දඩු දෙකක් A හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර, B හා C දෙකෙළවර සුමට තිරස් මෙසයක් මත පිහිටන සේ සිරස් තලයක තබා ඇත. සමතුලිතතාව පවත්වා ගන්නේ C ලක්ෂ්‍යයත් AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කැරෙන ලුහු අවිභ්‍යාස තත්ත්වයක් මගිනි. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමඟ α ($< \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදයි. තත්ත්වයේ ආතතිය,

$$T = \frac{W}{4} \sqrt{1 + 9 \cot^2 \alpha}$$

බව පෙන්වන්න.

A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයක් දිශාවක් සොයන්න.

7. ආධාරකයේ අරය r ද අඩු සිරස් කෝණය α ද වන ඒකාකාර සෘජුවෘත්තාකාර ඝන, කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, සිරස්යේ සිට $\frac{3}{4} r \cot \alpha$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

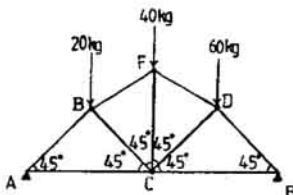
ඒකාකාර සෘජුවෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ජීවත්තකයක, වෘත්තාකාර දෙකෙළවරේ අරයන් a හා λa ($\lambda > 1$) ද උස h ද වෙයි. කුඩාතම ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ජීවත්තකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර

$$\frac{h}{4} \left(\frac{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1} \right)$$

බව පෙන්වන්න.

කුඩාතම ආධාරකයෙහි පරිධියේ වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ජීවත්තකය නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබෙයි. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී අක්ෂය, සිරසට α ($< \frac{\pi}{2}$) කෝණයකින් ආනත වෙයි. $\tan \alpha$ සොයන්න.

8.



ඉහත දක්වන පරිදි B , F හා D සන්ධිවල දී භාරයන් යෙදූ ලුහු දඩුවලින් යුත් රාමු ශැකිල්ලක් රූපයෙන් නිරූපණය වෙයි. AC හා CE තිරස් ය. ඒ එක එකක් මීටර 10 ක් දිග ය. $CF =$ මීටර 8 යි. තව ද $AB = BC = CD = DE$ වන අතර $BF = FD$ වේ. A හිත් E හිත් ප්‍රතික්‍රියා සිරස් යැයි උපකල්පනය කරමින් ඒවා ගණනය කරන්න.

A සන්ධියෙන් ආරම්භ කර ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. දඩුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග නිශ්චය කරන්න.

9. බර W වූ ද දිග $2a$ වූ ද ඒකාකාර AB දණ්ඩක්, එහි A කෙළවර රළු තිරස් පොළවකට ද B කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියකට ද හේන්කු වන සේ තිරසට α කෝණයකින් තබා ඇත. දණ්ඩ, බිත්තියට ලම්භ සිරස් තලයක පිහිටයි. A හි දීත් B හි දීත් සර්ඝ සංගුණකය μ (< 1) වෙයි. දණ්ඩ සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පවතී නම්

$$\tan \alpha = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}$$

බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩේ තිරසට ආතතිය θ ($< \alpha$) නම් ද දණ්ඩ පහළට ලිස්සා යාම යන්නේ වැළැක්වෙන පරිදි M සුර්ණයෙන් යුත් යුග්මයක් දණ්ඩ භරතා යන සිරස් තලයේ යොදන්නේ නම් ද

$$(1 + \mu^2) M = (1 - 2\mu \tan \theta - \mu^2) Wa \cos \theta$$

බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍ර ආස්තරයක්, භ්‍යන්තරය ρ වන සමජාතීය ද්‍රව්‍යක ගිල්වා ඇත්තේ එහි ඉහළ AB ආරය තීරය ව ද BC සිරස් ව ද පිහිටන පරිදි ය. AB හි දිග $= b$ ද BC හි දිග $= a$ ද වෙයි. AB ඇත්තේ ද්‍රව පෘෂ්ඨයට පහළින් h ගැඹුරකින් නම්, පිටත කේන්ද්‍රය AB ට පහළින්

$$\frac{a}{3} \frac{(2a + 3h)}{(a + 2h)}$$

ගැඹුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

දත් AB පාදය ද්‍රව පෘෂ්ඨයට එන තෙක් $ABCD$ ආස්තරය සිරස් ලෙස ඔසවනු ලැබේ. BD විකර්ණය වටා නිදහස් ලෙස භ්‍යරේන්තව හැකි වන පරිදි ආස්තරය විවර්තයී නළ හොත්, එය BD වටා භ්‍රමණය වීම් වළක්වා-ලීමට අවශ්‍ය යුග්මයේ සූර්ණය

$$\frac{1}{12} \frac{a^3 b^2 \rho g}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

බව පෙන්වන්න.

11. උස h ද සිරස් කෝණය 60° ද වන සෘජුවෘත්ත කේතුවක් ජලයේ ගිල්වා ඇත්තේ එහි ශීර්ෂය ජලය පෘෂ්ඨයේ පිහිටන ලෙසත් එහි අක්ෂය තිරස සමග 60° කෝණයක් සෑදෙන ලෙසත් ය. කේතුවෙන් විස්ථාපනය වන ජලයේ බර W නම්,

(i) කේතුවේ ආධාරකය මත තෙරපුම $\frac{3\sqrt{3}}{2} W$ බව ද,

(ii) කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුම $\frac{\sqrt{13}}{2} W$ බව ද,

පෙන්වන්න.

වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුමේ දිශාව කිවෙක් ද?

12. ද්‍රවස්ථිති විද්‍යාවේ එන ආකිමිඩීස් මූලධර්මය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒකාකාර සෘජු ප්‍රිස්මයක හරස්-කඩ වක්‍රයේ ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයකි. එහි $AB = BC$. ප්‍රිස්මයේ විශිෂ්ට භ්‍රමණවය σ (< 1) ය. A උක්ෂය ඉහළින් ම පිහිටන සේ ප්‍රිස්මය ආශික්‍ෂ වශයෙන් ජලයේ ගිල්වා ඇත. ජල පෘෂ්ඨයෙහි අවල ව තබා ඇති C හරහා යන දාරය වටා ප්‍රිස්මයට භ්‍යරේන්තව නිදහස කිසිවක් යටිඳක් සිරස සමඟ BC හි ආනතිය θ නම්, සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී θ ,

$$\cot^3 \theta + (2 - \sigma) \cot \theta - 2\sigma = 0$$

සමීකරණය සසුරා-ලන බව පෙන්වන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1991 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

02	
S	II

පැය තුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)(y+2)}{x(y-1)(x+2)}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) $2x + 3y = u$ ආදේශය මගින්

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y + 4}{4x + 6y + 1}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වුව $y = ux$ ආදේශය භාවිතයෙන්

$$x \frac{dy}{dx} = y + x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

2. සෘජු මාර්ගයක් හස්තේ ධාවනය කළුරෙනා බස් රථයක වියදමෙන්, එයට ඉදිරියෙන් ඇති H බස් නැවතුම් පොළේ බස් රථයට ගොඩ වීමට බලාපොරොත්තුවන්නේ සිටින මගියකු දකියි. $AH =$ මීටර a වන පරිදි වූ A නම් ලක්ෂ්‍යයට එළඹෙන විට බස් රථයේ ප්‍රවේගය $m s^{-1}$ විය. H හි දී බස් රථය නවීනීකරණය $AB = BC = CH$ වන පරිදි A, B, C යන ලක්ෂ්‍යවල දී වියදමා පිට පිට ම නිරිත යොදයි. AB, BC හා CH ප්‍රාන්තවල දී, බස් රථයේ භ්‍රමණ පිළිවෙලින් $f, 2f$ හා $3f m s^{-2}$ වෙයි. බස් රථයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග - කාල වක්‍රයක් අඳින්න. එ

නමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $f = \frac{u^2}{4a}$ බව පෙන්වන්න.

B හා C ලක්ෂ්‍ය වෙත පැමිණීමේ දී බස් රථයේ ප්‍රවේගය, u ඇසුරෙන් සොයන්න. A සිට H තෙක් යාමට ගත වන මුළු කාලය,

$$\frac{4a}{u} \left[1 - \frac{(\sqrt{30} + \sqrt{2})}{12} \right]$$

බව පෙන්වන්න.

3. සරල රේඛාවක් දිගේ චලිතය වන අංශුවක්, ඒකක ස්කන්ධයට kx^3 ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය කැරකේ. මෙහි v යනු අංශුවේ වේගය ද k යනු නියතයක් ද වෙයි. අංශුව මත ක්‍රියා කරන එක ම බලය ප්‍රතිරෝධය නම් ගමන් කළ x දුර ඇසුරෙන් v හි t කාලයක් දෙනු ලබන්නේ

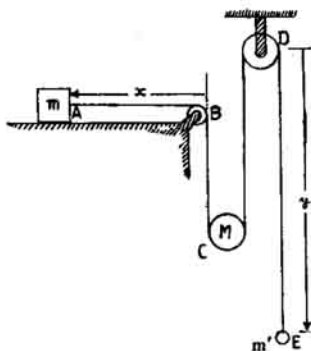
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + kx.$$

$$t = \frac{x}{u} + \frac{1}{2} kx^2.$$

සමීකරණ මගින් බව පෙන්වන්න. එහි u යනු $t = 0$ මොහොතේ දී වේගය යි.

රයිපලයක් යොදා ගෙන කරන ලද එක්තරා පරීක්ෂණයක දී, රයිපලයේ කවෙත් උණ්ඩය නිකුත් වූයේ 800 ms^{-1} වේගයෙන් බවද මීටර 100 ක් ගමන් කළ පසු උණ්ඩයේ වේගය 780 ms^{-1} තෙක් අඩු වූ බවද නිමාණය කරන ලදී. උණ්ඩයේ චලිතයට ඇති වූ ප්‍රතිරෝධය x^3 ට සමානුපාතික වේ යැයි උපකල්පනය කරමින් ද ගුරුත්වය නොසලකා හරිමින් ද මීටර 1000 ක් ගමන් කිරීම සඳහා උණ්ඩයට ගත වන කාලය ආසන්න වශයෙන් තත්පර 1.41 ක් බව පෙන්වන්න.

4.



ඉහත රූප සටහනින් නිරූපණය වන්නේ, අචල සුමට තිරස් මේසයක් මත වන m ස්කන්ධයෙන් යුත් A වස්තුවක් m' ස්කන්ධයෙන් යුත් E අංශුවක් යා කැරෙන $ABCDE$ ලූහු අවිනාශ තන්තුව සමග කුඩා කප්පිවල යැකළමකි. B හා D යන අචල සුමට කප්පි උඩින් තන්තුව යවා ඇත. C යනු තන්තුවේ කොටස් දෙක මගින් දරා සිටින ස්කන්ධය M වන චල සුමට කප්පියකි. තන්තුවේ AB කොටස තිරස් වන අතර BC , CD හා DE කොටස් සිරස් ය. t කාලයේ දී පිළිවෙලින් AB හා DE කොටස්වල දිග x ද y ද නම් m , m' හා M ස්කන්ධ සඳහා වලික සමීකරණ ලියා දක්වන්න. තන්තුවේ T ආතතිය

$$T \left[\frac{4}{M} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right] = 3g$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව අපේක්ෂා කරන්න.

ඒ නැතිව

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$$

නම් C කප්පිය ස්ථාවර ව පවතින බව පෙන්වන්න.

5. ස්කන්ධය M kg වන මෝටර් රථයක එන්ජින්, මෝටර් රථය චලනය වන විට වොට් H නියත ස්වයස් නිපදවයි. රථයේ චලිතයට ඇති ප්‍රතිරෝධය නියත යි. සමකල පාරක මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය $V \text{ ms}^{-1}$ ය.

(i) තිරසර α කෝණයකින් ආනත පාරක් දිගේ කෙළින් ම ඉහළටත්

(ii) $\sin \alpha < \frac{H}{MVG}$ වෙයි නම්, එම පාර දිගේ කෙළින් ම පහළටත්

චලනය වන විට මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය සොයන්න.

ආනත පාරේ පහළට එන විට උපරිම වේගය, එම පාරේ ඉහළට යන විට උපරිම වේගය මෙන් දෙගුණයක් වෙයි

නම් පාරේ තිරසර α ආනතිය, $\sin \alpha = \frac{H}{3MVG}$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

මෝටර් රථය ආනත පාරේ පහළට චලනය වෙයි නම් ද එහි වේගය V නම් ද රථයේ ක්වරණය කීවෙක් ද?

6. ඉහස්යානයක්, පැය T කාලයක ගමනක් (පියාසැරීමක්) සඳහා ප්‍රමාණවත් ඉන්ධන රැගෙන යයි. නිසල කාලගුණයක් තිබෙන විට එහි වේගය $u \text{ km h}^{-1}$ ය. ඉහස්යානයේ ගමන් (පියාසර) මග වෙනස් කිරීම සඳහා ගත වන්නේ නොවිභිය හැකි තරම් කාලයක් යැයි උපකල්පනය කරමින් උතුරේ සිට දකුණු දිශාවට $v (< u) \text{ km h}^{-1}$ වේගයකින් හමන සුළඟක් ඇති විට, θ° උතුරෙන් නැගෙනහිර දිශාවට ඉහස්යානයේ ක්‍රියාත්මක පරාසය (පිටතට යාම හා ආපසු එම),

$$R = \frac{T}{2} \frac{(u^2 - v^2)}{\sqrt{(u^2 - v^2 \sin^2 \theta)}}$$

බව පෙන්වන්න.

R පරාසය උපරිමයක් වන්නේ θ හි කවර අගයක් සඳහා ද?

උපරිම පරාසයක් ලබා ගනු වස්, පිටතට පියාසැරීමේ දීත් ආපසු පියාසැරීමේ දීත් ඉහස්යානය හැසිරවිය යුත්තේ කවර දිශාවලින් ද?

7. සුමට ගෝලයක්, නිශ්චලතාවේ තිබෙන ඒ හා සමාන තවත් ගෝලයක් සමඟ ස්වභාවය වන්නේ, ගැටුම් මොහොතේ දී ඒවායේ කේන්ද්‍ර මධ්‍යය සමඟ θ කෝණයක් සෑදූ දිශාවකිනි. e යනු ප්‍රත්‍යාහනි සංගුණකය යි. චලනය වන ගෝලයේ චලිත දිශාව,

$$\tan \phi = \frac{(1 + e)x}{1 - e + 2x^2}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන ϕ කෝණයකින් අසමමිතිය වන බව පෙන්වන්න. මෙහි $x = \tan \theta$.

θ හි වෙනස් අගයන් සඳහා, $x = \sqrt{\frac{1-e}{2}}$ විට ϕ_0 උපරිම අසමමිතිය ඇති වන බව අපේක්ෂා කෙරේ. ϕ_0 සොයන්න.

8. දුර පතින ක්‍රීඩකයකුට, පොළොවෙන් ඉවත් ව යන මොහොතේ දී (ඔහුගේ දිවීම නිසා) u තිරස් ප්‍රවේගයකුත් සමඟ (ඔහුගේ පැනීම නිසා) තිරසර θ කෝණයකින් භානන λu ප්‍රවේගයකුත් තිබේ. ඔහු පතින l තිරස් දුර,

$$l = \frac{2u^2 \lambda}{g} (1 + \lambda \cos \theta) \sin \theta$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තව දුරටත් $\lambda = 1$ ද l උපරිමයක් වන පරිදි θ කෝණ ගන්නේ ද නම් පැනීමේ දී ඔහු ළඟ වන වැඩි ම උප

ආසන්න වශයෙන් $\frac{l}{7}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.

9. ස්වභාවික දිග $a + b$ ද මාසාංකය λ ද වන AB ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තත්ත්වයක දෙකෙළවර, සුමට තීරස් මේසයක් මත $a + b$ දුරක පරතරයක් ඇති ව සවි කර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් P ලක්ෂ්‍යයේ දී තත්ත්වයට ඇදා ඇත්තේ අංශුව සම්පූර්ණයෙන් පවතින විට $AP = a, PB = b$ වන පරිද්දෙනි. අංශුව, $AQ = a + c$ වන පරිදි ඇති Q ලක්ෂ්‍යයේ දී නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. එහි $0 < c < b$.

එය, $\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ මුළු කාලයකට පසුව $\frac{2c}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ මුළු දුරක් ගමන් කර Q ලක්ෂ්‍යයට ආපසු පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

10. A හා B යනු B ට ඉහළින් A ද ඒවා අතර c පරතරයක් ද තිබෙන සේ උඩකළු සිරස් රේඛාවේ පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. නිදහසේ චලනය විය හැකි C නම් බර, කුඩා මුද්‍රාවක් තුළින් යැවූ ලුහු අචලතා තත්ත්වයක් මගින් එම ලක්ෂ්‍ය සම්බන්ධ කර තිබෙයි. C මුද්‍රාව, ω නියත කෝණික වේගයක් ඇති ව AB මත කෝන්ද්‍රය පිහිටන තීරස් වෘත්තයක් සලකුණු කරන විට A හිත් B හිත් සිට C ට දුර පිළිවෙළින් b හා a වෙයි. $b > a$ බවත් ω^2 යන්න

$$(\cos A - \cos B) \omega^2 = g \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

මගින් දෙනු ලබන බවත් පෙන්වන්න. මෙහි A හා B මගින් පිළිවෙළින් $\hat{BAC}$ හා $\hat{ABC}$ දක්වනු ලැබෙයි. සවි දුරවත්

$$\omega^2 = \frac{2gc}{b-a} \frac{a+b}{\{(a+b)^2 - c^2\}}$$

බව පෙන්වීමට ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා කෝසයින් සූත්‍රය භාවිත කරන්න.

11. දිග a වන OP ලුහු අචලතා තත්ත්වයකට ගැට ගසා ඇති ස්කන්ධය m වන P අංශුවක්, තත්ත්වය ඇදී පවතීයින්, කෝන්ද්‍රය O වන පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක භ්‍රමණය වෙයි. පහළ ම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය V නම් OP රේඛාව යටි සිරය සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තත්ත්වයට T ආකෘතිය

$$T = \frac{m}{a} [V^2 - 2ag + 3ag \cos \theta]$$

යන්නෙන් ලැබෙන බවත් $V^2 > 5ag$ බවත් පෙන්වන්න.

සව ද, ඉහළ ම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය $\frac{V}{2}$ නම් V නිර්ණය කර P අංශුව පහළ ම පිහිටීමේ දී තත්ත්වයට ආකෘතියෙන් ඉහළ ම පිහිටීමේ දී තත්ත්වයට ආකෘතියෙන් අනුපාතය $19 : 1$ බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය M ද දිග a ද වන OA ඒකාකාර දණ්ඩක, O කෙළවර හරහා දණ්ඩට ලම්භ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති පූර්ණය $\frac{1}{3} Ma^2$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩ, O අචල කෙළවර වටා ω කෝණික ප්‍රවේගයෙන් සුමට තීරස් මේසයක් මත වෘත්ත සලකුණු කරයි. O සිට b දුරක තිබෙන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් දණ්ඩ හා ගැටී දණ්ඩ තුළට කාවදීයි. එවිට කෝණික ප්‍රවේගය

$$\frac{Ma^2 \omega}{Ma^2 + 3mb^2}$$

අඩු වන බව පෙන්වන්න.

$Ma^2 = 3mb^2$ නම් ගැටුම නිසා සිදු වන වාලක ශක්තියේ හානිය $\frac{1}{12} Ma^2 \omega^2$ බව පෙන්වන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු අභ්‍යන්තර පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1991 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01). ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics I

01

S

I

පැ තුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $f(r) = \frac{1}{r^2} (r + 0)$ නම්,

$$f(r + 1) - f(r) = - \frac{(2r + 1)}{r^2(r + 1)^2}$$

බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$$\frac{3}{12 \cdot 22} + \frac{5}{22 \cdot 32} + \frac{7}{32 \cdot 42} + \dots$$

ශ්‍රේණියේ පළමුවැනි පද n හි වෙනස සොයන්න.

ඉහත ශ්‍රේණිය අභියාසී වේ ද? ඔබේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

(ii) $|x| < 1$ සඳහා,

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

ප්‍රතිඵලය උපකල්පනය කිරීමෙන්

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

බව පෙන්වන්න.

$$\frac{1}{r(r+1)} \text{ ඒකක භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කිරීමෙන්,}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

බව පෙන්වන්න.

$n \rightarrow \infty$ විට, $S_n \rightarrow 1 - \ln 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

2. (i) $x - 4 < x(x - 4) \leq 5$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාස සොයන්න.

(ii) $y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} n (e^x + e^{-x})$ යැයි ගනිමු; මෙහි $n (\geq 2)$ යනු නියතයකි.

$t = e^x$ යැයි ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

(අ) y හි අවම අගය $\sqrt{n^2 - 1}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $k > \sqrt{n^2 - 1}$ නම්, $y = k$ සමීකරණයට, t සඳහා තාත්ත්වික මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එම මූල සොයන්න.

(ඇ) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ විට, ඉහත මූල දෙකෙන් වඩා විශාල මූලය $1 + \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ බව

පෙන්වා, වඩා කුඩා මූලය ලියන්න.

ඉහත දක්වූ අවමයවෙහි දී, $y = k$ සමීකරණය සපුරාලන x හි තාත්ත්වික අගයන් දෙක, $n (\geq 2)$ හි කවර අගයක් සඳහා වුව ද,

$\log_e \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)$ සහ $\log_e (\sqrt{2} + 1)$ අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $f(x, y, z) \equiv x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$ හි සාධකයක් $(x-y)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නැති, ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට බිඳින්න.

x, y, z වූ කලි ඒවායෙන් ඕනෑම දෙකක් එකිනෙකට සමාණ නොවන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම්, $f(x, y, z)$ ගුණා විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

- (ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + px + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත් නම්, $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න.

මෙම අවස්ථාවෙහිදී, $ax^3 + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගය සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

4. ධන නිඛිලය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුඩාවර ප්‍රමේයය උපකල්පනය කරමින්, සෑම නිඛිලය දර්ශකයක් සඳහා එය සාධනය කරන්න.

- (i) එතු දක්වෙන දෑ සුළු කිරීම සඳහා, අනන්‍ය ප්‍රමේයය භාවිත කරන්න.

(අ) $(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3 (\cos \theta + i \sin \theta)^2$

(ආ) $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) (\cos 4\theta - i \sin 4\theta)$

- (ii) $(\sqrt{5} + 2i)^n$ යන්න $r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි n

නිඛිලය වන අතර θ යනු $\sin \theta = \frac{2}{3}$ වන පරිදි වූ සුළු කෝණයක් වේ.

ඒ නැති, සියලුම n සඳහා

$$(\sqrt{5} + 2i)^n + (\sqrt{5} - 2i)^n$$

තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

$n = 6$ විට මෙම ප්‍රකාශනයෙහි අගය සොයන්න.

5. z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ති සටහනෙහි පිළිවෙලින් P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි ආසාදනය සහ විස්තාරය පහතිනිකව විවරණය කරන්න.

- තව ද, z_1', z_2', z_3' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ති සටහනෙහි පිළිවෙලින් P_1', P_2', P_3' ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$$\frac{z_1' - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{z_2' - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3' - z_2}{z_1 - z_2} \text{ නම්,}$$

එවිට $P_2 P_3 P_1', P_3 P_1 P_2', P_1 P_2 P_3'$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න.

තව ද, $P_1 P_2 P_3$ සහ $P_1' P_2' P_3'$ ත්‍රිකෝණයන්ට එක ම කේන්ද්‍රයක් ඇති බව ද සාධනය කරන්න.

6. (i) ENGINEERING යන වචනයේ අක්ෂර සියල්ල යොදා ගැනීමෙන් ලබා ගත හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ඒවා අතුරින් කොපමණ සංඛ්‍යාවක E අක්ෂර තුන ම එකට එක්වී පිහිටා තිබේද? කොපමණ සංඛ්‍යාවක ඒවා මුලටම පෙනී ද?

- (ii) පත්‍රිකා 32 කින් සමන්විත කාණ්ඩයක පත්‍රිකා 8 ක් කප්පාට ද, 8 ක් රතුපාට ද, 8 ක් නිල්පාට ද 8 ක් කොළපාට ද වේ. එක ම පාට පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ.

(අ) එම කාණ්ඩයෙන් පත්‍රිකා තුනක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර ගණන සොයන්න.

(ආ) (අ) හි වූ තේරීම් අතුරින්, පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වූ පාටවලින් නොපවතින ලෙස වූ තේරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(සැ. යු. සියලු ම ආගණන කායම් පැහැදිලි ව දක්විය යුතු වේ.)

7. ධන නිඛිලය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

(i) $\sum_{r=1}^n r {}^n C_r x^{r-1} = n(1+x)^{n-1}$

බව පෙන්වන්න.

- (ii) $n(1+x)^{n-1}$ සහ $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණවල ගුණිතය සැලකීමෙන්, $\sum_{r=1}^n r ({}^n C_r)^2$ යන්න $n(1+x)^{2n-1}$

ප්‍රසාරණයේ x^{n-1} හි සංගුණකයට සමාන බව පෙන්වන්න.

(iii) $\sum_{r=1}^n r ({}^n C_r)^2 = \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. (i) u සහ v යනු x හි අවකලන ශ්‍රිත නම්, u, v සහ ඒවායේ ව්‍යුත්පන්න ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}(uv)$ සඳහා සූත්‍රයක් ප්‍රමුඛකරණය කර ලබා ගන්න.

(ii) $y = \frac{u}{v}$ නම්, ලඝුගණක ගෙන අවකලනය කිරීමෙන්

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $y = \frac{u_1}{v_1} \frac{u_2}{v_2} \dots \frac{u_n}{v_n}$ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = y \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dx} - \frac{1}{v_i} \frac{dv_i}{dx} \right)$$

බව පෙන්වන්න, මෙහි u, v ආදිය x හි අවකලන ශ්‍රිත වේ.

(iv) $\tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$ යන්න $\tan^{-1} x$ විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

9. (i)
$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නමින්,
$$\int_0^{\pi} x \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^n x dx$$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

තව ද, $n \geq 2$ වුව,

$$n \int_0^{\pi} \sin^n x dx = (n-1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x dx$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඒ නමින්,

$$\int_0^{\pi} x \sin^4 x dx \quad \text{සහ} \quad \int_0^{\pi} x \sin^5 x dx$$

අගයන්න.

(ii) $\frac{d}{d\theta} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) = \sec \theta$ බව පෙන්වන්න.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} \quad \text{සෙවීමට එය භාවිත කරන්න.}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+2) \sqrt{2x^2+6x+5}} \quad \text{ඇගයීම සඳහා}$$

$$y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2} \quad \text{ආදේශය භාවිත කරන්න.}$$

10. $y = \tan^{-1} x$ නම් $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ සහ $\frac{d^3y}{dx^3}$ රාශි x ඇසුරෙන් සොයන්න.
 x^3 පදය තෙක්, $\tan^{-1} x$ හි මැක්ලෝරීන් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.
 කවද, සියලුම තත්ත්වවල x සඳහා, $y = \tan^{-1} x$ හි $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$ ප්‍රස්ථාරයේ කඩ සටහනක් ඇඳ එහිම වැඩිම කම බැවුම් සඳහන් කරන්න. එම සටහනෙහිම, $y = kx$ රේඛාව ද අඳින්න; මෙහි k යනු තත්ත්වවල නියතයකි.
 ඒ නසින්, $\tan^{-1} x = kx$ සමීකරණයට
 (අ) ප්‍රතිත්ත මූල තුනක් නිශ්චය සඳහා.
 (ආ) එක් මූලයක් පමණක් නිශ්චය සඳහා,
 k හි අගයන් පිළිවිස යුතු පරාස ලියන්න.
 $\tan^{-1} x$ සඳහා ඔබ ලබාගත් මැක්ලෝරීන් ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, $12 \tan^{-1} x = 11x$ සමීකරණයට 0.5 ට ආසන්න වූ මූලයක් නිශ්චය බව පෙන්වන්න.
11. C වක්‍රයක් $x = t + 1$, $y = t^3 - t$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලැබේ.
 (i) C හි භෞමි ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒ එක එකක් අනුරූප වන්නේ උපරිමයකට ද අවමයකට ද නම්වර්තනයකට ද යන්න සඳහන් කරන්න.
 (ii) C හි කඩුසටහනක් අඳින්න.
 (iii) ඒ නසින්,
 (අ) $x = t^3 - t$, $y = t + 1$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේත්,
 (ආ) $x = t + 1$, $y = |t^3 - t|$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C'' වක්‍රයේත් කඩුසටහන් අඳින්න.
12. $y^2 = 4x$ පරාවලයෙන් $x^2 - y^2 = 1$ බහුවලයෙන් $x = 4$ රේඛාවෙහිත් දළ සටහන් එක ම රූ සටහනෙහි අඳින්න.
 (i) $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$ සහ $y^2 - 4x \leq 0$ වන සේ වූ S_1 පෙදෙස සටහන් කර, S_1 න් පර්යන්තගත වර්ගඵලය නිර්ණය කරන්න.
 (ii) S_2 යනු $y^2 = 4x$ පරාවලයෙන් හා $x = 4$ රේඛාවෙන් පර්යන්තගත පෙදෙසයි. S_2 වර්ගඵලය, $x = 4$ රේඛාව වටා පෘඪු කෝණ හතරකින් හ්‍රමණය කිරීමෙන් යනනය වන සහයේ පරිමාව සොයන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1991
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01) ඉද්ධ ගණිතය II

(01) PURE MATHEMATICS II

01

S II

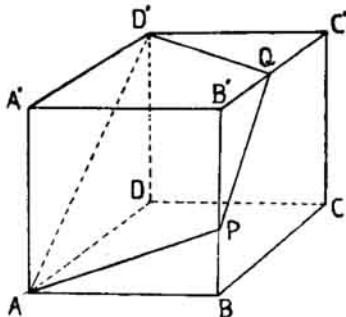
පැය තුනයි / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. D, E, F යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහි පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වන විට AD, BE, CF රේඛා ඒකලක්ෂ්‍ය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සඳහන් කර එය සාධනය කරන්න.

ඉහත අවශ්‍යතාව සැපිරේ නම්, DA, EB සහ FC ට සමාන්තර ව පිළිවෙලින් $B'C', C'A'$ සහ $A'B'$ ඇඳීමෙන් $A'B'C'$ නම් වෙනත් ත්‍රිකෝණයක් අඳිනු ලැබේ. BC ට සමාන්තරව A' හරහා ඇඳි රේඛාව X හිදී $B'C'$ හමුවන අතර CA ට සමාන්තරව B' හරහා ඇඳි රේඛාව Y හිදී $C'A'$ හමුවේ. $A'X$ සහ $B'Y$ රේඛා G හිදී ඡේදනය වේ. $C'G$ සහ BA සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

2.



$ABCD A'B'C'D'$ යනු දරවල දිග a වූ සහකයකි. P වූ කලී $BP = \lambda PB'$ වන පරිදි BB' දරය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AD' රේඛාව සහ P ලක්ෂ්‍යය අඩංගු කලය $B'C'$ දරය Q හිදී හමුවේ. $C'Q = \lambda QB'$ බව පෙන්වන්න.

තව ද, a සහ λ ඇසුරෙන්

(අ) PQ හි දිග,

(ආ) $\cos \angle APQ$,

(ඇ) $APQD'$ හි වර්ගඵලය,

3. $ax + by + c = 0$ රේඛාව මත (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතික්ෂිප්‍තය සොයන්න.

$ABCD$ යනු $B \equiv (1, 0)$ සහ AB, AC හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $y - x + 1 = 0$ සහ $y - 3x = 0$ වන සේ වූ රේඛාසමයකි. DA, CD සහ BC රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

තව ද, $ABCD$ රේඛාසමයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි Q_1, Q_2 ලක්ෂ්‍ය හරහා වූ ස්පර්ශක $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ හිදී හමුවේ. P_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි Q_1Q_2 ස්පර්ශ ඡායයෙහි සමීකරණය

$$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \text{ සහ } x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$$

වෘත්තවලට අනුබද්ධව $(1, -2)$ ලක්ෂ්‍යයේ ස්පර්ශ ඡායා සමීකරණ වන බව සාධනය කරන්න.

තව ද, ඉහත දක්වූ වෘත්තවලට අනුබද්ධව ස්පර්ශ ඡායාන් එකම වන පරිදි වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බව පෙන්වා දීමට බන්ධනායුක්ත සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න

5. (i) O මූලයේ සිට දී ඇති (O තරණ නොයන) l සරල රේඛාවකට ඇඳි ලම්භය, ආරම්භක රේඛාව සමඟ α කෝණයක් සෑදෙන අතර එහි දිග d වේ. l හි සමීකරණය $r = d \sec(\theta - \alpha)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයිත්, $r \cos \theta = 3$ සහ $r \sin \theta = 4$ සමීකරණවලින් සරල රේඛා දෙකක් නිරූපනය කෙරෙන බව පෙන්වා

(අ) ඒවා අතර කෝණය ද,

(ආ) ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ මූලික ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

- (ii) එකම රූප සටහනෙහි,

(අ) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$,

(ආ) $x^2 - 4y = 0$,

(ඈ) $y - x + 1 = 0$

වක්‍රවල කටුසටහන් අඳින්න.

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0$, $x^2 - 4y \geq 0$ සහ $y - x + 1 \geq 0$ අසමානතා සමුදායයකට, $x - y$ කලයේ R පෙදෙස සටහන් කරන්න. R තුළ $x^2 + y^2$ හි වැඩිම අගය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ($at_1^2, 2at_1$) සහ ($at_2^2, 2at_2$) ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $\{ at_1t_2, a(t_1 + t_2) \}$ බව පෙන්වන්න.

($at^2, 2at$) ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්පර්ශකය $P \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යය තරණ වූ ස්පර්ශකය සමඟ α කෝණයක් සෑදී නම්

$$t^2(1 - T^2 \tan^2 \alpha) - 2Tt \sec^2 \alpha + T^2 - \tan^2 \alpha = 0$$

සමීකරණයෙන් t ගෙන දෙන බව පෙන්වන්න.

එවැනි ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව අපෝහනය කර, ඒවායේ Q ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක, T සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

PQ හි සමීකරණය

$$y - 2aT = -\frac{2T}{1 - T^2}(x - aT^2)$$

බව ද පරාවලය මත P වලනය වන විට එය අවල ලක්ෂ්‍යයක් තරණ යන බව ද පෙන්වන්න.

7. $P \equiv \left\{ \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \frac{2bt}{1 + t^2} \right\}$ ලක්ෂ්‍යය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත

පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$b(1 - t^2)x + 2aty = (1 + t^2)ab$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඉලිප්සය මත වූ Q ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$$\left\{ \frac{-2at}{1 + t^2}, \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2} \right\}$$
 වේ. Q හි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.

තව ද, t විචලනය වන විට, (අ) $OP^2 + OQ^2$ (ආ) OPQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

නියතව පවතින බව ද පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

P සහ Q හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙකට T හිදී හමුවේ. t විචලනය වන විට, T ලක්ෂ්‍යය වෙනස් ඉලිප්සයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

8. $x^2 - y^2 = a^2$ බහුවලයේ විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා එහි, S, S' නාභිවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

තව ද, S' සහ S'' ට අනුරූප නියාමකයන්ගේ සමීකරණ ද ලියන්න.

සුදුසු පරිදි ඛණ්ඩාංක අක්ෂ කුලකයක් තෝරා ගැනීමෙන් බහුවලයේ සමීකරණය $xy = \frac{a^2}{2}$ ලෙස ගත හැකි බව පෙන්වා නාභි දෙකෙහි ඛණ්ඩාංක ද අනුරූප නියාමකවල සමීකරණ ද ලියන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයක ස්පර්ශකත්වම දෙකට S නාභියේ සිට ඇඳි ලම්භවල අඩි L සහ M වෙයි. LM යනු S ට අනුරූප වූ නියාමකය බව පෙන්වන්න.

SL රේඛාව N හි දී බහුවලය හමුවේ නම්, N හිදී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකය M තරණ යන බව පෙන්වන්න.

5. (i) O බූවලයේ සිට දී ඇති (O හරහා ගොස්) l සරල රේඛාවකට ඇඳි ලම්භය, ආරම්භක රේඛාව සමඟ α කෝණයක් සාදන අතර එහි දිග d වේ. l හි සමීකරණය $r = d \sec(\theta - \alpha)$ බව පෙන්වන්න. එ නිසින්, $r \cos \theta = 3$ සහ $r \sin \theta = 4$ සමීකරණවලින් සරල රේඛා දෙකක් නිරූපනය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

(අ) ඒවා අතර කෝණය ද,

(ආ) ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ බූවල බිඳවැටීම ද සොයන්න.

- (ii) එකම රූප සටහනෙහි,

(අ) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$,

(ආ) $x^2 - 4y = 0$,

(ඈ) $y - x + 1 = 0$

වක්‍රවල කටුසටහන් අඳින්න.

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0$, $x^2 - 4y \geq 0$ සහ $y - x + 1 \geq 0$ අසමානතා සපුරාලන්නාවූ, $x - y$ කලයේ R පෙදෙස සටහන් කරන්න. R කුළු $x^2 + y^2$ හි වැඩිතම අගය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ($at_1^2, 2at_1$) සහ ($at_2^2, 2at_2$) ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $\{ at_1t_2, a(t_1 + t_2) \}$ බව පෙන්වන්න.

($at^2, 2at$) ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්පර්ශකය $P \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ ස්පර්ශකය සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්

$$t^2(1 - T^2 \tan^2 \alpha) - 2Tt \sec^2 \alpha + T^2 - \tan^2 \alpha = 0$$

සමීකරණයෙන් t ගෙන දෙන බව පෙන්වන්න.

එවැනි ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව අපෝහනය කර, ඒවායේ Q ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ බිඳවැටීම, T සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

PQ හි සමීකරණය

$$y - 2aT = -\frac{2T}{1 - T^2} (x - aT^2)$$

බව ද පරාවලය මත P වලනය වන විට එය අවම ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

7. $P \equiv \left\{ \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \frac{2bt}{1 + t^2} \right\}$ ලක්ෂ්‍යය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත

පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$b(1 - t^2)x + 2aty = (1 + t^2)ab$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඉලිප්සය මත වූ Q ලක්ෂ්‍යයේ බිඳවැටීම

$$\left\{ \frac{-2at}{1 + t^2}, \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2} \right\} \text{ වෙයි. } Q \text{ හි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.}$$

හඳුනා, t විචල්‍යය වන විට, (අ) $OP^2 + OQ^2$ (ආ) OPQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

නියතව පවතින බව ද පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යි.

P සහ Q හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙකට T හිදී හමුවේ. t විචල්‍යය වන විට, T ලක්ෂ්‍යය වෙනත් ඉලිප්සයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

8. $x^2 - y^2 = a^2$ බහුවලයේ විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා එහි, S, S' නාභිවල බිඳවැටීම ලියන්න.

හඳුනා, S සහ S' ට අනුරූප නියාමකයන්ගේ සමීකරණ ද ලියන්න.

සුදුසු පරිදි බිඳවැටීම අක්ෂ කුලකයක් කෙරෙහි ගැනීමෙන් බහුවලයේ සමීකරණය $xy = \frac{a^2}{2}$ ලෙස ගත හැකි බව පෙන්වා නාභි දෙකෙහි බිඳවැටීම ද අනුරූප නියාමකවල සමීකරණ ද ලියන්න.

සෘජුකෝණීය බහුවලයක ස්පර්ශකත්වම දෙකට S නාභියේ සිට ඇඳි ලම්භවල අඩි L සහ M වෙයි. LM යනු S ට අනුරූප වූ නියාමකය බව පෙන්වන්න.

SL රේඛාව N හි දී බහුවලය හමුවේ නම්, N හිදී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකය M හරහා යන බව පෙන්වන්න.