

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
Applied Mathematics I

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O, P, Q යනු එකරේඛීය හෝ වන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. R ලක්ෂ්‍යය, OPQ කලයේ පිහිටා ඇත්තේ

$$\vec{OR} = \alpha \left(\frac{\vec{OP}}{OP} + \frac{\vec{OQ}}{OQ} \right)$$

වන පරිදි ය. මෙහි α යනු අදිශයකි. POQ කෝණය OR හෙත් සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\vec{BC} = \mathbf{a}$, $\vec{CA} = \mathbf{b}$, $\vec{AB} = \mathbf{c}$ වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ B කෝණයෙන් C කෝණයෙන් අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක L හි දී කෙළි වෙයි. $\vec{BL} = \lambda \left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c} \right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ හා $c = |\mathbf{c}|$. එබඳු ම ආකාරයකින් $\vec{CL}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\vec{AL}$ සඳහා ස්වරූපාත්මක ප්‍රකාශන දෙකක් ලියා දක්වන්න.

$$\lambda = \frac{ac}{a+b+c} \quad \text{බව ද} \quad \vec{AL} = \frac{bc - cb}{a+b+c} \quad \text{බව ද} \quad \text{පෙන්වන්න.}$$

ඒ නයින්, ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක තුන එකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

2. නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$\mathbf{i} = \vec{OA}$, $\mathbf{j} = \vec{OB}$, $\mathbf{k} = \vec{OC}$ යනු අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්භ ඒකක දෛශික තුනකි.

α, β, γ යනු $\mathbf{r} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ දෛශිකය පිළිවෙළින් $\mathbf{l}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ දෛශික සමඟ සාදන කෝණයි.

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

බව පෙන්වන්න.

තව ද $\vec{OP} = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ දෛශිකය, $\vec{OA}$ ටත් $\vec{OB}$ ටත් $\vec{OC}$ ටත් සම කේ ආනත බවත් ABC කලයට ලම්භ බවත් පෙන්වන්න. පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී l හි අගය නිර්ණය කරන්න.

(i) ABC කලයේ P පිහිටයි.

(ii) $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්භයි.

(iii) P ලක්ෂ්‍යය, $OABC$ ව්‍යුහාත්මකව සිරස් තලයේ පිට සමීපවත් වෙයි.

3. a හා b නිශ්-ශුන්‍ය දෛශික දෙකේ $a \times b$ දෛශික ගුණිතය අර්ධ දක්වන්න.

(i) a, b හා c යනු නිශ්-ශුන්‍ය වූ ද සමාන්තර හෝ වූ ද දෛශික භූතයි.

$$b \times c = c \times a = a \times b \text{ නම් } a + b + c = 0 \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

විලෝම වශයෙන්, $a + b + c = 0$ නම්

$$b \times c = c \times a = a \times b \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

ඕනෑම මිශ්‍රණයකින් සදහා සයිනි පුත්‍ර අපෝහනය කරන්න.

(ii) L, M, N යන ලක්ෂ්‍ය භූත කෙරේ ද යත් $\overrightarrow{OL} = 1, \overrightarrow{OM} = m$ හා $\overrightarrow{ON} = n$ වන පරිදි වෙයි. මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යි.

$\lambda + \mu + \nu = 0$ ද $\lambda l + \mu m + \nu n = 0$ වන පරිදි වූ λ, μ හා ν යන නිශ්-ශුන්‍ය සංඛ්‍යා පවතියි නම් $m \times n + n \times l + l \times m = 0$ බව පෙන්වන්න.

$m \times n + n \times l + l \times m = 0$ බව දී ඇති නම් L, M, N ලක්ෂ්‍ය එකරේඛීය වන බව පෙන්වන්න.

4. දිග $2a$ ද ධර W ද වූ ඒකාකාර ප්‍රමිති AB දණ්ඩ, එහි අවල A කෙළවර වටා සුවල ලෙස හැරෙන්නට පුරවන. ධර $2W$ වූ භූත ප්‍රමිති C මුද්‍රවකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකි ය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම සිරස් මට්ටමේ පිහිටි D අවල ලක්ෂ්‍යයකට මුද්‍රව ඇඳ ඇත්තේ $\frac{a}{4}$ දිගෙන් යුත් අවිකනය කප්පාදක් මගිනි.

කප්පාදක් දණ්ඩේ එකම සිරස් කලයක පිහිටයි. $AD = \frac{a}{4}$. සම්පූර්ණයෙන් පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුද්‍රව අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ සිරස් සමඟ $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. කප්පාදේ ආකෘතය, A කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාවක් සොයන්න.

5. Oxy කලයේ පිහිටි $A_r = (x_r, y_r)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරන ඒකාකල බල පද්ධතියට $(X_r, Y_r), r = 1, 2, 3, \dots, n$ සංරචක සිංඛයි. $P = (x, y)$ ලක්ෂ්‍යය වටා පද්ධතියේ ක්‍රියා $G = Yx + Xy$ බව පෙන්වන්න.

$$\text{මෙහි } X = \sum_{r=1}^n X_r, \quad Y = \sum_{r=1}^n Y_r, \quad \text{හා } G = \sum_{r=1}^n (Y_r x - X_r y).$$

$X^2 + Y^2 \neq 0$ බව දී සිංඛයි නම්, පද්ධතියේ සම්පූර්ණයෙහි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

$A = (2a, 0)$ ලක්ෂ්‍යය වටා හා $B = (0, a)$ ලක්ෂ්‍යය වටා පද්ධතියේ ක්‍රියා පිළිවෙලින් H හා $2H$ වෙයි. $y = x$ රේඛාවට සමාන්තර වී පිහිටන කොටස්වල රේඛායා ගණය යි. පද්ධතිය සදහා X, Y හා G සොයා සම්පූර්ණය, $x + y = 3a$ රේඛාව මත පිහිටි ක්‍රියා කරන $\frac{H}{a} (-1 + j)$ බලයක් බව පෙන්වන්න.

මෙහි i, j යනු පිළිවෙලින් Ox, Oy අක්ෂ මත පිහිටි ඒකක දෛශික යි.

6. එක එකක දිග a ද බර W ද වූ AB, BC, CD යන සමාන ඒකාකාර දඬු තුනක්, දිග $2a$ ද බර $2W$ ද වූ ඒකාකාර AD දණ්ඩක් A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල දී සුවල ලෙස අසවු කර තිබේ. BC හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ල රාමුකැසිල්ල සම්පූර්ණයෙන්ම පවතියි. A හා B සන්ධිවල දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවල විභාලතාව හා දිශා සොයා එවැනි ප්‍රියා චර්මය BC ට පහළින් $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ භූමිමත දී හමුවන බව පෙන්වන්න.

7. (i) අරය a ද පෘෂ්ඨික සහතිවය σ ද වූ ඒකාකාර අර්ධ-ගෝලීය කබොළකක්,
(ii) උස h ද අඩ-සිරස් කෝණය α ද පෘෂ්ඨික සහතිවය $k\sigma$ ද වූ ඒකාකාර තුනර කෝණිකත් ස්කන්ධය හා ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුසලනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් විශ්ලේෂණය කරන්න.

$a = h \tan \alpha$ බවත් පෘෂ්ඨ දෙක, පොදු වක්ෂයෙන් දෙපස පිහිටන පරිදි ඒවායේ වක්ෂය දර දිගේ එකට මුට්ටු වී ඇති බවත් දී තිබේ.

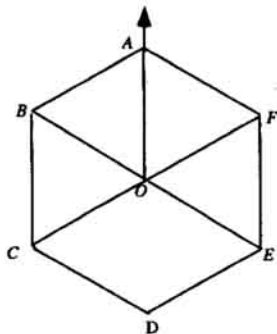
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{36 + k^2} - k}{6}$$

නම්, අර්ධ-ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් සුවල සිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සංපූර්ණ වස්තුවකට සම්පූර්ණයෙන් පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න.

8. ඒකාකාර බර දණ්ඩක W බර, දණ්ඩේ අන්ත දෙකේ තැබූ $\frac{W}{2}$ හා $\frac{W}{2}$ බර දෙකකට තුලන බව (දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව) පෙන්වන්න.

$ABCDEF$ සවිථි ඛඩ්‍යය තනා ඇත්තේ එක සමාන බර, ඒකාකාර දඬුවලිනි. A, B, C, E, F වර්ෂ පහ පිළිවෙලින් OA, OB, OC, OE හා OF ඉහු දඬුවලින් O කේන්ද්‍රයට යා කර ඛඩ්‍යය A හෙන් එල්ලා තිබේ.

බේර අ-කණය යොදා ගෙන ප්‍රකාශවල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නමින් ඉහු දඬුවල ප්‍රකාශවල නිර්ණය කර ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වර්ග කර දක්වන්න.



(1 වැනි රූපය)

9. එක එකක් $2a$ දිගින් යුත් AB, BC සමාන යුතු දණ්ඩ දෙකක් එකිනෙකට සෘජුකෝණී වන පරිදි B හි දී දෘඪ බලක සන්ධි කර, a ආයාමය යුත් අවල රළු සිරස් වෘත්තාක සිලින්ඩරයක් මත තබා ඇත්තේ සිරස්ව සම ලේ ආනතව ද ABC තලය සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බව ද පිහිටන පරිදි ය. W , W සමාන බර A හි දීත් C හි දීත් එල්ලා එල්ලා සම්තුලනය කරමිනි.

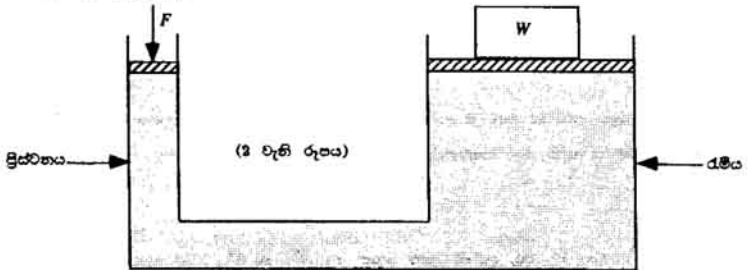
එක් එක් ස්ථරය ලක්ෂ්‍යයේ දී අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ අඩුකම් අගය $\frac{W\sqrt{2}}{1+\mu}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු සර්ඝණ සංගුණකය යි.

පිමාසාරී සම්තුලනයකටත් පරිසිත පරිදි W අමතර බරක් පරෙස්සමින් A හෙත් එල්ලුවහොත්

$$\frac{W}{W} = \frac{2\mu}{\mu^2 - \mu + 1}$$

බවත් $W > 2W$ ඉක්මවිය නොහැකි බවත් පෙන්වන්න.

10. (අ) සිරස් වර්තයේ ද්‍රාව ප්‍රත්‍යාවක ධමයේ කරස්සාඩ වර්තඵලය, පිස්ටනයේ කරස්-සාඩ වර්තඵලය මෙන් n ගුණයකි. (2 වැනි රූපය) සර්ඝණය සේතු කොට ගෙන පිස්ටනයේ කර්මදිගින් ධමයේ කර්මදිගින් ඇති වන ප්‍රතිරෝධය පිළිවෙලින් R kg හා S kg වෙයි. F kg සිරස් බලයක් පිස්ටනයට යෙදුවොත් ධමයෙන් එස්විය හැකි W බර සොයන්න.



- (ආ) අර්ධ-ගෝලීය කබොර දෙකක් එකට මුළුලු කිරීමෙන් ගෝලීය කුහර බඳුනක් සනා ඇත. මුළුලුවේ තලය සිරස් ව පිහිටා ලේ බඳුන තබා එම සිරස් තලයට ඉහළින් h උසකට එන කෙස් ρ සනාන්වයෙන් යුත් ද්‍රවයක් බඳුනට දමනු ලැබෙයි. පහළ අර්ධ ගෝලයෙන් ඉහළ අර්ධ ගෝලය එස්වීමට යන්න දරන $\frac{1}{3} \pi \rho g h^3$ බලයක් ද්‍රවයේ පිඩනයෙන් හට ගන්නා බව පෙන්වන්න.

11. අර්ධ-වෘත්තාකාර ආස්තරයක් එහි සෘජු දරය ද්‍රව-පෘෂ්ඨයේ පවතින ලේ සිරස් ලෙස ද්‍රවයක ගිල්වන ඇත. ආස්තරයේ පිඩන කෝණය $\frac{3\pi\alpha}{16}$ ගැඹුරක පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි α යනු ආස්තරයේ අරය යි.

වෘත්ත සාධක් සහිත සිරස් තලයක එක් කෙළවරක් වටා ඇත්තේ, තලයේ එම කෙළවරේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයට සුවල ලෙස අසලි කළ සිරස් වෘත්තාකාර දෙයක් මගිනි. අනික් කෙළවර දෘඪ ලෙස වටා ඇත. ρ සනාන්වයෙන් යුත් නිශ්චලතාවයේ ඇති ද්‍රවයකින් තලයේ බාහ්‍යයේ පිරී ඇති වීට, දෙර වැසී සිටීම සඳහා දොරේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයට යෙදිය යුතු අඩුකම් බලය සොයන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයේ එන ආසිම්බ්ලි මූලධර්මය සඳහන් කරන්න.

එකාකාර ප්‍රිස්මයක හරස් සාඩ, අසමාන පාද සහිත සෘජුකෝණාස්‍රයකි. සම්මුඛ දුර දෙකක් පෘෂ්ඨයේ සිටින පරිදි ප්‍රිස්මය ජලයේ ඉපිලෙන්නේ ජලයෙන් උඩ සිටින දුරයේ මධ්‍ය-ලක්ෂයට ඇදුනු සන්තුලනය ආධාරයෙනි. පහත සඳහන් ප්‍රතිඵල සෘජුරු කරන්න.

(i) තන්තුව සිරස් ය.

(ii) ප්‍රිස්මයේ විෂ්කට ගුණත්වය $\frac{2}{3}$ යි.

(iii) තන්තුවේ ආතති ප්‍රිස්මයේ බරෙන් හතරෙන් එකකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
Applied Mathematics II

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තත්ව ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. (අ) $\frac{dy}{dx} + xy = y^3x$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුම $y^2 e^{x^2} = c(y^2 - 1)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.
මෙහි c යනු නියතයකි.

- (ආ) Γ තල චක්‍රාසය නිකු ම $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයෙකු ද අනුක්‍රමණය, P ලක්ෂ්‍යයට O මූල ලක්ෂ්‍යය යා කැරෙන රේඛාවේ බැවුම් එකකින් ඉක්මවයි. Γ චක්‍රය $(-1, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්,

$$e^x = |x|^c$$

බව පෙන්වන්න.

2. අංශුවක්, දුනු තරයින් මගින් ආරෝහණයක (මධ්‍යස්ථික) පියස්සෙන් සිරස් ලෙස එල්ලා තිබේ. ආරෝහණයේ උඩුකුරු වලිකය අවස්ථා තුනකින් සිදුවෙයි. පළමු වැනි අවස්ථාවේ දී ආරෝහණය නිසලව සිට නියත ත්වරණයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරයේ පාඨාංකය $(1 + \frac{a}{g}) \text{ kg}$ කි. දෙ වැනි අවස්ථාවේ දී කක්ෂර t_0 පුරා ආරෝහණය ඉහළ නගින්නේ $V \text{ m s}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙනි; එවිට දුනු තරයේ පාඨාංකය 1 kg කි. අවසාන අවස්ථාවේ දී නිශ්චලතාවට එන තෙක් ආරෝහණය නියත මන්දනයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරයේ පාඨාංකය $(1 - \frac{a}{g}) \text{ kg}$ කි. මෙහි $0 < a \leq g$. එම ගමනේ දී ආරෝහණය ඉහළ නැගී මුළු දුර මීටර h ද ගන්නා ලද මුළු කාලය කක්ෂර T ද නම්, එක් එක් අවස්ථාවේ දී ආරෝහණයේ ත්වරණය සොයන්න.

- (i) ආරෝහණයේ වලිකය සඳහා ත්වරණ-කාල වක්‍රය ඇඳ

$$t_0 = T - \frac{2V}{a}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

- (ii) ආරෝහණයේ වලිකය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රය ඇඳ, ඒ නගිත්,

$$V^2 - aTV + ah = 0.$$

බව පෙන්වන්න.

$$T \geq 2 \sqrt{\frac{h}{g}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. OPQ සරල රේඛාවක් සිටියේ V වේගයෙන් චලනය වන අංශුවක් t වේලාවේ දී ඒකක ස්කන්ධයට kV^{n+2} ($n > 0$) ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වෙයි. මෙහි k යනු ධන නියතයක් වන අතර අංශුව මත වෙනත් බල ක්‍රියා නොකරයි. ආරම්භයේ දී, අංශුව O හි සිට u වේගයෙන් ගමන් ඇරඹයි. t කාලයකට පසු O සිට අංශුවට දුර x ය.

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{u}{(1 + knx u^n)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{බවත්}$$

$$(ii) \quad (1 + knx u^n)^{\frac{1}{n}} = [1 + k(n+1)t u^{n+1}]^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{බවත්}$$

සාධනය කරන්න.

අංශුව, P සිට Q තෙක් ගමන් කරන විට එහි වේගය W සිට αW ($\alpha > 0$) තෙක් අඩු වෙයි නම්, P සිට Q තෙක් ගමන් කළ දුර අංශුව මගින් වේගය

$$\alpha W \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

4. (අ) $v \text{ km h}^{-1}$ සිත් යාත්‍රා කරන P බේරිට්ටුවක් A වරායෙන් පිටත් වන්නේ, A ට $d \cos \alpha \text{ km}$ තැනෙකින් වූ B වරායෙන් පිටත් වන Q බේරිට්ටුවේ සිට $d \text{ km}$ ක පරතයක් තුළට පිවිසෙන පරිද්දෙනි. Q බේරිට්ටුව $u (< v) \text{ km h}^{-1}$ සිත් දකුණ දෙසට යාත්‍රා කරයි. පරතය තුළට පිවිසීම සඳහා P බේරිට්ටුව ගමන් කළ යුතු අන්තරා දිග දෙක අතර පෙරේණය 2α බව පෙන්වන්න.

- (ආ) A හා B යනු $|AB| = a$ වන පරිදි කලයක චලනය වන අංශු දෙකකි. මෙහි a යනු නියතයකි. ඕනෑම මොහොතක දී A වෙත B වෙත ප්‍රවේග පිළිවෙළින් $\overline{AB}$ සමඟ වාමාවර්ත අතට $\frac{\pi}{6}$ හා $\frac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන දිශාවලට වෙයි. AB රේඛාවේ කෝණික වේගය $\frac{u}{a}$ නම් ඕනෑම මොහොතක දී A හා B අංශු දෙකේ වේග සොයන්න.

5. 60 km h^{-1} ක ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස චලනය වන ට්‍රක් රථයකින් වේලරයක් ඇද ගෙන යයි. වේලරයේ රථ සෘජුකෝණාස්‍ර පතුල මත තුඩා භාරයක් නිශ්චලව තබා ඇත්තේ වේලරයේ ඉදිරිපස දාරයට මීටර 9 ක් දුරකිනි. $t = 0$ වේලාවේ දී ආරම්භ කර ට්‍රක් රථයට ඒකාකාර මන්දනයක් ඇතුළු ලබන්නේ මීටර d දුරක දී ට්‍රක් රථය නවතින පරිද්දෙනි. භාරය, වේලරයට සාපේක්ෂව චලනය වීමට පටන් ගනියි නම්,

$$\mu < \frac{125}{9d}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු භාරයක් වේලරයේ පතුලක් අතර සර්පණ සංගුණකය යි.

$$d = 25 \text{ ද } \mu = 0.4 \text{ ද නම් භාරය කන්පර } \frac{25 - \sqrt{13}}{6} \text{ ක කාලයක දී } \frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ m s}^{-1} \text{ ප්‍රවේගයෙන් වේලරයේ ඉදිරිපස දාරය වෙත යොමු වන බව පෙන්වන්න.}$$

6. V ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක්, චලිතයට ප්‍රතිරෝධීතා දිශාවට වූ විචලන බලයකින් නිශ්චලකාරීව ගෙන ඒමේ දී කැරෙන භාරයය $\frac{1}{2} mV^2$ බව පෙන්වන්න.

$t = 0$ වේලාවේ දී නිශ්චලතාවෙන් ආරම්භ කරන g බරින් යුත් සෙල්ලම් රථයක් සුමට සිරස් බිමක ගමන් කරයි. t වේලාවේ දී රථය මත F ප්‍රකර්ණ බලය,

$$F = (10 + 19x - 2x^2) g$$

යන්නෙන් ලැබෙයි. මෙහි x යනු t කාලයේ දී රථය ගමන් කළ දුර ද $0 \leq x \leq 12$ ද වෙයි.

- (i) $0 \leq x \leq \frac{19}{4}$ වන විට ද පමණක් රථය මත F ප්‍රකර්ණ බලය වැඩිවන බව පෙන්වන්න.

- (ii) $0 \leq x \leq 12$ විට බලය-දුර වක්‍රය ඇද, ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ රථයේ උපරිම වේගය

$$10\sqrt{\frac{23g}{3}}$$

බව පෙන්වන්න.

- (iii) සෙල්ලම් රථයේ වේගය උපරිම වීම එහි එනම් ක්‍රියා කරන ස්වයං සොයන්න.

7. පොළොවෙන් ඉහළ h උසක නිසලව ඇති m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් සතු ශක්තිය සොයන්න.

තොර්ණික ගැති උසකින් යුත් 20 kg බර ස්වයංක්ෂී, නිරතව චලනයක් $\frac{K}{3}$ ක ආතතියක් සහිත සෘජු පොල් ගසක මුදුනට ගැනීමේ දී ගුරුත්වයට එරෙහිව කැරෙන කාර්යය $2\sqrt{3}$ kJ ය. පොල් ගසේ උස සොයන්න.
ගස මුදුනේ සිටින ස්වයං පොල් ගෙඩියක් සඳහා එහි සිට $V \text{ ms}^{-1}$ වේගයෙන් නිරත සමඟ α ආරෝහණ කෝණයකින් ගෙවිය විසිසරණයෙන් එය පොල් ගස මුදුනට වැටෙන පරිදි ය.

$$\cos \alpha \sin (\alpha + 60) = \frac{25}{V^2}$$

බව පෙන්වන

$$V \geq 10(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. μ ප්‍රවේගයකින් චලනය වන පුම්බ බෝලයක්, අවම පුම්බ කලයක් සමඟ θ කෝණයක් සෑදූ දිශාවක් ඔස්සේ කලයේ ගැටී, පිටි අතර අභිලම්භය සමඟ ϕ කෝණයක් සෑදුම් V ප්‍රවේගයෙන් පොළො පතිවි.

$$\cot \theta \cot \phi = e$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු බෝලයක් කලයක් අතර ප්‍රත්‍යාහනි සංගුණකය වේ.

A, B, C, D යනු පුම්බ, නිරය, පුම්බි රහිත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ක්වඩ්‍රැට් මේසයක කෙරේ සැහැරි. එම මේසයේ දර හතර පුම්බ පිරස් ගැටියකින් වටකොට ඇත. පුම්බ ක්වඩ්‍රැට් බෝලයක් $t = 0$ වේලාවේ දී AB හි P මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\overline{AB}$ සමඟ α කෝණයක් සෑදූ දිශාවකට මේසයේ පාෂෑටිය දෙස μ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබන්නේ, පිළිවෙලින් Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී BC, CD, DA ගැටිලි වැදෙන පරිදි ය. බෝලයක් ගැටීන් අතර ප්‍රත්‍යාහනි සංගුණකය $e (> 0)$ වෙයි. Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී පසළු ගැටුම්වලින් පසු T කාලයක දී බෝලය තම P ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත නැවත පැමිණෙයි නම්,

(i) $PQRS$ සමානාස්‍රාකාරයක් බවත්

$$(ii) \quad T = \frac{a}{2\mu} (\sec \alpha) (1 + e^{-1})^2 \text{ බවත්}$$

සාධනය කරන්න. මෙහි $a = |\overline{AB}|$.

9. AB ප්‍රත්‍යාස්ථ කන්තුවේ ස්ථානාචිත දිග l ය. එහි A ඉහළ කෙළවර සිලිම්කර ඇඳූ කන්තුව නිරතව තබා ඇත. කන්තුවේ B පහළ කෙළවරින් බර අංශුවක් ගැට ගසා කන්තුව නිශ්චලතාවයේ එල්ලෙන විට e විෂයයක් ඇති වෙයි. අංශුව සම්පූර්ණයෙන් නිසිවීමෙන් පසුව $d (> e)$ දුරක් පහළට ඇද නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හැරිය හොත් අංශුවේ චලිතයෙන් කොටසක් $\sqrt{\frac{g}{e}}$ කෝණික සංවෘතය සහිත සරල අක්‍රමවර්ති චලිතයක් බව පෙන්වන්න.

අංශුව සිලිම් වර්ගයෙන් නැතිනම්

$$l > \left(\frac{d^2 - e^2}{2e} \right)$$

බව සාධනය කර

$$2\sqrt{\frac{g}{e}} \left\{ \pi + \frac{\sqrt{d^2 - e^2}}{e} - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{d^2 - e^2}}{e} \right) \right\}$$

මුළු කාලයකට පසු අංශුව යළිත් ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න.

10. I ආවේගයක් මගින් අංශුවක ප්‍රවේගය u සිට v තෙක් වෙනස් කරයි නම් අංශුව ΔE වාලක ශක්ති වෙනස්වීම,

$$\Delta E = \frac{1}{2} I \cdot (u + v)$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න.

එක එකක ස්කන්ධය m වන A, B, C, D සමාන අංශු හතරක් AB, BC, CD සමාන අවිභාගා යුතු තත්ත්වයක තුනකින් සම්බන්ධ කර පූර්ව සිරස් මෙයයක් මත නිසලව ඇත්තේ තත්ත්ව නොසිදුරුල්ල ද AB, BC, CD සවිස්ථ ඝට්ටනයක පාද තුනක් ද වන පරිදි ය. මෙයය දිගේ $\vec{BA}$ දිශාවට I විශාලත්වයෙන් යුත් ආවේගයක් A අංශුවට ලැබෙයි. D අංශුව ආරම්භක වේගය $\frac{I}{28m}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට ලැබෙන වාලක ශක්තිය m හා I ඇසුරෙන් සොයන්න.

11. P අංශුවක් Oxy කලයේ පිහිටි අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වූ වෘත්තයක චලනය වෙයි. P හේ ක්වරණයේ අරය සංරචකයක් සිර්යක් සංරචකයක් පිළිවෙළින් $-a\theta^2$ හා $a\theta$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු OP ක් x -අක්ෂයක් අතර කෝණයයි.

a අරයෙන් හා O කේන්ද්‍රයෙන් යුත් පූර්ව අර්ධ ගෝලයක් එහි පතුල සිරස් කලයෙක පිහිටන සේ සවි කර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් P නම් බර අංශුවක් අර්ධගෝලයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව තිබී මඳක් විස්ථාපනය කළ පසු, අර්ධගෝලයේ චක්‍ර පෘෂ්ඨය මත යව්‍යණය වෙයි. OP අරය උඩු සිරස් සමඟ θ ($< \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදන විට

(i) P හේ ප්‍රවේගයක්

(ii) P මත ප්‍රතික්‍රියාවක්

සොයන්න.

අංශුව අර්ධගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන විට P හේ ප්‍රවේගයේ සිරස් සංරචකයක් සිරස් සංරචකයක් පිළිවෙළින්

$$\frac{\sqrt{24ag}}{9} \quad \text{ද} \quad \frac{\sqrt{30ag}}{9} \quad \text{ද}$$

බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත කැටියක, එහි කලයට ලම්භ කැටියේ කේන්ද්‍රය කරනා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති සූරණය $\frac{1}{2} ma^2$ බව පෙන්වන්න.

m ස්කන්ධයෙන් ද a අරයෙන් ද යුත් ඒකාකාර වෘත්ත කැටියකට, එහි C කේන්ද්‍රය කරනා යන අවල පූර්ව සිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස තිබෙයි. P නම් කෘමියෙක් කැටියේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටි; මුළු පද්ධතිය ම නිසලව ඇත. කෘමියා හට්ටියේ ම, කැටියට සාපේක්ෂව V ඒකාකාර වේගයෙන් කැටියේ ගැටීය දිගේ ගමන් කිරීම අරඹයි. කැටියේ ආරම්භක කෝණික වේගය $\frac{V}{11a}$ නම් කෘමියාගේ ස්කන්ධය සොයන්න.

ඉන් පසුව ඇති වන චලිතයේ දී CP ක් යටිතල සිරස් අතර කෝණය θ නම්,

$$121 a^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 22 ag - 22 ag \cos \theta = 100 V^2$$

බව සාධනය කරන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

01	ශුද්ධ ගණිතය I Pure Mathematics I	S/I	
----	-------------------------------------	-----	--

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $u_r = r(r+1)$ යැයි සිතමු

$\sum_{r=1}^n u_r$ සහ $\sum_{r=1}^n \frac{1}{u_r}$ සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{u_r}$ අභියාචිත වුව ද $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභියාචිත නොවන බව පෙන්වන්න.

එහෙයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$a_r = \frac{r^2(r^2+1)+2(r^3-1)}{r(r+1)}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන a_r , r වැනි පදය ලෙස ඇති ශ්‍රේණියේ මුල් n පදවල රේඛායා සොයන්න.

නව ද, $\sum_{r=1}^n a_r$ අභියාචිත නොවන බව ද පෙන්වන්න.

- (b) S_n යනු

$$\frac{3}{1.2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2.3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි රේඛායා යැයි ගනිමු.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$$

බව පෙන්වන්න.

2. (a) $x^2 > |5x+6|$ වන පරිදි වූ x හි අගයන් සොයන්න.

- (b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයා එහෙයින්, ඕනෑම සෘණ නොවන x, y, z සඳහා

$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ බව පෙන්වන්න.

එන p, q, r සඳහා

$$(i) \frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$$

$$(ii) \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{9}{p+q+r}$$

$$(iii) \frac{p}{q+r} + \frac{q}{r+p} + \frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. (a) $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α සහ β වේ; මෙහි b සහ c තාත්ත්විකය.
 α^2 සහ β^2 මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න.
 $b^3 - 6b + 9 = 0$ සහ $c = 2$ නම්, α සහ β හි තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.
 එනමින්, $y^3 - 6y + 9 = 0$ හි තාත්ත්වික මූලය සොයන්න.

- (b) x සහ k තාත්ත්වික නම්, සියලු ම x සඳහා

$$0 \leq \frac{(x+k)^2}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3} (k^2 - k + 1)$$

බව පෙන්වා, $\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ප්‍රමාණය, එහි කුඩාතම හා විශාලතම අගයන් ගන්නා x හි අගයන් ලබා ගන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මූලාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \quad \text{යැයි සිතමු.} \quad \alpha^r \quad (r = 1, 2, 3, 4) \quad \text{යනු} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

සමීකරණයේ මූල බව පෙන්වන්න.

$\alpha + \alpha^4$ සහ $\alpha^2 + \alpha^3$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය සොයා, එනමින් $\cos 72^\circ$ හි අගය සොයන්න.

5. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාසාංකය සහ විස්තාරය අර්ථ දක්වන්න.

ආරගන් රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යය z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. z^2 නිරූපණය කැරෙන Q ලක්ෂ්‍යය ජ්‍යාමිතික ලෙස නිර්මාණය කරන්නේ කෙසේ දැයි පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය $(1, 0)$ සහ ඒකක අරයෙන් යුත් වෘත්තය මත P පිහිටයි නම්,

(i) $|z^2 - z| = |z|$

(ii) විස්. $(z - 1) =$ විස්. $z^2 = \frac{2}{3}$ විස්. $(z^2 - z)$

බව ජ්‍යාමිතිකව පෙන්වන්න.

6. (a) මුදල් පසුම්බිත රුපියල් පහේ කාඩ් 1 ක් ද රුපියල් දෙකේ කාඩ් 2 ක් ද රුපියල් කාඩ් 3 ක් ද ගස පහකේ කාඩ් 4 ක් ද අඩංගු වේ. කාඩ් 3 ක් කෙරේ ගස හැකි විවිධ ආකාර කොපමණ ද?

- (b) *HOMOGENEOUS* යන වචනයෙහි අක්ෂර (වරකට සියල්ලම ගනිමින්) 3 326 400 ආකාරයකින් පිළියෙල කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මේවායින් කොපමණක් ව්‍යංජනාක්ෂරයකින් පටන්ගෙන එවැන්නකින් අවසාන වේ ද? (ව්‍යංජනාක්ෂරයක් යනු A, E, I, O, U හැර අන් ඕනෑ ම අක්ෂරයෙකි.)

- (c) (i) සංඛ්‍යාංකයන්හි පුනරාවර්තනවලට ඉඩ තිබේ නම්

(ii) සංඛ්‍යාංකයක පුනරාවර්තන දෙකකට වඩා ඉඩ නොමැති නම්

0, 1, 4, 5, 6, 7 සංඛ්‍යාංකවලින් (ශුන්‍යයෙන් ආරම්භ වන සංඛ්‍යා නොගැලකූ විට) සංඛ්‍යාංක හතරකින් යුත් සංඛ්‍යා කොපමණ සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.

7. n ධන නිඛිලයක් වුව, $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියන්න.

ඉහත ප්‍රසාරණයේ මැද පදය

$$\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} 2^n x^n$$

බව පෙන්වන්න.

එම ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදයට විශාලතම සංගුණකය සීමිත පරිදි වූ x හි අගය සරාසායනයෙන්; x ධන යැයි උපකල්පනය කරන්න.

8. (a) $x \neq 0$ වුව, ප්‍රමුඛවර්ත මගින් $\frac{d}{dx} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ලබාගන්න.

(b) $y = e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} \sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

එනමින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ λy ආකාරයෙන් $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න;

මෙහි λ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

- (c) $x = \sin \theta$ සහ $y = \sin n\theta$ යැයි ගනිමු; මෙහි n නියතයක් ද, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ද වේ.

n සහ θ ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ලබා ගෙන, එනමින්

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

බව පෙන්වන්න.

9. (a) $u = \frac{1}{x} - x$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $\int \frac{(1+x^2)}{1+x^4} dx$ අනුකලය අගයන්න.

(b) n ධන නිඛිලයක් යැයි සිතමු.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = 0$$

බව පෙන්වා, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

සවිද්,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2}$$

බව පෙන්වා, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

10. (a) ඕනෑම දර්ශකයක් සඳහා වූ ද්විපද ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, දශමස්ථාන 5 කට නිරවද්‍යව, $\sqrt{24}$ හි අගය සොයන්න.

- (b) $f(x) = \ln \cos x$ නම්

$$f^{(3)}(x) + 2f^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) = 0$$

$$\text{බව සාධනය කරන්න: මෙහි } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

ඊනයිත් හෝ අත් ක්‍රමයකින් හෝ, $f(x)$ හි මැක්‍රොලොරින් ප්‍රසාරණය x^4 හි සඳහා කෙස් ලබාගන්න.

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ ලෙස ගෙන, } \ln 2 \text{ ආසන්න වශයෙන් } \frac{\pi^2}{16} \left(1 + \frac{\pi^2}{96} \right) \text{ ට සමාන බව පෙන්වන්න.}$$

11. සියලු ම තාත්කල්වික t සඳහා,

$$x = \frac{1}{t^4 + 3} \text{ සහ } y = \frac{t}{t^4 + 3}$$

පරාමිතික සමීකරණවලින් C වික්‍රයක් දී ඇත.

(i) t ට එරෙහි ව x ද

(ii) t ට එරෙහි ව y ද

ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඊනයිත් හෝ අත් ක්‍රමයකින් හෝ, ස්පර්ශකය බෙන්ඩාංක අක්ෂවලට සමාන්තර වන ලක්ෂ්‍ය පෙන්වමින් C වික්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $y^2 = 3x(1-x)^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන වික්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(i) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ සඳහා, ඉහත වික්‍රයේ ප්‍රථම වෘත්ත සාදනයෙහි ඇති කොටස C යැයි සිතමු. x අක්ෂය, $x = \frac{1}{3}$

රේඛාව සහ C මගින් අන්තර්ගතවන S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) y අක්ෂය වටා රේඛාව 2π කෝණයකින් S ක්‍රමණය කිරීමෙන් සත්‍යය වන ඝනකයෙහි පරිමාව සොයන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

01	ශුද්ධ ගණිතය II Pure Mathematics II	S / II	පැය තුනයි Three hours
----	---------------------------------------	--------	--------------------------

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (අ) තෙවැනි ප්‍රමේයයේ විලෝමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA, AB පාදවල මධ්‍යලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E, F වන අතර L, M, N යනු A, B, C සිට පිළිවෙළින් EF, FD, DE ට අඳිනු ලැබූ ලම්බවල අඩි වේ. DL, EM, FN ඒකලක්ෂ්‍ය බව සාධනය කරන්න.

- (ආ) ABC ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය H ද BC, CA, AB මත H හි ප්‍රතිබිම්බ පිළිවෙළින් P, Q, R ද වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ සර්වස්කය මත P, Q, R පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

2. AB පාදය CD ට සමාන්තරව ද $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = \beta$ ද වන $ABCD$ ක්‍රමපිටියක, එහි DC පාදය සිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ ද ක්‍රමපිටියමි කළය මේසය සමඟ α කෝණයක් සාදන සේ ද තබා ඇත. A සහ B සිට මේසයට අඳිනු ලැබූ අභිලම්බ පිළිවෙළින් E සහ F වෙයි. θ යනු මේසයට AD හි ආනතිය නම්,

$$\sin \theta = \sin \alpha \sin \beta$$

බව සාධනය කර α සහ β ඇසුරෙන් EDC කෝණයේ සයිනය සොයන්න.

$DC = 3AB$ නම්, සිරසට DB හි ආනතිය

$$\sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \beta}} \right)$$

බව පෙන්වන්න.

3. $y = ax + b$ සරල රේඛාව, $y = mx$ සහ $y = m'x$ රේඛා පිළිවෙළින් A සහ B හි දී ඡේදනය කරනු ලැබේ. මෙහි a සහ b ($\neq 0$) නියත වේ. C ලක්ෂ්‍යය, $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වෙයි; O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

- (i) C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

- (ii) $OACB$ රොම්බසයක් නම්,

$$(a^2 - 1)(m + m') + 2a(1 - mm') = 0$$

බව පෙන්වන්න.

- (iii) $OACB$ සමචතුරස්‍රයක් නම්, එහි වර්ගඵලය $\frac{2b^2}{1 + a^2}$ බව පෙන්වන්න.

4. (අ) a සහ b නියත වුව,

$$\frac{1}{r} = a \cos \theta + b \sin \theta$$

සමීකරණය, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ඇසුරෙන්, සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.
ඉහත රේඛාව, $r = 2c \cos \theta$ වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.

- (ආ) $y^2 - 4x \leq 0$, $x^2 - 4y \leq 0$ සහ $x + y - 3 \geq 0$ වන පරිදි, xy ඝූලයෙහි පිහිටි R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

R හි දී $x + 2y$ හි අවම අගය සොයන්න.

5. $P_1 = (x_1, y_1)$ සහ $P_2 = (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අනෙක වශයෙන් ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය
($x - x_1$) ($x - x_2$) + ($y - y_1$) ($y - y_2$) = 0

බව පෙන්වන්න.

O මූලලක්ෂ්‍යයේ සිට $S \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයට විචල්‍ය ජ්‍යායක් අඳිනු ලැබේ; මෙහි a සහ r ධන වේ.

- (i) $r \geq a$ සහ (ii) $r < a$ අවස්ථාවන්හි දී වෙනස පැහැදිලිව සඳහන් කරමින්, ඉහත කී ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ ස්ථය සොයන්න.

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ වුව ඉහත ස්ථය ගැන කුමක් කිව හැකි ද?}$$

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලය මත පිහිටි, t_1 සහ t_2 පරාමිති සහිත ලක්ෂ්‍ය දෙක යා කැරෙන ජ්‍යායෙහි සමීකරණය සොයන්න.
මෙම ජ්‍යාය නාභිය හරහා යයි නම්, $t_1 t_2 + 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත පරාවලයේ AB නාභීය ජ්‍යායක M මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා, AB ට සමාන දිගක් සහිතව එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද M වන පරිදි x අක්ෂයට සමාන්තරව PQ රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. P හි x ඛණ්ඩාංකය Q හි x ඛණ්ඩාංකයට වඩා කුඩා නම්, P හිත් Q හිත් පථ පිළිවෙළින් $x = -a$ සරල රේඛාවක් $y^2 = a(x - 3a)$ පරාවලයක් බව පෙන්වන්න.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටි, විකේන්ද්‍රික කෝණ θ සහ ϕ වූ P, Q ලක්ෂ්‍ය යා කෙරෙන රේඛාවේ සමීකරණය

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

එනමින්, P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියා P හි දීත් Q හි දීත් ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

A, B, C යනු AB සහ BC අභ්‍රම දිශාවන්ට පවතින සේ, ඉලිප්සයක් මත වූ විචල්‍ය ලක්ෂ්‍ය තුනකි. A සහ C හි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්ථය ඉලිප්සයක් බව පෙන්වන්න.

8. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බහුවලයක සමීකරණය $xy = c^2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වා සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බහුවලයේ දී ඇති ලක්ෂණ දෙකක් යා කෙරෙන ජායමෙහි සමීකරණය සොයන්න.

P_1, P_2, P_3 යනු ඉහත බහුවලය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂණ තුනක් වන අතර H යනු $P_1 P_2 P_3$ ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රයයි. H හි ඛණ්ඩාංක ලබාගෙන, H ලක්ෂ්‍යය බහුවලය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

U සහ V යනු පිළිවෙලින් $P_1 H$ සහ $P_2 P_3$ හි මධ්‍ය ලක්ෂණ වේ. UOV කෝණය $= \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න; O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

9. (අ) ප්‍රසරණ අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක Δ වර්ගඵලය, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$ යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තවද,

$$\frac{\Delta}{\tan \frac{A}{2}} + \Delta \tan \frac{A}{2} = bc \quad \text{බවත්}$$

$$\frac{\Delta}{s \tan \frac{A}{2}} + s = b + c \quad \text{බවත්}$$

සාධනය කරන්න: මෙහි $2s = a + b + c$.

- (ආ) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා,

$$\tan \widehat{AOH} = \frac{|\sin 2B - \sin 2C|}{1 + \cos 2B + \cos 2C}$$

බව සාධනය කරන්න: මෙහි O සහ H යනු පිළිවෙලින් ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ.

10. (අ) විසඳන්න.

(i) $6 \tan^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x$.

(ii) $\cos^{-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1.$

(ආ) $\sin \frac{x+y}{2} = u$ සහ $\cos \frac{x-y}{2} = v$ නම්,

$$\sin x + \sin y = \sqrt{2},$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}$$

යන සමඟාමී සමීකරණ

$$uv = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$$

ලෙස උභෙතය වන බව පෙන්වන්න.

එනමින්, දී ඇති සමඟාමී සමීකරණ x සහ y සඳහා විසඳන්න.

11. A සහ B යනු, සමභාවිත පරීක්ෂණයක නිදාදී අවකාශයක් හා ආශ්‍රිත සිද්ධි අවකාශයට අයත් ඕනෑම සිද්ධි දෙකකි. ප්‍රතිරෝධී අංකනයෙන්,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

බව පෙන්වන්න.

ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වන තෙක්, නිර්දේශ කාසියක් විසිසරනු ලැබේ. පරීක්ෂණයේ නිදාදී අවකාශය ලියන්න.

එක් එක් අවස්ථාව සඳහා

(i) r වැනි විසිසිරීමේ දී

(ii) ඉරවිටේ සංඛ්‍යාවක් සහිත විසිසිරීමක දී

(iii) 3 හ් බෙදෙන විසිසිරීමක දී

ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

12. X විචික්ත සමභාවිත විචලනයට පත්ත දක්වන වගුවේ දී ඇති ආකාරයේ, සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් ඇත : මෙහි a නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$P[X = x]$	.05	a	.06	$(1 - a)^2$	.10

X සඳහා සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති දෙකක් සිද්ධි හැකි බව පෙන්වා, ඒවා සොයන්න.

මෙම X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති එක එකක් සඳහා, X හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලකාරී සොයන්න.

$Y = X^2$ යැයි ගනිමින්, X ට සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති දෙකක් සිටු නමුත් Y ට ඇත්තේ එක් සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් පමණක් බව ද පෙන්වන්න.

Y හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලකාරී සොයන්න.