

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
 கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்த்
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
 பிரயோக கணிதம் I
 Applied Mathematics I

06

S

I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. S_1 නැවතුම්පොළක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹන දුම්රියක වේගය, අනුයේ සිට u උපරිම අගයක් දක්වා, නියත α ශීඝ්‍රතාවයකින් වැඩි වෙයි. මෙම උපරිම වේගය t_1 කාල ප්‍රාන්තරයක් තුළ පවත්වාගෙන ගියායින් පසුව, රෝධක යෙදීමෙන් විචලය මන්දනයක් දුම්රියට ලැබේ. මෙම මන්දනය අනුයේ සිට β දක්වා ඒකාකාරී ලෙස t_2 කාලයක් තුළ වැඩි වන අතර දුම්රිය ඊළඟ S_2 නැවතුම්පොළෙහි දී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එකිනෙකට d දුරකින් පිහිටි S_1 සහ S_2 නැවතුම්පොළ අතර ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට දුම්රිය ගන්නා මුළු කාලය T වෙයි.

ත්වරණ-කාල වක්‍රයේ සහ ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ රූප සටහන්, දෙකම කොටස් තම කරමින් අඳින්න. ඒ නයින් පහත දක්වන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න :

(i) $u = \frac{\beta}{2} t_2$;

(ii) මන්දනය ආරම්භයේ සිට මැත්ත t කාලයේ දී දුම්රියේ වේගය, $v = u - \frac{\beta t^2}{2t_2}$ වේ. මෙහි $0 \leq t \leq t_2$;

(iii) $d = u \left[\frac{2}{3} + \frac{\beta}{4\alpha} \right] t_2 + ut_1$;

(iv) $T = \frac{d}{u} + 2u \left(\frac{1}{3\beta} + \frac{1}{4\alpha} \right)$.

2. (අ) Oxy -තලයෙහි චලනය වන අංශුවක $\mathbf{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය, t කාලයේ දී

$\mathbf{r} = (8 + 20t)\mathbf{i} + (90 + 10t - 5t^2)\mathbf{j}$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි $\mathbf{i}$ සහ $\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙලින් $\vec{Ox}$ සහ $\vec{Oy}$ අක්ෂ දිශේ ඒකක දෛශික වේ. $t = T$ වන විට අංශුව, එහි ආරම්භක චලිත දිශාවට සෘජුකෝණීව චලනය වේ. T හි අගය සහ මෙම මොහොතේ දී අංශුවෙහි පිහිටීමට ආරම්භක පිහිටීමේ සිට දුර සොයන්න.

t කාලයේ දී, අංශුවේ ත්වරණයන් සොයන්න.

- (ආ) මෝටර් සයිකලයක් සෘජු සමතලා පාරක එක් දරයකට සමාන්තරව V නියත ප්‍රවේගයකින් චලනය වන අතර එම දරයේ සිට නියත a දුරක් පවත්වා ගනී. එම දරයේ සිටි ළමයෙක්, මෝටර් සයිකලයට b දුරක් ඉදිරියෙන් පාරට පියවර තබා, පාරට θ කෝණයකින් වූ U නියත ප්‍රවේගයකින් පාරෙන් අනික් පැත්තට ඇවිදගෙන යයි; මෙහි $U < V$ වේ. මෝටර් සයිකලයට සාපේක්ෂව ළමයාගේ පෙත සොයා

$$U > \frac{Va}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

වෙයි නම්, මෝටර් සයිකලයට ඉදිරියෙන් අනතුරක් නැතිව ළමයාට පාරෙන් මාරුවී යා හැකි බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. O මූලයේ සිට u ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබූ අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ, නිදහසේ චලනය වෙයි. t කාලයකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය v ද පිහිටුම් දෛශිකය r ද නම් සහ (සිරස් ව පහළට වූ) ගුරුත්වජ ත්වරණය g ද නම්

$$r = ut + \frac{1}{2} g t^2 = vt - \frac{1}{2} g t^2$$

බව පෙන්වා, මෙම සමීකරණ දෛශික රූප සටහනක නිරූපණය කරන්න.

O ලක්ෂ්‍යය, උඩු සිරස්ව 2β සූර කෝණයකින් ආනත වූ දෘඩ තලයක් මත පිහිටි බව සහ u ප්‍රවේග දෛශිකය මගින් තලය සහ සිරස් අතර කෝණය සමවෘත්තීය කෙරෙන බවත් එහි විශාලත්වය $w \cos \beta$ බවත් දී ඇත්නම්, අදින ලද දෛශික රූප සටහන යොදා ගනිමින්, හෝ අන් අයුරකින් හෝ, පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න :

(i) අංශුවේ පියාසර කාලය $\frac{w}{g}$ වෙයි.

(ii) තලය මත පරාසය $\frac{w^2}{2g}$ වෙයි.

(iii) අංශුව තලය සමඟ ගැටීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය, ආරම්භක වලින දිශාවට ලම්භ වන අතර $w \sin \beta$ විශාලත්වයෙන් යුතු වෙයි.

4. රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මය සහ යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය ප්‍රකාශ කරන්න.

ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, ස්කන්ධය M සහ ආනතිය α වූ සුමට කුඤ්ඤයක ආනත තලය දිගේ පහළට සර්පණය වන අතර කුඤ්ඤයට සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වීමට නිදහස ඇත; ආරම්භයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ පවතී. කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ v වේගය,

$$v^2 = \frac{2(M+m)gx \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වීමට ඉහත සංස්ථිති නියම යොදන්න; මෙහි x යනු කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුව චලනය වී ඇති දුර යි.

ඒ නයින්, හෝ අන්ත්‍රමයකින් හෝ, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය යොදා, ආරම්භක නිශ්චල පිහිටීමේ සිට කුඤ්ඤය ගමන් කර ඇති දුර

$$\frac{m x \cos \alpha}{M + m} \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

5. මුළු ස්කන්ධය M වූ දුම්භියක්, එන්ජිමක් මගින් R ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහි ව සෘජු සමානල දුම්භිය මාර්ගයක් දිගේ ඇදගෙන යනු ලබයි. එන්ජිම කායභීය කරන ශීඝ්‍රතාව H නියතයක් වෙයි.

(i) R නියතයක් වූ විට, නිශ්චලතාවයෙන් පටන් ගෙන U වේගයකට ළඟා වීමට දුම්භිය ගන්නා කාලය

$$\frac{MH}{R^2} \ln \left(\frac{H}{H - RU} \right) - \frac{MU}{R} \quad \text{බව පෙන්වන්න; මෙහි } U < \frac{H}{R} \text{ වෙයි.}$$

(ii) $R = Mk v$ (මෙහි k යනු නියතයක් ද v යනු දුම්භියේ වේගය ද වේ) වූ විට නිශ්චලතාවයෙන් පටන් ගෙන V වේගයකට ළඟා වීමට දුම්භිය ගන්නා කාලය

$$\frac{1}{2k} \ln \left(\frac{H}{H - MkV^2} \right) \quad \text{බව පෙන්වන්න; මෙහි } V < \sqrt{\frac{H}{Mk}} \text{ වෙයි.}$$

$v = V$ වන විට එන්ජිමේ ජවය කපා හැරියේ නම්, (මෙම පිහිටීමේ සිට මැන්න වීමට අවසාන නිශ්චලතා පිහිටීමට පැමිණීමට පෙර දුම්භිය ගමන් කරන දුර සොයන්න.

6. (අ) මල්ලක් තුළ, වර්ණයෙන් හැර අනික් හැම ලෙසින් ම සර්වසම වූ බෝල 5 ක් අඩංගු වේ. ඒවායින් දෙකක් සුදු පාට ද, තුනක් කළුපාට ද වේ. සුදු බෝල දෙකම ලැබෙන තුරු වරකට එක බැගින්, සසම්භාවීව, ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව, මල්ලෙන් බෝල ඉවතට ගනු ලැබේ.

X සසම්භාවී විචල්‍යය, "සුදු බෝල දෙකම ලැබීම සඳහා ඉවතට ගැනීමට අවශ්‍ය වාර ගණන" නම්, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න. X හි මධ්‍යන්‍ය අගය 4 බව පෙන්වා X හි සම්මත අපගමනය සොයන්න.

- (ආ) දුනුවායාගේ, ඉලක්ක ලාල්ලක හරි මැද වෙත ඊයක් විදීමට පුරුදු වෙයි. එක් එක් උත්සාහය සඳහා ස්වායත්ත ව, හරි මැදට විදීමට (සාර්ථකත්වයට) ඔහුගේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{5}$ වෙයි. ඔහුගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වය ලැබෙන්නේ

- ඔහුගේ දෙවැනි උත්සාහයේ දී,
- ඔහුගේ තෙවැනි උත්සාහයේ දී,
- ඔහුගේ සිව්වැනි උත්සාහයේ දී

වීමේ සම්භාවිතාව, දශමස්ථාන තුනකට, සොයන්න.

"දුනුවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථක උත්සාහයක් ඇතුළුව ඒ දක්වා ඔහු කරන උත්සාහ ගණන", Y යැයි ගනිමු. Y විචල්‍යය, සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(Y = r) = \left(\frac{4}{5}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{5}\right), \quad r = 1, 2, 3, 4, \dots$$

සහිත සසම්භාවී විචල්‍යයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$(1 - q)^{-2}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය උපකල්පනය කරමින්, Y හි මධ්‍යන්‍ය අගය 5 බව පෙන්වන්න. දුනුවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වයට කලින් අසාර්ථක උත්සාහ අඩු වශයෙන් හතරක් වත් කිබීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0.41 බවක් පෙන්වන්න.

7. E නම් කාර්යාලීය දුරකථන හුවමාරුවකට මිනිත්තුවක දී ලැබෙන ඇමතුම් ගණන, X , මධ්‍යන්‍යය μ වූ පොයිසොන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන අතර X හි සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(X = r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

වෙයි.

පැය 10 කින් යුක්ත සෑම වැඩ කරන දිනක දී ම E වෙත සාමාන්‍යයෙන් ඇමතුම් 240 ක් ලැබෙන බව දී ඇත්නම් μ හි අගය සොයා මෙම මධ්‍යන්‍යය සඳහා පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල පිළිවෙන්න:

- (i) මිනිත්තු තුනක කාල ප්‍රාන්තරයක දී බොහෝදුරට ලැබිය හැකි ඇමතුම් සංඛ්‍යාව 1 ක් වේ.

- (ii) මිනිත්තු t කාල ප්‍රාන්තරයක දී අඩුම වශයෙන්, එක් ඇමතුමක් වත් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $1 - e^{-\frac{2t}{5}}$ වේ.

Y සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක්,

" E හුවමාරුව වෙත ලැබෙන අනුගාමී දුරකථන ඇමතුම් දෙකක් අතර කාල ප්‍රාන්තරය" වශයෙන් අර්ථ දක්වෙයි.

Y හි සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

Y හි සම්භාවිතා සන්නව ශ්‍රිතය $\frac{2}{5} e^{-\frac{2t}{5}}$ බව පෙන්වන්න.

අනුගාමී ඇමතුම් දෙකක් අතර මධ්‍යන්‍ය කාලය ගණනය කරන්න.

E හුවමාරුවේ ක්‍රියාකරුවා ගෙවනු ලබන මිනිත්තු තුනේ දී ඇමතුම් කිසිවක් නොලැබුන බව දී ඇත්නම්, ඇමතුමක් අත් නොහැරෙන පරිදි ඊළඟ මිනිත්තු පහ සඳහා ඔහුට හුවමාරුවෙන් බැහැරව සිටිය හැකි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

[අංකක් පිට බලන්න.

8. (අ) "ශුද්ධ බර 250 g" ලෙස ලේබල් කර ඇති ඇසුරුම් තුළට යන්ත්‍රයකින් කේ පුරවනු ලැබේ. ඇසුරුම් 5000 ක ඇණවුමක අඩංගු කේ වල මුළු බර 1275 kg වෙයි. කේ ඇසුරුම් වල ශුද්ධ බර, සම්මත අපගමනය 2 g සහිත ව, ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත්නම් මෙම ඇණවුමෙහි

(i) 250 g ව අඩු බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

(ii) හරියටම 250 g බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

සොයන්න.

- (ආ) බහුවරණ පරීක්ෂණ පත්‍රයක ප්‍රශ්න 50 ක් අඩංගු ය. අපේක්ෂකයෙකු එක් එක් ප්‍රශ්නයට දී ඇති, නිතිය හැකි, පිළිතුරු තුනකින් එකක් යටින් ඉරක් ඇද නිවැරදි බව දක්වම අවශ්‍ය ය. එක් එක් ප්‍රශ්නයට එක පිළිතුරක් පමණක් නිවැරදි වන අතර එවැනි පිළිතුරක් සඳහා අපේක්ෂකයෙකුට එක ලකුණක් ලැබේ. මුළුමණින් ම නුගත් අපේක්ෂකයෙක් සසම්භාවී ලෙස පිළිතුරු යටින් ඉර අඳියි. X සසම්භාවී විචල්‍යය, "ඔහු විසින් නිවැරදි ව යටින් ඉර ඇඳි පිළිතුරු ගණන" ලෙස ගනිමු. X අනුගමනය කරන ද්විපද ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලනාව සොයන්න.

සමත් වීමේ ලකුණ 20 වෙයි නම්, මෙම ද්විපද ව්‍යාප්තිය සඳහා ප්‍රමත සන්නිකර්ෂණයක් යෙදීමෙන්, ඔහු මෙම පරීක්ෂණය සමත්වීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0.1977 බව පෙන්වන්න.

9. නියත m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට, සිරස් ව පහළට, U වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එය ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන්නේ අංශුවේ වේගය v වනවිට mkv ප්‍රතිරෝධයක් ඇති කරන මාධ්‍යයක් තුළ ය. මෙහි k නියතයකි. P අංශුවේ වේගය U කෙරෙහි යථායත්ත සීමාවකට ළඟාවන බව පෙන්වන්න.

t කාලයක දී P අංශුව වැටෙන දුර

$$\frac{g}{k} + \frac{1}{k} \left(U - \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt})$$

බවක් පෙන්වන්න.

P හි ප්‍රක්ෂේප මොහොතේ සිට T කාලයකට පසුව P ට සර්වසම Q අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ සිට, සිරස් ව පහළට, V වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අවසානයේ දී ($t \rightarrow \infty$ එළඹෙන විට) අංශු දෙක අතර දුර $\frac{1}{k} (U - V + gT)$ බව පෙන්වන්න.

අවසානයේ දී Q ට සාපේක්ෂ ව P හි ප්‍රවේගය කුමක් ද?

10. F බලයක ක්‍රියා රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන අතර, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හි පිහිටුම් දෛශිකය a වෙයි. O ලක්ෂ්‍යය වටා F බලයෙහි දෛශික ස්‍රෂ්ණය අර්ථ දක්වා, එහි විශාලත්වය සහ දිශාව පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරන්න.

බල පද්ධතියක් සමන්විත වන්නේ, O මූලය හරහා ක්‍රියා කරන $F_1 = 2i + j - 3k$, $F_2 = 6i + 2j + k$ සහ $F_3 = -4i + j - 2k$ බල සමූහයක් තවත් බල දෙකකි. ඒවා නම්, පිහිටුම් දෛශිකය $a = i - j + 2k$ වූ A ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන, λ නියතයක් වූ, $F_4 = \lambda i + j - 2k$ බලයක් සහ පිහිටුම් දෛශිකය $b = -8i - 4k$ වූ B ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන $F_5 = -7i - j - 2k$ බලයක් වේ. මෙහි i, j, k මගින් පිළිවෙලින් Ox, Oy, Oz සාපේක්ෂණාත්මක කාටීසිය අක්ෂ දිශේ ඒකක දෛශික දක්වයි.

මෙම පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියා කරන R බලයක් සමගින් ස්‍රෂ්ණය G වූ යුග්මයකට උත්තනය කළේ නම් R සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා

$$G = -4i + (2\lambda + 14)j + (\lambda + 9)k$$

බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය, F තනි බලයකට උත්තනය වන පරිදි λ හි අගය නිර්ණය කරන්න. එවිට F සොයා එහි ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය μ පරාමිතියක් වූ, $r = i + j - k + \mu(i - j + 2k)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்த்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05

S

I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හතකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (අ) A, B, C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයේ උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ උපයෝගී කර ගන්නා වූ කුලක වීරයේ නියම සඳහන් කරමින්, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

බව සාධනය කරන්න.

- (ආ) (i) එක් එක් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $f(x)$ ට බහු අගයයන් ගැනීමට පුළුවන් බව ද

$$(ii) \text{ එක් එක් } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ සඳහා } |f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \text{ බව ද}$$

දී ඇත. එක් එක් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $f(x)$ ඇත්තෙන් ම ගත්තේ එක් අගයක් පමණක් බව සාධනය කරන්න. f ශ්‍රිතයක් ද?

- (ඇ) $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ ශ්‍රිතය,

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ යැයි ගනිමු. g එකට එක සහ මතට බව පෙන්වන්න.

එකට එක සහ මතට වූ $h: (0, c) \rightarrow \mathbb{R}$ ශ්‍රිතයක් පවතී ද? මෙහි $c = 10^{-1999}$ වේ. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2. (අ) $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ හි සාධක සොයන්න.

- (ආ) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ සහ $g(x) = 6x^2 - 16x + 19$ යැයි ගනිමු.

$f(x) + \lambda g(x)$ ශ්‍රිතය $a(x + b)^2$ ආකාරයට වන්නේ වූ λ හි අගයයන් සොයන්න ; මෙහි a සහ b තාත්ත්වික නියත වේ.

ඒ නයින්, A, B, c හි අගයයන් දෙමින් $A(x - 3)^2 + B(x + c)^2$ ආකාරයට $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$$g(x) = 10A(x - 3)^2 + 5B(x + c)^2 \text{ බව ද පෙන්වන්න.}$$

තව ද, $\frac{f(x)}{g(x)}$ හි කුඩාතම සහ වැඩිතම අගයයන් ද සොයන්න.

[අනෙක් පිටි බලන්න.

3. (අ) $\left| \frac{x+2}{x-3} \right| > 4$ අසමානතාව විසඳන්න.

(ආ) $(1+i)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලියන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

(i) ${}^nC_k + 2{}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2} = {}^nC_k$ නම්, x සොයන්න.

(ii) ${}^nC_i {}^nC_j = {}^nC_j {}^{n-j}C_{i-j}$ බව පෙන්වන්න.

$n > 10$ සඳහා, $\sum_{i=10}^n (-1)^i {}^nC_i {}^nC_{10} = 0$

බව අපෝහනය කරන්න.

[මෙහි nC_r යන්න පුළුල් අර්ථය ගනී.]

4. සිරිස කුමාරසිංහ ධර් අටත් ප්‍රදර්ශනය කිරීමෙන් "8 - ධර් සංඥාවක්" සෑදේ. කුමාරසිංහ මත ධර් අට සකස් කළ පටිසාථිය මගින් සංඥාවක් නිර්ණය වේ.

- සියල්ල ම වෙනස් ධර් අටක් මගින්
- සියල්ල ම වෙනස් ධර් නවයක් මගින්
- සර්වසම රතු ධර් හතරක්, සර්වසම නිල් ධර් දෙකක් සහ සර්වසම කොළ ධර් දෙකක් මගින්
- සර්වසම රතු ධර් හතරක්, සර්වසම නිල් ධර් තුනක් සහ සර්වසම කොළ ධර් දෙකක් මගින් එකිනෙකම වෙනස් "8 - ධර් සංඥා" කොටස් සෑදිය හැකි ද?

5. (අ) ගණිත අනුක්‍රමය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිතයෙන්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා,

$$\sum_{r=1}^n r(r+1)^2(r+2) = \frac{1}{10} n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

බව සාධනය කරන්න.

- (ආ) අපරිමිත ශ්‍රේණියක U_r නම් r වැනි පදය

$$\frac{2(r+4)}{r(r+1)(r+2)}$$

වෙයි.

ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා, $U_r = A \{f(r) - f(r+1)\}$ වන පරිදි වූ, A නියතයක් සහ f ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

ඒ තයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ඉහත ශ්‍රේණියේ මුළු පද n හි එකතුව සොයන්න.

ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි එකතුව සොයන්න.

6. (අ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left\{ \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}} \right\}$

අගයන්න.

92

$\frac{\pi}{2}$ කරා x එළඹෙන විට ඉහත ශ්‍රිතයේ සීමාව පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ආ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-x^3}{|x^2-1|}, & x \neq -1, 1 \text{ විට} \\ 1, & \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ.

$x=0$ දී හා $x=1$ දී f සන්තතික දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ඇ) $\{(x, f_1(x)) : |x| \leq 2\} \cup \{(x, f_2(x)) : |x| \leq 2\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, x, y \in \mathbb{R}\}$ වන සේ,

$\{x : x \in \mathbb{R}, |x| \leq 2\}$ ප්‍රාන්තරයෙහි සන්තතික වූ f_1 සහ f_2 ශ්‍රිත දෙකක් ලියන්න.

7. (අ) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ නම්, $x=1$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ආ) $y = \left[\ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right]^2$ නම්,

$(1+x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \text{ විට} \\ 2x^2 + 3x, & x \leq 0 \text{ විට} \end{cases}$

යන්නෙන් අර්ථ දැක්වෙන, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $x=0$ දී අවකලන නොවන බව ද, එනමුත්

$g(x) = xf(x)$ යන්නෙන් අර්ථ දැක්වෙන $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $x=0$ දී අවකලන බව ද පෙන්වන්න.

8. $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ යැයි ගනිමු.

$y = f(x)$ ප්‍රස්ථාරය මගින් බෙණ්ඩාංක අක්ෂ හමුවන ලක්ෂ්‍යවල බෙණ්ඩාංක ද හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල බෙණ්ඩාංක ද ගොනාහැර දක්වමින් ඉහත ප්‍රස්ථාරයේ දළ රූ සටහනක් අඳින්න.

තව ද, (i) y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල බෙණ්ඩාංක ද

(ii) හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල (එවා ඇත්නම්) බෙණ්ඩාංක ද

(iii) ස්පර්ශෝත්සුඛ ද

ගෙන හැර දක්වමින්, $y = \frac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ රූ සටහනක් ද අඳින්න.

[අවශ්‍ය වුවහොත්]

9. $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx$ සොයන්න. (ඉභිය : $t = \tan \frac{x}{2}$ යොදා බලන්න.)

$$\frac{\cos^2 x}{2 + \sin x} \equiv A + B \sin x + \frac{C}{2 + \sin x} \text{ වන පරිදි } A, B, C \text{ නියත නිර්ණය කර}$$

ඒ නමින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2 + \sin x} dx$ අගයන්න.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(2 + \sin x) dx = \ln 2 + \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

10. (අ) $V = \frac{y}{x}$ ආදේශය භාවිත කිරීමෙන්,

$$x \sin \left(\frac{y}{x} \right) \frac{dy}{dx} = y \sin \left(\frac{y}{x} \right) + x \left\{ 3 + 2 \cos \left(\frac{y}{x} \right) \right\}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

- (ආ) xy -තලයෙහි පිහිටි C වක්‍රයට $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී y අක්ෂය හමුවේ. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $y = 1$ රේඛාව මත පිහිටයි. $y = \lambda x^2 + 1$ න් ගෙන දෙන පරාවල කුලයට C අයත් වන බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු පරාමිතියකි.

තව ද, ඉහත වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්භ පරාවක්‍ර ද සොයන්න.