

Second Term Test - Grade 13 - 2020

කාලය පැය තුනයි

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I(A කොටස)

01. සියලු $n \in N$ සඳහා $1+4+7+\dots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ බව ගණිත අනුප්පාත මූලධර්මය මගින් පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

02. $|3x-1| > x+3$ යන අසමානතාවය ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන් විසඳන්න.

ඒ නයිත් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $|3x+5| > x+5$ යන අසමානතාවය සපුරාලන x හි අගය පරාසය විසඳන්න

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

03. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^5}{1 - \sin 2x}$ හි අගය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

04. $\frac{1}{2!}, \frac{2}{3!}, \frac{3}{4!}, \frac{4}{5!}, \dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය වන U_r ලියන්න.

$f(r) = \frac{1}{r!}$ නම්, $f(r) - f(r+1), U_r$ ඇසුරින් ලියා එමගින් $\sum_{r=1}^n U_r$ අගයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

07. $y^2 = 8x$ පරාවලය මත, $x^2 + (y+6)^2 = 1$ වෘත්තයට අවම දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

08. ABC ත්‍රිකෝණයක AB හා AC පාදවල ලම්භ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - y + 5 = 0$ හා $x + 2y = 0$ වේ. A ලක්ෂ්‍යය යනු $(1, -2)$ වේ නම්, BC ථේතාවේ සමීකරණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

09. x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $(1, -2)$ සහ $(3, -4)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද වෘත්තවල සමීකරණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\sin 6x + \cos 4x + 2 = 0$ සමීකරණයෙහි විසඳුම් $0 \leq x \leq 2\pi$ පරාසය තුළ සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I B කොටස

❖ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. a. i. $x^2 - 3 + k(2x + 3) = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල අන්තරය 2 නම්, k හි අගය සොයන්න.

ii. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{c}$ වර්ගජ සමීකරණයේ c තාත්වික අගයක් නම්, එම සමීකරණයේ මූල තාත්වික හා ප්‍රතිත්ත බව පෙන්වන්න. මෙහි $x \neq \pm 1$ හා $c \neq 0$ වේ.

b. $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ යන බහුපදය $f(x)$ මගින් නිරූපණය වේ.

i. $(x+1)$ වත් $(x-1)$ වත් $f(x)$ හි සාධක නොවන බව පෙන්වන්න.

ii. $q(x)$ යනු බහු පදයක් ද a හා b නියත ද වන $f(x) \equiv (x^2 - 1)q(x) + ax + b$ යන සර්ව සාමාන්‍යයේ $x=1$ හා $x=-1$ ආදියෙන් හෝ අන අයුරකින් හෝ $f(x)$ බහු පදය $(x^2 - 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.

iii. $f(x)$ බහුපදය $(x^2 + 1)$ න් බෙදූ විට, ශේෂය $2x$ බව පෙන්වන්න.

iv. $f(x) = 2x$ සමීකරණයේ සියලු ම තාත්වික මූල සොයන්න.

12. a. ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක p වැනි සහ q වැනි පද පිළිවෙලින් q හා p වේ. එහි $(p+q)$ වැනි පදය

$$\left(\frac{q^p}{p^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

b. $1 + n^2 + n^4 \equiv (1 + n^2)^2 - n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$$\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \dots \text{ ශ්‍රේණියේ } r \text{ වන පදය වන } Ur \text{ ලියන්න.}$$

ඉහත සර්වසාමාන්‍ය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\frac{1}{2}\{f(r) - f(r+1)\} = Ur$ වන පරිදි $f(r)$

ශ්‍රිතයක් සොයා, එමගින් $\sum_{r=1}^n Ur = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$ බව පෙන්වන්න.

13. a. සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා,

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos[\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right] \sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \text{ බව}$$

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් පෙන්වන්න.

b. PERMUTATIONS යන වචනයේ අකුරු සියල්ලම භාවිතයෙන් සෑදිය හැකි එකිනෙකට වෙනස් වචන ගණන සොයන්න. ඒවා අතරින්

i. P ගෙන් ආරම්භ වී S ගෙන් අවසන් වන වචන

ii. ස්වර අකුරු සියල්ල එකට ඇති වචන

iii. P හා S අතර අකුරු 4ක් ඇති වචන කීයක් වේ ද?

c. පිරිමි ළමයි 9 දෙනෙක් හා ගැහැනු ළමයි 4 දෙනෙක් අතරින් තෝරා ගත් සමාජිකයින් 7 කින් සමන්විත කමිටුවක් සෑදීමට අවශ්‍ය ව ඇත. කමිටුව තුළ

i. හරියට ම ගැහැනු ළමයින් 3 දෙනෙක්

ii. අවම වශයෙන් ගැහැනු ළමයින් 3 දෙනෙක් වත්

iii. උපරිම වශයෙන් ගැහැනු ළමයින් 3 දෙනෙක් ඇතුළත් වන සේ කමිටුව සෑදිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

14. a. $x \neq 1$ හා $x \neq -\frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \frac{16(x+1)}{(x-1)^2(3x+1)}$ යැයි ගනිමු.

$$f(x) \text{ හි ව්‍යුත්පන්නය } f'(x) \text{ යන්න } f'(x) = \frac{-32x(3x+5)}{(x-1)^3(3x+1)^2} \text{ මගින් දෙනු ලබන බව}$$

පෙන්වන්න.

$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

- b. i. පිරමිඩයක ආකාරයට තනා ඇති කුඩාරමක ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වෙයි. එහි ශීර්ෂයේ සිට ආධාරයේ එක් එක් දාරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට දිග $3\sqrt{6} m$ වෙයි. කුඩාරමෙහි පතුලේ වර්ගඵලය A නම්, එහි පරිමාව වන V , $V = \frac{A}{6}\sqrt{216-A}$ බව පෙන්වන්න.
- ii. V උපරිම වන A හි අගය සොයා එම අවස්ථාවේ දී කුඩාරමෙහි උස සහ ආධාරකයේ දාරයක දිග සොයන්න.
- iii. කුඩාරමෙහි පතුල සහ පැති සඳහා එකම වර්ගයේ රෙදි භාවිත කරයි නම්, උපරිම ඉඩ ප්‍රමාණයක් ඇති කුඩාරමක් තැනීමට අවශ්‍ය රෙදි ප්‍රමාණය සොයන්න.

15. a. $\frac{1}{(1-z)(1-2z)} \equiv \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+2z}$ වන පරිදි A හා B නියතයන් සොයන්න.

$t = \sin x$ යන්න ආදේශයෙන් $\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයිත්, $\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx = P \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + Q \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x} \right| + C$ බව පෙන්වන්න. මෙහි C අභිමත නියතයක් වන අතර P, Q නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

b. $f(x)$ යනු $[a, b]$ සංවෘත ප්‍රාන්තරය තුළ අනුකලනය කළ හැකි ශ්‍රිතයක් නම්,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$
 බව සාධනය කරන්න.

$I = \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$ ද $J = \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx$ ද වේ. $I = J$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයිත්, $I = \frac{\pi}{2}(b-a)$ බව සාධනය කරන්න.

c. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int e^{3x} \sin 4x dx$ සොයන්න.

16. a. $P(x_1, y_1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax + by + c = 0$ රේඛාවට ලම්භක දුර සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $A \equiv (7, 11)$ වන අතර BC පාදයේ සමීකරණය $3x - 4y - 2 = 0$ වේ. BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ කෝටිකය 1 වන අතර ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 30ක් වේ. B හා C හි බණ්ඩාංක සොයන්න.

b. x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන ඕනෑම වෘත්තයක සාධාරණ සමීකරණය g හා f තාත්වික නියත විට $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන විචල්‍ය වෘත්තයක් $A(-1, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. A හරහා යන, වෘත්තයේ විචල්‍ය විශ්කම්භයේ අනෙක් කෙළවරේ පථය $y = \frac{1}{12}(x+1)^2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

17. a. $y = 2|\cos 2x|$ හි හා $y = 1 + \sin x$ හි ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් $0 \leq x \leq 2\pi$ පරාසය තුළ එකම සටහනක අඳින්න. ඒ නයින්, $2|\cos 2x| = 1 + \sin x$ සඳහා ඉහත පරාසය තුළ ඇති විසඳුම් ගණන සඳහන් කරන්න.

b. සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වන සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, යම්කිසි ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ වේ නම්, එම ත්‍රිකෝණය සෘජුකෝණී බව පෙන්වන්න. ($\hat{A} \neq \hat{B}$ වේ.)

c. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන x හි අගයයන් සොයන්න.

First Term Test - Grade 13 - 2020

කාලය පැය තුනයි

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
එකතුව		
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ	1
	2
අධීක්ෂණය	

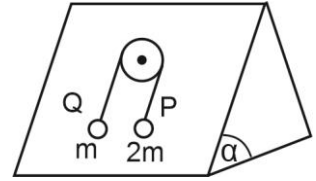
(A කොටස)

-

[illegible]

-
- This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- 03) මේ සමඟ දැක්වෙන රූපයේ පරිදි අවලව සවිකොට ඇති තිරසර α සුළු කෝණයක් ආනත සුමට ආනත තලයක් මත සැහැල්ලු සුමට කප්පියක් සවිකොට ඇත. මෙම කප්පිය මතින් පන්නා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙලින් ස්කන්ධයන් $2m$ හා m බැගින් වූ P හා Q අංශු දෙකක් අමුණා එවා තන්තු ඇදී පවතින ලෙස තලය මත නිසලව තබා සිරුවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. පසුව ඇතිවන චලිතයේ දී එක් එක් අංශුවේ ත්වරණය $\frac{g \sin \alpha}{3}$ බවත් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{4}{3}mg \sin \alpha$ බවත් පෙන්වන්න.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 04) ස්කන්ධය $M \text{ kg}$ වන කාර් රථයක් $R \text{ N}$ ප්‍රතිරෝධකයට එරෙහිව සමතලා මාර්ගයක් දිගේ $H \text{ kw}$ නියත ජවයක් සහිතව නියත $v \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරයි. කාර් රථය මත ප්‍රතිරෝධය $R = \frac{H \times 10^3}{v} \text{ N}$ බව පෙන්වන්න. මෙම රථය ඊළඟට එම $R \text{ N}$ විශාලත්වයෙන්ම යුතු ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව එම $H \text{ kw}$ ජවයෙන්ම තිරසර α කෝණයක් ආනත මාර්ගයක ඉහළ සිට වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ $\frac{v}{2} \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයකින් චලනය වන විට එහි ත්වරණය $\left\{ \frac{H \times 10^3}{Mv} - g \sin \alpha \right\} \text{ ms}^{-2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 05) සුපුරුදු අංකනයෙන් A, B , හා C පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $(2\hat{i} + 4\hat{j})$, $(4\hat{i} + 4\hat{j})$ හා $(\lambda\hat{i} + \mu\hat{j})$ මගින් නිරූපණය වේ. මෙහි λ හා μ තාත්වික නියත වේ. O අක්ෂ මූලය වන විට $OABC$ මගින් ත්‍රැපීසියමක ශීර්ෂ දැක්වේ. මෙහි OA හා CB සමාන්තර වන අතර $CB = \frac{1}{2} OA$ වේ. λ හා μ හි අගයයන් ගණනය කරන්න. $\hat{AOC} = \theta$ නම්, $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{65}}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 06) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර අනෙක් කෙළවර අවල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර සිරස් තලයක නිදහසේ ඵලලෙමින් පවතින විට අංශුව සිරස් තලයේ OP ට ලම්බව (නිරසට) $\sqrt{3lg}$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. OP යටි අත් සිරස සමඟ $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ සුලු කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයා, එවිට තන්තුවේ ආතතිය $\frac{14mg}{5}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 13 - II (B කොටස)

- 11) (a) නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹන අභ්‍යවකාශ යානයක් $\frac{g}{2}$ නියත ත්වරණයක් යටතේ සිරස්ව ඉහළට ගුවන් ගතවේ. T නම් කාලයකට පසු යානයෙන් කොටසක් බිඳී ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව චලනය වී පොළොව මත පතිතවේ. බිඳුන කොටස සිය උපරිම උස පිහිටීමට එළඹෙන මොහොතේ යානය ද ක්‍රියාවිරහිතව ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව චලනය වී පොළොව මත පතිත වේ. අරම්භයේ සිට අභ්‍යවකාශ යානය, බිඳුන කොටස හා ඉතිරි යානය යන කොටස් පොළොව මත පතිත වන තෙක් චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න.

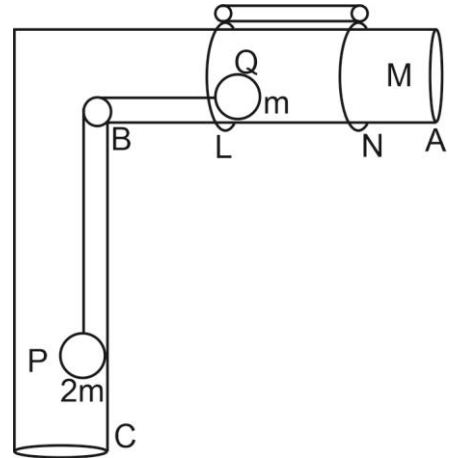
එනමින් යානයෙන් කොටසක් බිඳී යන මොහොතේ යානයේ ප්‍රවේගය $\frac{gT}{2}$ බවත්, බිඳුන කොටස නැග ඇති උපරිම උස $\frac{3gT^2}{8}$ බවත් පෙන්වන්න.

තවද ක්‍රියාවිරහිත වන විට යානයේ ප්‍රවේගය $\frac{3gT}{4}$ බවත් යානය නැග ඇති උපරිම උස $\frac{27gT^2}{32}$ බවත් පෙන්වන්න.

චලිතය ආරම්භයෙන් පසු යානයෙන් බිඳුන කොටස හා යානය පොළොවට පතිත වන්නේ $\frac{\sqrt{3}}{2} gT$ හා $\frac{3\sqrt{3}}{4} gT$ ප්‍රවේග වලින් බව පෙන්වන්න.

- (b) D ප්‍රහාරක යාත්‍රාවක් $u \text{ kmh}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට යාත්‍රා කරයි. S නම් නැවක් $v \text{ kmh}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් නැගෙනහිරින් උතුරට α කෝණයක් ආනත දිශාවක් ඔස්සේ යාත්‍රා කරයි. ($v \cos \alpha > u$) එක්තරා මොහොතක දී S නැව D ප්‍රහාරක යාත්‍රාවට $a \text{ km}$ දුරක් දකුණින් පිහිටයි. S හා D හි සාපේක්ෂ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ ඇඳ ප්‍රහාරක යාත්‍රාවට සාපේක්ෂ ව නැවේ පෙන අඳින්න. ප්‍රහාරක යාත්‍රාව හා නැව අතර කෙටිම දුර $\frac{a(v \cos \alpha - u)}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha}} \text{ km}$ බව පෙන්වන්න. තවද නැව හා ප්‍රහාරක යාත්‍රාව මෙම කෙටිම දුර පිහිටීමට පැමිණීමට S නැව D යාත්‍රාවට a දුරක් දකුණින් පිහිටන මොහොතේ සිට ගතවන කාලය පැය $\frac{av \sin \alpha}{v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha}$ බව ද පෙන්වන්න.

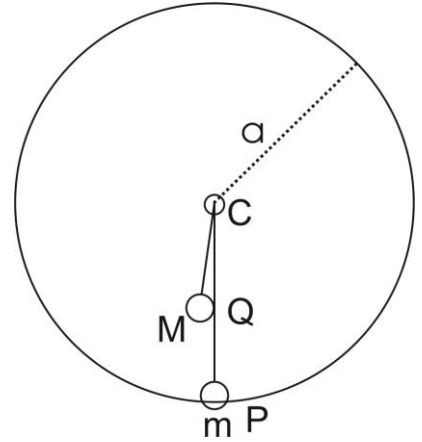
- 12) (a) ස්කන්ධය M වූ තුනී සුමට නලයක් B හිදී සෘජුකෝණීව නමා ඇත. AB කොටස තිරසර වන අතර එයට L හා N සුමට මුදු තුළින් නිදහස්ව තිරස්ව චලනය විය හැක. BC කොටස සිරස්ය. ස්කන්ධයන් පිළිවෙලින් $2m$ හා m වශයෙන් වූ P හා Q අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිනාශ තත්ත්වක දෙකෙළවරට අමුණා තත්ත්ව B හි සවිකොට ඇති සුමට අවල කප්පිය මතින් පන්නා තත්ත්ව ඇදී පවතින ලෙස Q අංශුව AB තල කොටස මතත් P අංශුව BC කොටස තුළ සිරස්ව එල්ලමේන් ද පවතින ලෙස අල්වා තබා සිරුවෙන් අතහරිනු ලැබේ. P අංශුවට BC දිශාවට ද Q අංශුවට AB දිශාවට ද පද්ධතියට BA දිශාවට වූ චලිත සමීකරණ ලබා ගන්න. නලයේ ත්වරණය $\frac{2mg}{3M+8m}$ බවත්,



නලයට සාපේක්ෂව එක එකක් අංශු වල ත්වරණ $\left(\frac{M+3m}{3M+8m}\right) 2g$ බවත්, P අංශුවේ පොළොවට සාපේක්ෂ ත්වරණය,

$\left(\frac{2g}{3M+8m}\right) \sqrt{M^2 + 10m^2 + 6Mm}$ බවත් පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

- b) ස්කන්ධය m වූ සුමට P නම් පබළුවක් සිරස් තලයක අවලව සවි කරන ලද අරය a වූ සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක් තුළින් යවා ඇත. පබළුවට කම්බිය තුළ නිදහසේ සර්පණය විය හැක. පබළුවට ඇඳූ ලුහු අවිනත්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙළවර කම්බි කේන්ද්‍රයේ පිහිටි C නම් සුමට මුද්දක් තුළින් යවා අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය M වූ Q නම් අංශුවකට ඇඳා ඇත. ආරම්භයේ දී P පබළුව කම්බියේ පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ තබා $\sqrt{kga}$ ($k > 1$) වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කරන්නේ, පබළුව කම්බිය දිගේ වෘත්තාකාර චලිතයක් නිරූපණය කරන ලෙසය. P පබළුව ඇඳූ තන්තු කොටස C හරහා යන යටි අත් සිරස සමඟ θ සුළු කෝණයක් තනන අවස්ථාවේ P පබළුවේ වේගය v යන්න,



$v^2 = kga - 2ga + 2ga \cos \theta$ මගින් ලැබෙන බවත්, P පබළුව මත කම්බිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව R යන්න $R = mg \left(k - 2 + 3 \cos \theta - \frac{M}{m} \right)$ මගින් ලැබෙන බවත් පෙන්වන්න.

$k = 6$ යැයි ගනිමින් $m < M < 7m$ වන්නේ නම්, චලිතයේ යම් අවස්ථාවක P පබළුව හා කම්බිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව අතුරුදන්වන බව පෙන්වන්න.

- 13) ස්වභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ගැටගසා ඇත. එහි අනෙක් කෙළවර අවල O නම් ලක්ෂ්‍යයකට ගැටගසා ඇත. P අංශුව සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙන විට එම තන්තුවේ විතතිය l වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න. දැන් P අංශුව O ලක්ෂ්‍යයේ තබා සිරුවෙන් අතහරිනු ලැබේ. අංශුව l දුරක් සිරස්ව පහළට වැටුන පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{2gl}$ බව පෙන්වන්න. P අංශුව O සිට තන්තුවේ දිග x වන විට ($x > l$) අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන් $-\frac{g}{l}(x - 2l) = \ddot{x}$ බව පෙන්වන්න. තවද අංශුවේ ප්‍රවේගය $\dot{x}$ යන්න $A(> 0)$ නියතයක් වන $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(A^2 - x^2)$ මගින් දෙනු ලැබේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A හි අගය ලබා ගන්න.

P අංශුව $2\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \sqrt{2} + \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ කාලයකට පසුව නැවත O ලක්ෂ්‍යය කරා එලඹෙන බව පෙන්වන්න.

- 14) (a) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අභිශූන්‍ය නොවන සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකකි. α හා β අදිශ වන විට, $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = 0$ වීම සඳහා අවශ්‍යතාව $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව සාධනය කරන්න. $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයේ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ මගින් නිරූපණය වේ. D යනු $OD:DA = 1:2$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. BD හා AC , X හිදී ඡේදනය වේ. λ හා μ අදිශ වී $OX = \lambda OC$ හා $BX = \mu BD$ ලෙස ගැනීමෙන් λ හා μ හි අගයන් සොයා $BX:XD = 3:1$ බව හා $OX:XC = 1:3$ බව පෙන්වන්න.
- (b) $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ $AB = a, AD = 2a$ ද, M යනු AD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද වේ. $P, 2P, 4P, 6P, 3\sqrt{2}P$ හා $\sqrt{5}P$ යන බල පිළිවෙලින් CB, DA, BA, CD, MB හා DB දිගේ අකුරුවල පටිපාටියට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය A හරහා යන තනි බලයකට හා යුග්මයකට තුල්‍ය නම් තනි බලයේ විශාලත්වය හා දිශාවක් යුග්මයේ සූර්ණයේ විශාලත්වය $6Pa$ බව පෙන්වා එහි භ්‍රමණ අත සොයන්න.

- 15) (a) AB, BC, CD හා AD යනු බර w බැගින් වන දිග $2a$ බැගින් වන ඒකාකාර දඬු හතරකි. ඒවා නිදහස් ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් $ABCD$ රොම්බසය සාදා තිබේ. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති අතර $AL = CM = \frac{a}{2}$ වනසේ පිළිවෙලින් AB හා BC දඬු මත L හා M ලක්ෂ්‍ය වල දී LM සැහැල්ලු අවිනාශ තන්තුවක් සම්බන්ධ කර ඇත. LM තන්තුව ද AC ද සිරස් වන අතර පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව C ට ඉහළින් A පිහිටන සේ ඇත. $\hat{B}AD = \hat{B}CD = 60^\circ$ බව දී ඇත.

(i) C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එය තිරසර දරණ ආතතිය $\tan^{-1}(2\sqrt{3})$ බව පෙන්වන්න.

(ii) LM තන්තුවේ ආතතිය $\frac{8w}{3}$ බව පෙන්වන්න.

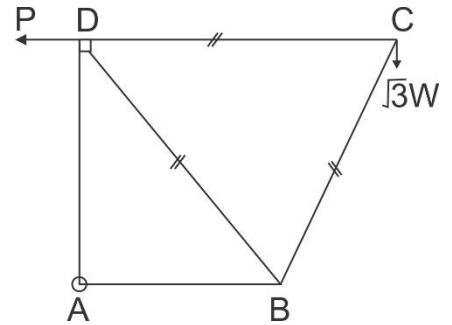
(iii) B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

- (b) AB, BC, CD, BD හා AD සැහැල්ලු දඬු පහක් යාබද රූපයේ පරිදි රාමු සැකිල්ලක් සෑදෙන සේ සුමටව ඒවායේ කෙළවර වලින් අසව් කර ඇත. $BC = BD = CD = 2a$ වේ. A සන්ධිය සුමට ලෙස අවල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර C හිදී $\sqrt{3}w$ භාරයක් එල්ලා D හිදී යෙදූ තිරස් P බලයක් මගින් රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක AB හා DC දඬු තිරස්ව ද AD දණ්ඩ සිරස්ව ද වන සේ සමතුලිතව තබා ඇත.

(i) P හි අගය සොයන්න.

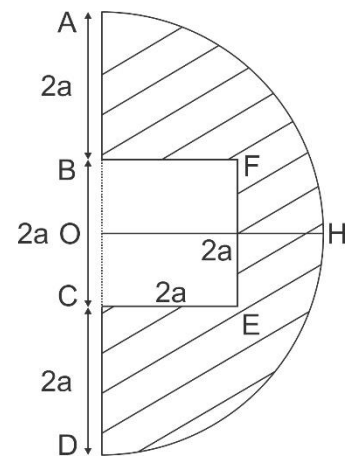
(ii) A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එහි තිරසර ආතතිය සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් එක් එක් සන්ධිය සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. එනමින්, සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වමින් සොයන්න.

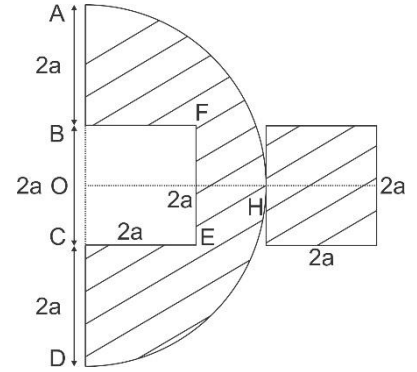


- 16) අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{4a}{3\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

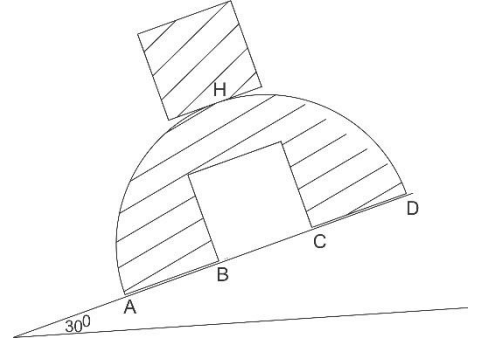
යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරය $3a$ වූ අර්ධ වෘත්තාකාර AHD ඒකාකාර තල ආස්තරයෙන් OH සමමිතික වන ලෙස පැත්තක දිග $2a$ වූ $BFEC$ සමචතුරස්‍රය කපා ඉවත් කර ඇත. එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත O සිට $\frac{28a}{9\pi-8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



අනතුරුව කපා ඉවත් කරන ලද සමවතුරු සහ OH සමමිතික අක්ෂය වන සේ H හි දී යාබද රූපයේ පරිදි සවිකරනු ලැබේ. එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත O සිට $\frac{2a}{3\pi}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි එම ආස්තර තිරසර 30° කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත ස්වකීය තලය සිරස්ව ද AB හා CD දාර උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත ද ඇතිව සමතුලිතව පිහිටයි. $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු ආස්තරය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.



- 17) (a) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයේ ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධි අර්ථ දක්වන්න.
- (i) A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි වේ.
 - (ii) A හා B නිරවශේෂ සිද්ධි වේ.
- (b) A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයක අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු.
- (i) $P(A) = 2a^2$, $P(B) = 2a$ හා $P(C) = 8a - 1$
- නම් a හි අගය සොයන්න.
- (c) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු.
- (i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$
 - (ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.
මෙහි B' යනු B හි අනුපූරක සිද්ධිය වේ.
 $P(A') = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B') = \frac{2}{5}$ නම්,
 $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A' \cap B)$, $P(A' \cup B)$ හා $P(A' \cup B')$ සොයන්න.
- (d) සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{5}$ ක් වූ නැඹුරු කාසියක් 'සේයා' උඩ දමනු ලැබේ. කාසියේ සිරස ලැබුණේ නම්, සර්ව සම රතු බෝල 3 ක් ද, නිල් බෝල 2 ක් ද, ඇති A නම් පෙට්ටියකින් සසම්භාවී ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල 2ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.
කාසියේ අගය ලැබුණේ නම්, සර්ව සම රතු බෝල 2 ක් ද නිල් බෝල 1 ක් ද ඇති B නම් පෙට්ටියකින් ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල 2 ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.
- (i) රතුබෝල 2 ක් ලැබීමේ,
 - (ii) කාසියේ අගය ලැබී රතු බෝල 1 ක් පමණක් ලැබීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

NWP
Second Term Test - Grade 13 - 2020
Combined Mathematics I.

(01) When $n=1$

$$\text{LHS} = 1 \quad \text{RHS} = \frac{1\{3 \times 1 - 1\}}{2}$$
$$= 1$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ The result is true for $n=1$ (5)

Take any $p \in \mathbb{Z}^+$

Assume that the result is true for $n=p$

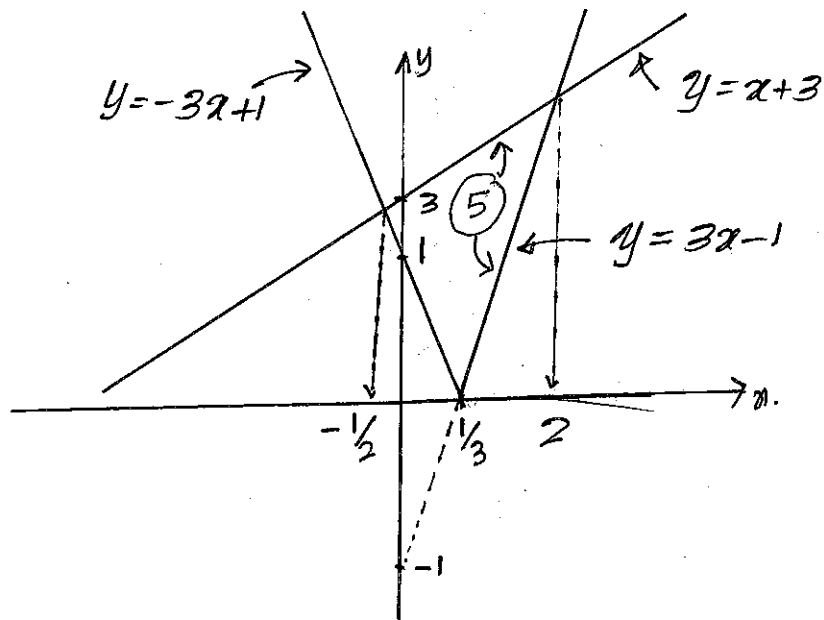
$$1 + 4 + 7 + \dots + (3p-2) = \frac{p(3p-1)}{2} \quad \text{(A)} \quad (5)$$

When $n=p+1$

$$\underbrace{1 + 4 + 7 + \dots + (3p-2)}_{\text{from (A)}} + (3p+1) = \frac{p(3p-1)}{2} + (3p+1) \quad (5)$$
$$= \frac{3p^2 - p + 6p + 2}{2}$$
$$= \frac{3p^2 + 5p + 2}{2}$$
$$= \frac{(p+1)(3p+2)}{2} \quad (5)$$
$$= \frac{(p+1)[3(p+1)+1]}{2}$$

$\therefore$ If the result is true for $n=p \in \mathbb{Z}^+$, then it is also true for $n=p+1$. $\therefore$ by using the principle of mathematical induction, the result is true for all $n \in \mathbb{Z}^+$. (5)

(02)



$$-3x + 1 = x + 3$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$3x - 1 = x + 3 \quad (5)$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, \infty) \quad (5)}}$$

$$|3x + 5| > x + 5 \Rightarrow |3(x + 2) - 1| > (x + 2) + 3$$

$$\text{let } x = x + 2$$

$$|3x - 1| > x + 3$$

$$\therefore x = x + 2$$

$$x = x + 2$$

$$-\frac{1}{2} = x + 2$$

$$2 = x + 2$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 0 \quad (5)}}$$

$$\therefore \text{Solution is } \underline{\underline{x \in (-\infty, -2\frac{1}{2}) \cup (0, \infty) \quad (5)}}$$

(03)

$$x \xrightarrow{\text{lim}} \pi/4 \quad \frac{4\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^5}{1 - \sin 2x}$$

$$= x \xrightarrow{\text{lim}} \pi/4 \quad \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right\}^5}{1 - \sin 2x}$$

$$= x \xrightarrow{\text{lim}} \pi/4 \quad \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cos^5(x - \pi/4)}{1 - \sin 2x}$$

$$= y \xrightarrow{\text{lim}} 0 \quad \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cos^5 y}{1 - \cos 2y}$$

$$= y \xrightarrow{\text{lim}} 0 \quad \frac{4\sqrt{2} (1 - \cos^5 y)}{1 - (2\cos^2 y - 1)}$$

$$= y \xrightarrow{\text{lim}} 0 \quad \frac{4\sqrt{2} (1 - \cos^5 y) \textcircled{5}}{2(1 - \cos^2 y) \textcircled{5}}$$

$$= y \xrightarrow{\text{lim}} 0 \quad \frac{4\sqrt{2} (1 - \cos y) (\cos^4 y + \cos^3 y + \dots + 1)}{2(1 - \cos y)(1 + \cos y)}$$

$\cos y - 1 \neq 0$

$$= \frac{4\sqrt{2} (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \textcircled{5}}{2(1 + 1)}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \times 5}{4}$$

$$= \underline{\underline{5\sqrt{2}}} \textcircled{5}$$

Putting $x = \pi/4 = y$

as $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \cdot \lim_{y \rightarrow 0}$

$$(04) \quad U_r = \frac{r}{(r+1)!}$$

$$f(r) - f(r+1) = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!}$$

$$= \frac{r+1-1}{(r+1)!}$$

$$= \frac{r}{(r+1)!} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{U_r}}$$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\text{When } r=1 \quad U_1 = f(1) - f(2)$$

$$r=2 \quad U_2 = f(2) - f(3)$$

$$r=3 \quad U_3 = f(3) - f(4)$$

$$r=n-1 \quad U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$

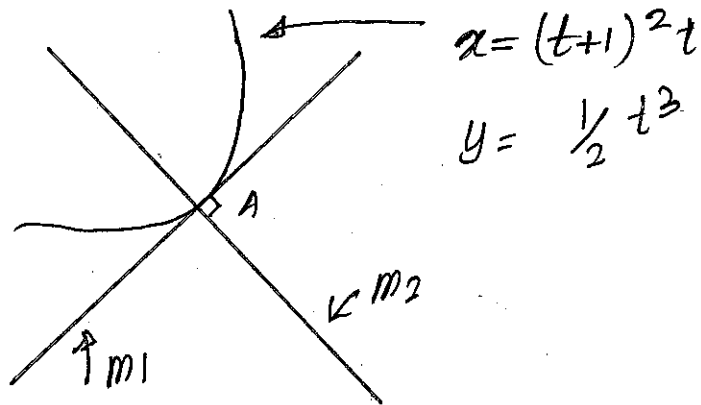
$$r=n \quad U_n = f(n) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^n U_r = f(1) - f(n+1) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{(n+1)!}}} \quad (5)$$

(05)



$$x = (t+1)^2 t$$

$$y = \frac{1}{2} t^3$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (t+1)^2 + t \cdot 2(t+1) \\ &= (t+1)[(t+1) + 2t] \quad (5) \\ &= \underline{\underline{(t+1)(3t+1)}} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dx} \right)$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} t^2 \right) (2t+1)}{(t+1)(3t+1)} = \frac{3t^2}{2(t+1)(3t+1)} \quad (5)$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=2}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

$$\frac{2}{7} (m_2) = -1$$

$$= \frac{3 \times 4}{2 \times 3 \times 7}$$

$$m_2 = -\frac{7}{2} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$$

$\therefore$ Equation of the normal

When $t=2$

$$\frac{y-4}{x-18} = -\frac{7}{2} \quad (5)$$

$$x = 18$$

$$2y - 8 = -7x + 126$$

$$y = 4$$

$$\therefore A(18, 4) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{2y + 7x = 134}}$$

(06) The area is given by

$$\int_{-3}^0 y \, dx - \int_0^{-2} y \, dx \quad (5)$$

Now $\int y \, dx = \int x^3 + 2x^2 - 3x \, dx$

$$= \left\{ \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right\} \quad (5)$$

$$\text{So } \int_{-3}^0 y \, dx = 0 - \left\{ \frac{81}{4} - \frac{2 \times 27}{3} - \frac{3}{2} \times 9 \right\}$$

$$= \frac{45}{4} \quad (5)$$

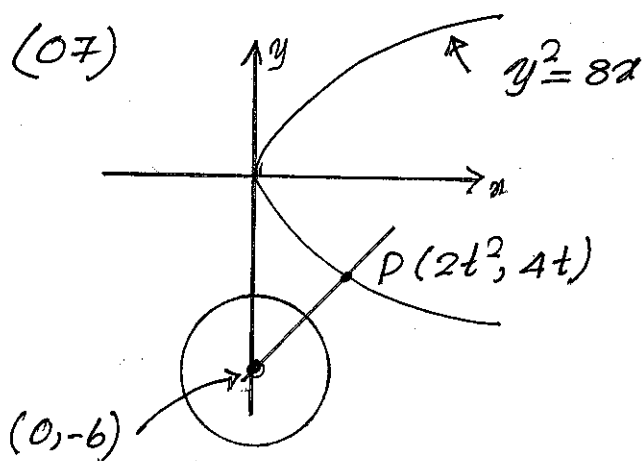
$$\int_0^{-2} y \, dx = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right\} - 0$$

$$= -\frac{7}{12} \quad (5)$$

So the area required is $\frac{45}{4} + \frac{7}{2} = \frac{71}{2} \quad (5)$

25

(07)



Let $P(2t^2, 4t)$ be any point on the parabola then

$$\begin{aligned} (CP)^2 &= (2t^2)^2 + (4t+6)^2 \\ &= 4t^4 + 4(2t+3)^2 \end{aligned}$$

$$f(t) = 4t^4 + 4(2t+3)^2 \quad (5)$$

$$f'(t) = 16t^3 + 16(2t+3)$$

$$= 16(t^3 + 2t + 3)$$

$$= 16(t+1)(t^2 - t + 3)$$

$$= 16(t+1) \left\{ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \right\} \quad (5)$$

$$\therefore f'(t) = 0 \Rightarrow t = -1 \quad (5)$$

$$\text{Also } f''(t) = 16(3t^2 + 2) \quad (5)$$

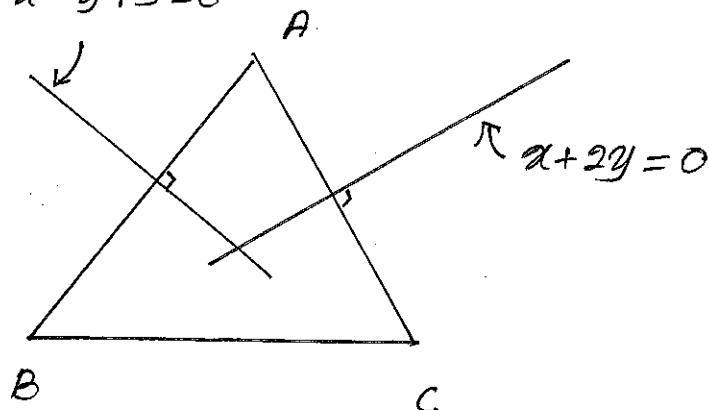
$$[f''(t)]_{t=-1} = 16\{3+2\} > 0$$

$\therefore f(t)$ is least when $t = -1$

$\therefore$ Thus, the required co-ordinate are $(2, -4) \quad (5)$

25

(08) $x - y + 5 = 0$



Let the co-ordinates of B be (α, β) .

Since co-ordinates of A are $(1, -2)$

$\therefore$ the slope of AB = $\frac{\beta + 2}{\alpha - 1}$

The equation of the perpendicular bisector of AB is $x - y + 5 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\beta + 2}{\alpha - 1} \cdot 1 = -1$$

$$\beta + 2 = -\alpha + 1$$

$$\alpha + \beta = -1 \text{ --- (1) (5)}$$

Also the midpoint of AB lies on $x - y + 5 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) - \left(\frac{\beta - 2}{2}\right) + 5 = 0$$

$$\alpha + 1 - \beta + 2 + 10 = 0$$

$$\alpha - \beta = -13 \text{ --- (2) (5)}$$

(1) and (2) $2\alpha = -14$

$$\underline{\underline{\alpha = -7}}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = +6}}$$

$$B \equiv (-7, 6) \text{ (5)}$$

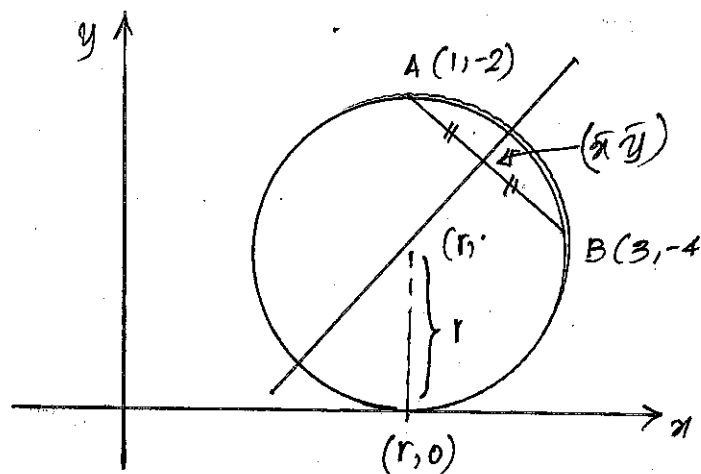
Similarly the co-ordinates of C are $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (5)

$\therefore$ the equation of the line BC is

$$(y - 6) = \frac{\left(\frac{2}{5} - 6\right)}{\left(\frac{11}{5} + 7\right)} (x + 7)$$

$$\underline{\underline{14x + 23y = 40 \text{ (5)}}}$$

(09)



$$\bar{x} = 2 \quad \bar{y} = -3$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (2, -3)$$

$$\therefore \text{the slope of } AB = \frac{-4+2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\therefore$ The equation of the perpendicular bisector of AB is

$$\frac{y+3}{x-2} = +1$$

$$\frac{y+3}{1} = \frac{x-2}{1} = t$$

$$y = t-3 \quad \text{and} \quad x = t+2$$

$$\therefore \text{Centre of the Circle} \equiv (t+2, t-3) \quad (5)$$

$$\sqrt{(t+2-1)^2 + (t-3+2)^2} = t-3 \quad (5)$$

$$(t+1)^2 + (t-1)^2 = (t-3)^2$$

$$t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 = (t-3)^2$$

$$2t^2 + 2 = t^2 - 6t + 9$$

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$

$$(t+7)(t-1) = 0$$

$$t = -7 \text{ or } t = 1 \quad (5)$$

$$\therefore \text{Centre} \equiv (-10, -5)$$

$$\text{radius} = 10$$

$\therefore$ equation is

$$(x+10)^2 + (y+5)^2 = 10^2 \quad (5)$$

or

$$\text{Centre} = (-2, 3)$$

$$\text{radius} = 2$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \quad (5)$$

$$(10) \sin 6x + \cos 4x + 2 = 0 ; 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\text{i.e. } 3\sin 2x - 4\sin^3 2x + 1 - 2\sin^2 2x + 2 = 0 \quad (5)$$

$$-4\sin^3 2x - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 3 = 0$$

$$\text{Let } \sin 2x = y$$

$$\text{Then } -4y^3 - 2y^2 + 3y + 3 = 0 ; y = \sin 2x$$

$$\text{when } y=1, -4-2+3+3=0$$

$$\therefore (y-1) \text{ is a factor } (5)$$

$$\therefore (y-1)(-4y^2 + Ay - 3) = 0$$

comparing y^2 's coefficients.

$$-2 = +9 + A \Rightarrow A = -6$$

$$\text{Let } g(y) = -4y^2 - 6y - 3$$

$$= -4\left(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}\right)$$

$$= -4\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - \frac{9}{16}\right]$$

$$= -4\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right] \neq 0$$

$\therefore$ only a real solution is at $y=1$ (5)

$$\text{i.e. } \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \sin \pi/2$$

$$\therefore 2x = n\pi + (-1)^n \pi/2 \quad (5)$$

$$x = n\pi/2 + (-1)^n \pi/4$$

$$\text{for } n=1 \quad x = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4 //$$

$$n=2 \quad x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4 //$$

$$n=3 \quad x = 3\pi/2 - \pi/4 = 5\pi/4 //$$

$$(11) (a) (i) \quad x^2 - 3 + k(2x+3) = 0$$

$$x^2 + 2kx + 3(k-1) = 0 \quad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \nearrow \alpha + \beta = -2k \\ \searrow \alpha - \beta = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1-k \\ \beta = -(k+1) \end{matrix}$$

(5) $\rightarrow \alpha\beta = 3(k-1)$

$$\therefore (k-1)(k+1) = 3(k-1) \quad (5)$$

$$\Rightarrow (k-1)(k+1-3) = 0$$

$$\therefore (k-1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ or } k = 2$$

25

(ii) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{c} ; x \neq \pm 1, c \neq 0$

$$c(x-1+x+1) = x^2-1$$

$$2cx = x^2-1$$

$$x^2 - 2cx - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\Delta = (-2c)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \quad (5)$$

$$= 4c^2 + 4$$

$$= 4(c^2 + 1) > 0 \text{ always when } c \text{ is real.} \quad (5)$$

$\therefore$ The quadratic equation has distinct roots. (5)

20

(b) (i) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$$f(-1) = -1 - 3 - 2 - 2 - 3 + 1 = -10 \neq 0$$

$\therefore (x+1)$ is not a factor of $f(x)$. (5)

$$f(1) = 1 - 3 + 2 - 2 + 3 + 1 = 2 \neq 0 \quad (5)$$

$\therefore (x-1)$ is also not a factor of $f(x)$

(5) $\therefore$ neither $(x+1)$ nor $(x-1)$ is a factor of $f(x)$. 15

$$(ii) \quad f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + ax + b; \quad q(x)$$

$$\text{When } x=1; \quad f(1) = a+b = 2 \quad \text{--- (1)} \quad (5)$$

$$f(-1) = -a+b = -10 \quad \text{--- (2)} \quad (5)$$

$$b = -4 \quad (5), \quad a = b \quad (5)$$

$\therefore$ the remainder when $f(x)$ is divided by $(x^2 - 1)$ is $6x - 4$ (5) 25

$$(iii) \quad f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) + px + q \quad (5)$$

$$= x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

Comparing co-efficient

$$\underline{x^4} \quad -3 = A$$

$$\underline{x^3} \quad 2 = B + 1 \Rightarrow B = 1$$

$$\underline{x^2} \quad -2 = C + A \Rightarrow C = 1$$

$$\underline{x} \quad 3 = B + P \Rightarrow P = 2$$

$$\underline{\text{constants}} \quad 1 = C + q \Rightarrow q = 0$$

$\therefore$ The remainder is $2x$ (5) 25

$$(iv) \quad f(x) = 2x$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) + 2x = 2x$$

$$\therefore (x^2 + 1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Let } x^3 - 3x^2 + x + 1 = g(x)$$

$$g(1) = 1 - 3 + 1 + 1 = 0$$

$\therefore (x - 1)$ is a factor of $g(x)$ (5)

$$\therefore g(x) = (x - 1)(x^2 + kx - 1) \quad (5)$$

comparing co-efficient of x^2

$$-3 = -1 + k \Rightarrow k = -2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= (x-1)(x^2-2x-1) \\
 &= (x-1)(x^2-2x+1-1-1) \\
 &= (x-1)[(x-1)^2-\sqrt{2}^2] \\
 &= (x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\therefore (x^2+1)(x-1)[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})] = 0 \quad (5)$$

$\therefore$ all the real roots of $f(x) = 2x$ are

$$\underline{\underline{1, 1+\sqrt{2} \quad \text{and} \quad 1-\sqrt{2}}} \quad (5) \quad (5)$$

40

(12) (a) Let the geometric progression is

$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$; a is 1st term and r is common ratio. (5)

Then n^{th} term $u_n = ar^{n-1}$ (5)

$$\therefore p^{\text{th}} \text{ term} = u_p = ar^{p-1} = q \quad \text{--- (1) (5)}$$

$$q^{\text{th}} \text{ term} = u_q = ar^{q-1} = p \quad \text{--- (2) (5)}$$

$$(p+q)^{\text{th}} \text{ term} = u_{p+q} = ar^{p+q-1} \quad \text{--- (3) (5)}$$

$$\textcircled{1}/\textcircled{2} \Rightarrow \frac{q}{p} = r^{p-1-q+1} = r^{p-q} \Rightarrow r = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}} \quad (5) \quad \text{--- (4)}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow a = q \times r^{1-p} = q \times \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{1-p} \quad (5)$$

$$\therefore u_{p+q} = \frac{q^{\frac{p-q+1-p}{p-q}}}{p^{\frac{1-p}{p-q}}} \times \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q} \times p+q-1} \quad (10)$$

$$= \frac{q^{\frac{1-q+p+q-1}{p-q}}}{p^{\frac{1-p+p+q-1}{p-q}}} = \frac{q^{p/p-q}}{p^{q/p-q}} = \left(\frac{q^p}{p^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} \quad (5)$$

55

(b) To prove that $1+n^2+n^4 = (1+n^2)^2 - n^2$

$$\text{RHS} = 1+2n^2+n^4 - n^2$$

$$= 1+n^2+n^4$$

$$= \underline{\underline{\text{LHS}}}$$

(10)

$$\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \dots$$

$$U_r = \frac{r}{1+r^2+r^4} \quad (5) = \frac{r}{(1+r^2)^2 - r^2} \quad (5)$$

$$= \frac{r}{(1+r^2-r)(1+r^2+r)} = \frac{Ar+B}{(1+r^2-r)} + \frac{Cr+D}{(1+r^2+r)} \quad (5)$$

$$= \frac{Ar+Ar^3+Ar^2+B+Br^2+Br + Cr+Cr^3-Cr^2+D+Dr^2-Dr}{(1+r^2-r)(1+r^2+r)}$$

$$= \frac{(A+B+C-D)r + (A+C)r^3 + (A+B-C+D)r^2 + B+D}{(1+r^2-r)(1+r^2+r)}$$

1

$$A+B+C-D = 1 \quad (1) \quad (1)+(2) \Rightarrow A+B = \frac{1}{2} \quad (5)$$

r^3

$$A+C = 0 \quad (2) \quad (1)-(2) \Rightarrow C-D = \frac{1}{2} \quad (6)$$

r^2

$$A+B-C+D = 0 \quad (3) \quad (2) \Rightarrow A = -C$$

constant

$$B+D = 0 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow B = -D$$

(10)

$$\therefore (5) \Rightarrow -C-D = \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$(6)+(7) \Rightarrow -2D = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \quad \therefore B = \frac{1}{2}$$

$$(7) \Rightarrow C = 0 \quad (5)$$

$$\therefore A = 0 \quad (5)$$

$$\therefore U_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+r^2-r} - \frac{1}{1+r^2+r} \right) \quad (5)$$

$$\text{Let } \frac{1}{1+r^2-r} = f(r) \quad \text{then } f(r+1) = \frac{1}{1+(r+1)^2-(r+1)} \\ = \frac{1}{1+r^2+2r+1-r-1}$$

$$= \frac{1}{r^2 + r + 1} \quad (5)$$

$$\therefore U_r = \frac{1}{2} (f(r) - f(r+1)) \quad (5)$$

$$2 U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$2 \sum_{r=1}^n U_r = \begin{array}{l} f(1) - f(2) \\ f(2) - f(3) \\ \vdots \\ f(n-1) - f(n) \\ f(n) - f(n+1) \end{array} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{f(1) - f(n+1)}} \quad (5)$$

$$= f(1) - f(n+1) \quad (5)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n U_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+1^2+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n^2+n+1-1}{n^2+n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+n+1} = \underline{\underline{\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}} \quad (5)$$

$$\textcircled{13} \quad a. \quad \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)\beta)$$

$$= \frac{\cos\left\{\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\} \sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

When $n=1$

$$\text{LHS} = \cos \alpha$$

$$\text{RHS} = \frac{\cos(\alpha + 0) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$= \cos \alpha$$

$$\underline{\underline{\text{LHS} = \text{RHS}}}$$

$\textcircled{5}$

Take any $p \in \mathbb{Z}^+$

Assume that the result is true for $n=p$.

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos\{\alpha + (p-1)\beta\}$$

$$= \frac{\cos\left\{\alpha + \left(\frac{p-1}{2}\right)\beta\right\} \sin\left(\frac{p\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad \textcircled{A}$$

When $n=p+1$

$$\underbrace{\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos\{\alpha + (p-1)\beta\}}_{\text{from } \textcircled{A}} + \cos\{\alpha + p\beta\} =$$

$$\frac{\cos\left\{\alpha + \left(\frac{p-1}{2}\right)\beta\right\} \sin\left(\frac{p\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \cos(\alpha + p\beta)$$

$\textcircled{5}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cos \left\{ \alpha + \left(\frac{p-1}{2} \right) \beta \right\} \sin \left(\frac{p\beta}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cos (\alpha + p\beta)}{2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} \\
&= \frac{\sin \left\{ \alpha + p\beta - \frac{\beta}{2} \right\} \textcircled{5} - \sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) + \sin \left\{ \alpha + p\beta + \frac{\beta}{2} \right\} \textcircled{5} - \sin \left\{ \alpha + p\beta - \frac{\beta}{2} \right\}}{2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} \\
&= \frac{\sin \left\{ \alpha + p\beta + \frac{\beta}{2} \right\} - \sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} \\
&= \frac{2 \cos \left(\alpha + \frac{p\beta}{2} \right) \sin (p+1) \frac{\beta}{2}}{2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} \\
&= \frac{\cos \left(\alpha + \frac{p\beta}{2} \right) \sin (p+1) \frac{\beta}{2}}{\sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} \textcircled{5}
\end{aligned}$$

If the result is true for $n = p \in \mathbb{Z}^+$. then it is also true for $n = p+1$. therefore by using the principle of mathematical induction the result is true for all $n \in \mathbb{Z}^+$. \textcircled{5}

$$(b) \frac{12!}{2!} = 239500800 \text{ (5)}$$

$$I \frac{10!}{2!} = 1814400 \text{ (10)}$$

$$II \frac{7!}{2!} \times 5! = 302400 \text{ (10)}$$

$$III \frac{10!}{2!} = 1814400 \text{ (10)}$$

35

$$(c) I {}^4C_3 \times {}^9C_4 = 504 \text{ (10)}$$

II

Boys	Girls
4	3
3	4

$${}^9C_4 \times {}^4C_3 = 504 \text{ (10)}$$

$${}^9C_3 \times {}^4C_4 = 84 \text{ (10)}$$

$$588 \text{ (5)}$$

III

Boys	Girls
4	3
5	2
6	1
7	0

$${}^9C_4 \times {}^4C_3 = 504 \text{ (10)}$$

$${}^9C_5 \times {}^4C_2 = 756 \text{ (10)}$$

$${}^9C_6 \times {}^4C_1 = 336 \text{ (10)}$$

$${}^9C_7 \times {}^4C_0 = 36 \text{ (10)}$$

$$1632 \text{ (5)}$$

80

$$(14) (a) y = f(x) = \frac{16(x+1)}{(x-1)^2(3x+1)} = \frac{16(x+1)}{3x^3 - 5x^2 + x + 1}$$

$$f'(x) = 16 \left[\frac{(x-1)^2(3x+1) \cdot 1 - (x+1)(9x^2 - 10x + 1)}{(x-1)^4(3x+1)^2} \right]$$

$$= 16 \frac{(x-1)(3x+1) - (x+1)(9x-1)}{(x-1)^3(3x+1)^2}$$

$$= \frac{16 \times (-2x)(3x+5)}{(x-1)^3(3x+1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x+5)}{(x-1)^3(3x+1)^2} \quad (5)$$

Vertical asymptotes. $x=1$, $x=-\frac{1}{3}$ (5)

Horizontal asymptote. $x \rightarrow \pm\infty$, $y=0$ (5)

The point horizontal asymptote intersects the curve.

when $y=0$, $x=-1 \Rightarrow (-1, 0)$ (5)

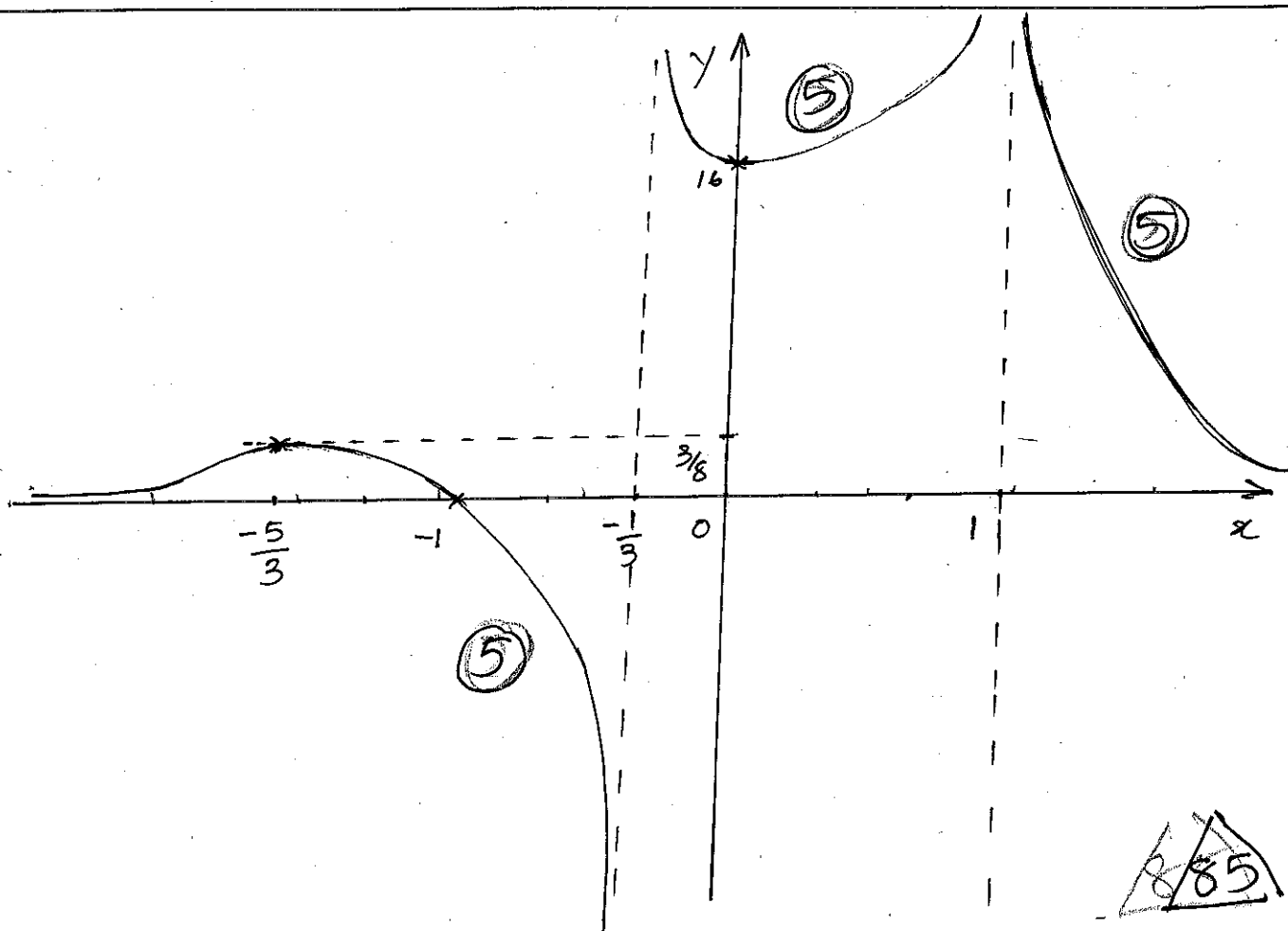
Turning points.

when $f'(x)=0$, $x = -\frac{5}{3}$ (5) or $x=0$ (5)
 $y = \frac{3}{8}$ $y=16$

Then

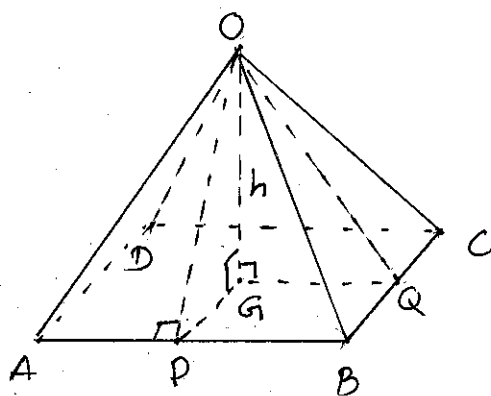
	$-\infty < x < -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Sign of $f'(x)$	$\frac{+}{-}$ (+)	$\frac{+}{-}$ (-)	$\frac{+}{-}$ (-)	$\frac{-}{-}$ (+)	$\frac{+}{+}$ (-) (+)
	/	\	-	+ -	+

(25)



8/85

(b) (i)



Let $AP = x$ m.

But $A = 4x^2$

$$OP = 3\sqrt{6} \text{ m}, OG = h$$

$$\text{Area } ABCD = A$$

$$\text{Volume } V = \frac{1}{3} Ah$$

$$h^2 = (3\sqrt{6})^2 - x^2$$

$$= 9 \times 6 - \frac{A}{4}$$

$$h^2 = \frac{54 \times 4 - A}{4} = \frac{216 - A}{4}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times A \times \sqrt{\frac{216 - A}{4}}$$

$$V = \frac{A}{6} \sqrt{216 - A}$$

15

$$(ii) \quad V = \frac{1}{6} A (216 - A)^{1/2}$$

$$\frac{dV}{dA} = \frac{1}{6} \left[A \cdot \frac{1}{2} (216 - A)^{-1/2} (216 - A)^{1/2} \times 1 \right] \quad (10)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{-A}{2\sqrt{216-A}} + \sqrt{216-A} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \frac{-A + 2(216-A)}{2\sqrt{216-A}}$$

$$= \frac{1}{12} \frac{432 - 3A}{\sqrt{216-A}} = \frac{1}{4} \frac{144 - A}{\sqrt{216-A}} \quad (5)$$

$$\text{When } \frac{dV}{dA} = 0, \quad A = 144 \text{ m}^2 \quad (5)$$

$$0 < A < 144 \quad A = 144 \quad 144 < A < 216$$

sign of
 $\frac{dV}{dA}$

+

-

(15)

$\therefore V$ is maximum, when $A = 144 \text{ m}^2$
Then side length of the base = $\underline{12 \text{ m}} \quad (5)$
Height = $\sqrt{\frac{216-144}{4}} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18}$
 $= \underline{3\sqrt{2} \text{ m}} \quad (5)$

45

$$(iii) \quad 144 + 4 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 3\sqrt{6}$$

$$= 144 + 72\sqrt{6}$$

$$= \underline{72(2 + \sqrt{6}) \text{ m}^2} \quad (5)$$

5

$$(15) \text{ a. } \frac{1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{(1-z)} + \frac{B}{(1-2z)}$$

$$1 = A(1-2z) + B(1-z)$$

Comparing

coefficient of z , $-2A - B = 0$ — (1)

constants, $A + B = 1$ — (2)

$$(1) + (2) \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1 \text{ (5)}$$

$$(2) \Rightarrow -1 + B = 1 \Rightarrow B = 2 \text{ (5)}$$

$$\therefore \frac{1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} \quad \triangle 10$$

When $t = \sin x$, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ (5)

$$\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx = \int \frac{\sin x dx}{4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}$$

$$= \int \frac{\cos x dx}{4 \cos^2 x \cdot \cos 2x}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} \text{ (10)}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{-1}{1-t^2} dt + \int \frac{2}{1-2t^2} dt \right\} \text{ (5)}$$

$$= \frac{-1}{4} \int \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-2t^2} dt$$

$$= \frac{-1}{4} \int \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - t^2} dt$$

$$= \frac{-1}{8} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t} \right| + C$$

(5) (5)

$$= \frac{-1}{8} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x} \right| + C$$

(5) (5)

$$; p = \frac{-1}{8} \text{ and } q = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

(5) (5)

50

$$(b) \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(a+b-y) (-dy)$$

$$\text{Where } x = a+b-y ; \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\text{when } x=a, y=b$$

$$\text{when } x=b, y=a$$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(a+b-y) dy$$

Since y is a variable, let $y=x$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad \triangle 15$$

$$I = \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{a+b-x-a}{b-(a+b-x)}} dx$$

$$= \int_a^b \frac{\sqrt{b-x}}{x-a} dx = J \quad (10)$$

$$I + J = \int_a^b \frac{\sqrt{x-a}}{b-x} dx + \int_a^b \frac{\sqrt{b-x}}{x-a} dx$$

$$= \int_a^b \frac{x-a + b-x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} dx$$

$$= \int_a^b \frac{b-a}{\sqrt{-ab + (a+b)x + x^2}} dx$$

$$= (b-a) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}}$$

$$= (b-a) \left[\sin^{-1} \left(\frac{x + \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right) \right]_a^b$$

$$= (b-a) [\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)]$$

$$= (b-a) \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \pi (b-a) \quad (20)$$

$$\underline{\underline{\pi (b-a)}} \quad \triangle 40$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \int \sin 4x \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{3x}}{3} \right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \int \frac{e^{3x}}{3} \cos 4x \cdot 4 dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \frac{4}{3} \int \cos 4x \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{3x}}{3} \right) dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{3x}}{3} \cos 4x + \int \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x dx \right]$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

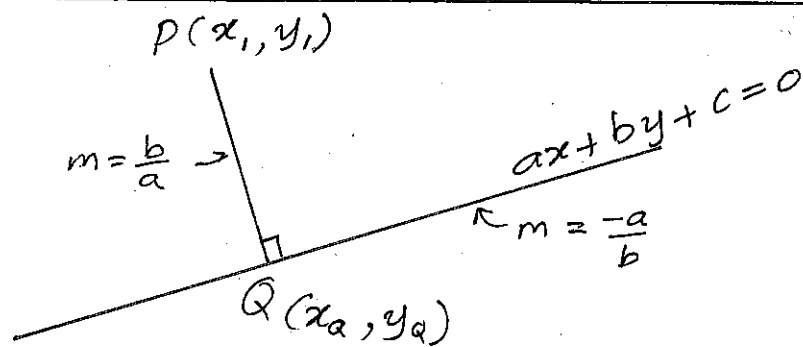
$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} e^{3x} \cos 4x$$

$$25 \int e^{3x} \sin 4x dx = 3 e^{3x} \sin 4x - 4 e^{3x} \cos 4x$$

$$\therefore \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{e^{3x}}{25} (3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + C$$

△ 35

(16) (a)



Let Q is the perpendicular base.

$$\frac{y_1 - y_q}{x_1 - x_q} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{y_1 - y_q}{b} = \frac{x_1 - x_q}{a} = t; \quad t \text{ is a parameter.}$$

$$\therefore y_q = y_1 - bt, \quad x_q = x_1 - at$$

Since Q is on $ax + by + c = 0$

$$a(x_1 - at) + b(y_1 - bt) + c = 0$$

$$\Rightarrow ax_1 + by_1 + c - t(a^2 + b^2) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

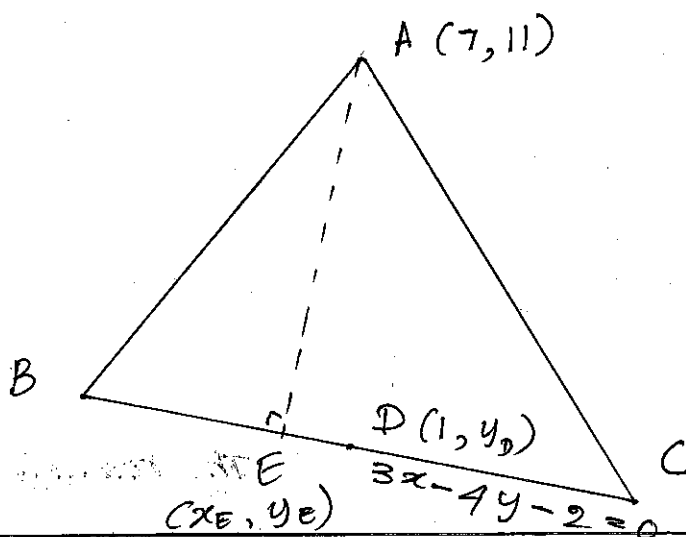
$$\text{Since } PQ^2 = (x_1 - x_q)^2 + (y_1 - y_q)^2;$$

$$PQ^2 = \frac{a^2(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore PQ = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

35



Let mid-point of BC is E .

Let the perpendicular to BC from A is E .

Since Q is on BC, $3x_1 - 4y_1 - 2 = 0$
 $\Rightarrow y_D = \frac{1}{4}$

Also $\frac{x_B + x_C}{2} = 1 \Rightarrow x_B + x_C = 2$ — (1)

$\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_B + y_C = \frac{1}{2}$ — (2)

But $AE = \left| \frac{3 \times 7 - 4 \times 11 - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 5$

$\therefore \frac{1}{2} \times BC \times 5 = 30 \Rightarrow BC = 12$ units.

$\therefore BD = DC = 6$ units.

$\therefore (x_B - 1)^2 + (y_B - \frac{1}{4})^2 = 6^2$ — (3)

Also $3x_B - 4y_B - 2 = 0 \Rightarrow x_B = \frac{4}{3}y_B + \frac{2}{3}$

$\therefore (3) \Rightarrow \left(\frac{4}{3}y_B + \frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(y_B - \frac{1}{4}\right)^2 = 6^2$

$\left(\frac{4y_B - 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4y_B - 1}{4}\right)^2 = 6^2$

$(4y_B - 1)^2 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) = 6^2$

$(4y_B - 1)^2 = \frac{6^2 \times 9 \times 16}{25}$

$\therefore 4y_B - 1 = \pm \frac{6 \times 3 \times 4}{5}$

+ $4y_B = \frac{72}{5} + 1 = \frac{77}{5} \Rightarrow y_B = \frac{77}{20}$

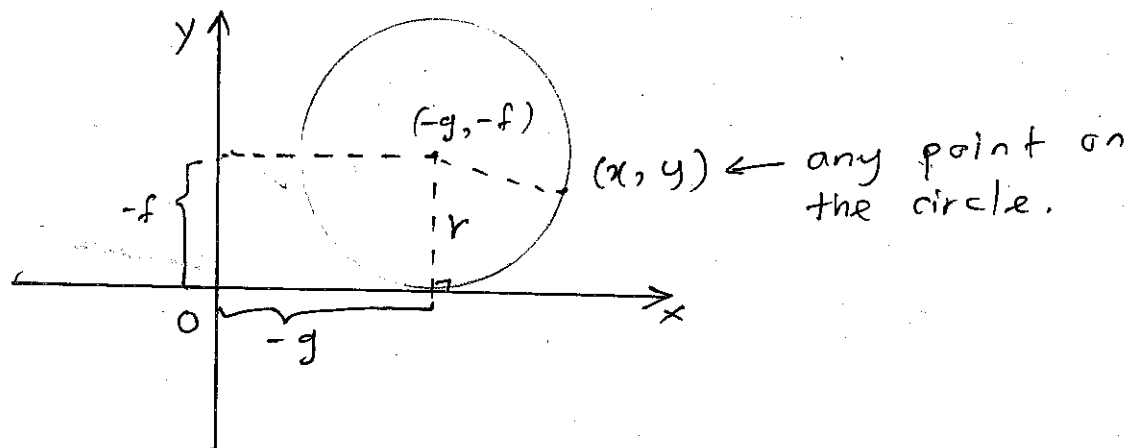
$\therefore x_B = \frac{4}{3} \times \frac{77}{20} + \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{87}{15} \Rightarrow B \equiv \left(\frac{87}{15}, \frac{77}{20}\right)$

- $4y_B = \frac{-72}{5} + 1 = \frac{-67}{5} \Rightarrow y_B = \frac{-67}{20}$

$\therefore x_B = \frac{4}{3} \times \frac{-67}{20} + \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-57}{15} \Rightarrow C \equiv \left(\frac{-57}{15}, \frac{-67}{20}\right)$

65

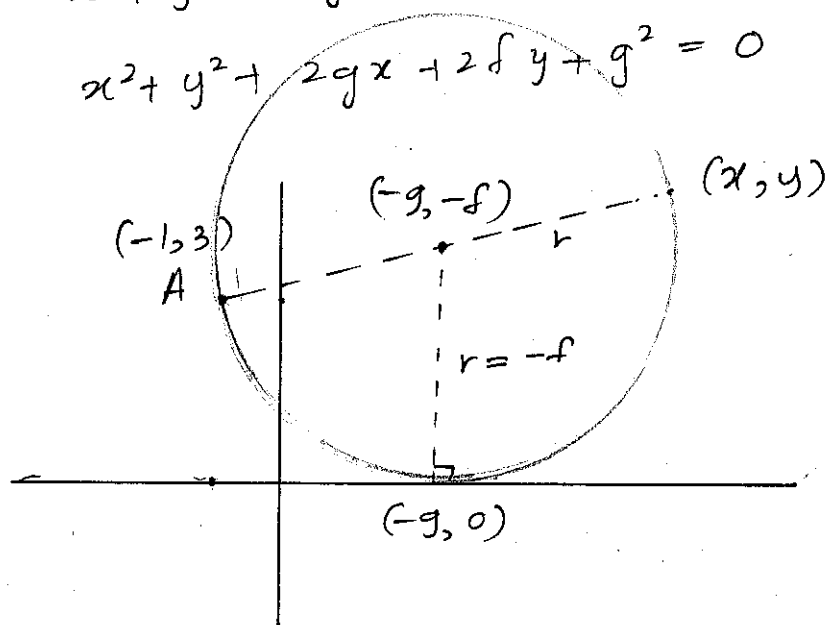
(16) (b)



$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 + f^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 + f^2 = 0 \leftarrow \text{equation of given circle.}$$



$$\frac{x-1}{2} = -g \quad \frac{y+3}{2} = -f$$

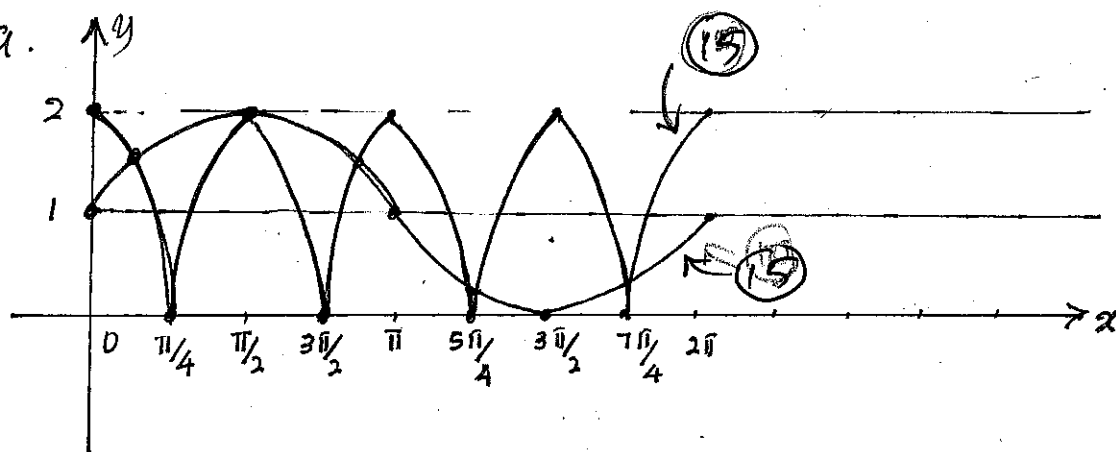
$$\left(x + \frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y+3}{2}\right)^2 = (-f)^2$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = \left(\frac{y+3}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$\therefore (x+1)^2 = 12y \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{12}(x+1)^2}}$$

(17) a.



no. of solutions = 7 (5)

25

b) For Sine rule. (25)

$$\text{Let } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$$

$$\frac{\sin A}{a} = k \Rightarrow \sin A = ka$$

$$\frac{\sin B}{b} = k \Rightarrow \sin B = kb$$

$$\frac{\sin C}{c} = k \Rightarrow \sin C = kc$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{k a \left\{ \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \right\} - k b \left\{ \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right\}}{k a \left\{ \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \right\} + k b \left\{ \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right\}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{2c^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{C} = \frac{\pi}{2}}}$$

$\therefore ABC$ is a right-angled triangle //



$$c) \underbrace{\tan^{-1} x}_\alpha + \underbrace{\tan^{-1} 2x}_\beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{x + 2x}{1 - x \cdot 2x} = -\sqrt{3}$$

$$3x = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 2x^2$$

$$2\sqrt{3}x^2 - 3x - \sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4} \text{ or } x = \frac{3 - \sqrt{11}}{4}$$



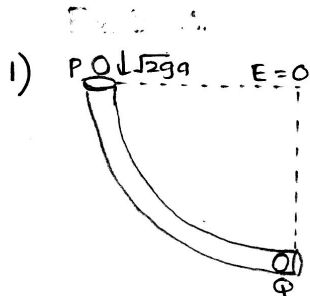
MARKING SCHEME

G.C.E (Advance Level) - March 2020

Grade 13 - Term Test II

COMBINED MATHEMATICS II

PART A



Applying the Law of conservation of energy for P,

$$0 + \frac{1}{2} m \cdot 2ga = -mga + \frac{1}{2} mv^2 \quad (10)$$

$$2ga = -2ga + v^2$$

$$v^2 = 4ga$$

$$v = 2\sqrt{ga} \quad (5)$$

$$\rightarrow v = 2\sqrt{ga}$$

P

Q

$$\rightarrow W$$

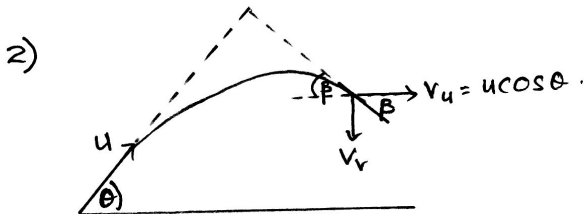
2m

Applying the law of conservation of energy,

$$\rightarrow m \cdot 2\sqrt{ga} = 2m W \quad (5)$$

$$W = \sqrt{ga} \quad (5)$$

25



$$\beta + \theta = 90^\circ$$

$$\tan(\beta + \theta) = \tan 90^\circ$$

$$\frac{\tan \beta + \tan \theta}{1 - \tan \beta \tan \theta} \rightarrow \infty$$

$$1 - \tan \beta \tan \theta = 0$$

$$\tan \beta \tan \theta = 1 \quad (5)$$

$$\rightarrow v_u = u \cos \theta$$

$$\uparrow v = u + at$$

$$v_v = u \sin \theta - gt$$

$$\downarrow -v_v = gt - u \sin \theta \quad (5)$$

$$\tan \beta = \frac{-v_v}{v_u} = \frac{gt - u \sin \theta}{u \cos \theta} \quad (5)$$

$$\text{from (1), } \left(\frac{gt - u \sin \theta}{u \cos \theta} \right) \tan \theta = 1 \quad (5)$$

$$\left(\frac{gt - u \sin \theta}{u \cos \theta} \right) \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) = 1$$

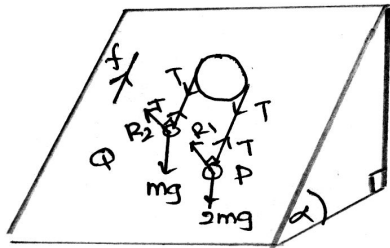
$$gt \sin \theta - u \sin^2 \theta = u \cos^2 \theta$$

$$gt \sin \theta = u (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$t = \frac{u}{g \sin \theta} \quad (5)$$

25

3)



(5) diagram

Applying $F = ma$ $\frac{1}{2}a$ for P,

$$2mg \sin \alpha - T = 2mf \quad (1) \quad (5)$$

Applying $F = ma$ $\frac{1}{2}a$ for Q

$$T - mg \sin \alpha = mf \quad (2) \quad (5)$$

$$(1) + (2), \quad mg \sin \alpha = 3mf$$

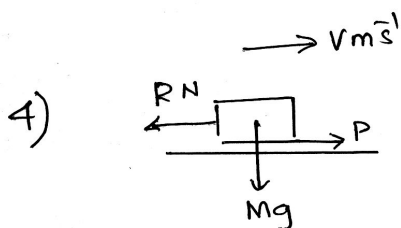
$$f = \frac{g \sin \alpha}{3} \quad (5)$$

From (2),

$$T = mg \sin \alpha + \frac{mg \sin \alpha}{3}$$

$$T = \frac{4mg \sin \alpha}{3} \quad (5)$$

25



For car, $H = P v$

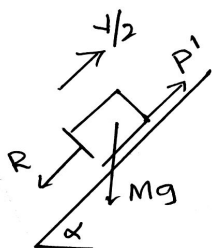
$$H \times 10^3 = P v$$

$$P = \frac{H \times 10^3}{v} \text{ N} \quad (5)$$

Applying $F = ma \rightarrow$

$$P - R = 0$$

$$P = R = \frac{H \times 10^3}{v} \text{ N} \quad (5)$$



For the motion on the inclined plane

$$H = P v$$

$$H \times 10^3 = P' \frac{v}{2}$$

$$P' = \frac{2H \times 10^3}{v} \text{ N} \quad (5)$$

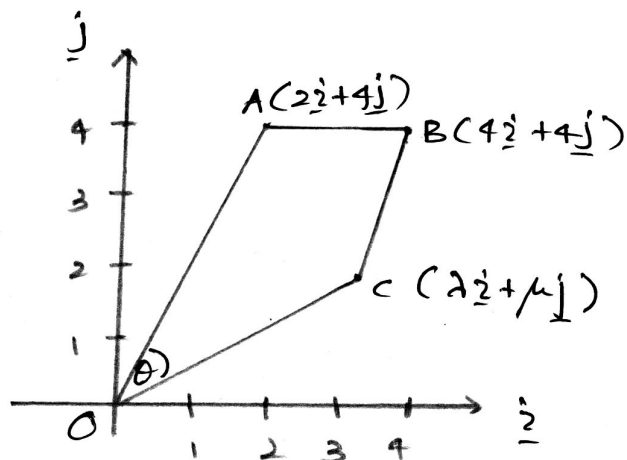
Applying $\sum F = ma$

$$P' - R - Mg \sin \alpha = Ma \quad (5)$$

$$\frac{2H \times 10^3}{v} - \frac{H \times 10^3}{v} - Mg \sin \alpha = Ma$$

$$a = \left(\frac{H \times 10^3}{Mv} - g \sin \alpha \right) \text{ m s}^{-2} \quad (5)$$

5)



As $OA \parallel CB$ and $OA = 2CB$

$$\vec{OA} = 2\vec{CB} \quad (5)$$

$$2\hat{i} + 4\hat{j} = 2[4\hat{i} + 4\hat{j} - (\lambda\hat{i} + \mu\hat{j})] \quad (5)$$

$$2\hat{i} + 4\hat{j} = 2[(4-\lambda)\hat{i} + (4-\mu)\hat{j}]$$

$$(2-8+2\lambda)\hat{i} + [4-2(4-\mu)]\hat{j} = 0$$

$$(-6+2\lambda)\hat{i} + (-4+2\mu)\hat{j} = 0$$

$$-6+2\lambda = 0$$

$$-4+2\mu = 0$$

$$\lambda = 3$$

$$\mu = 2 \quad (5) \text{ both}$$

$$\therefore \vec{OC} = (3\hat{i} + 2\hat{j})$$

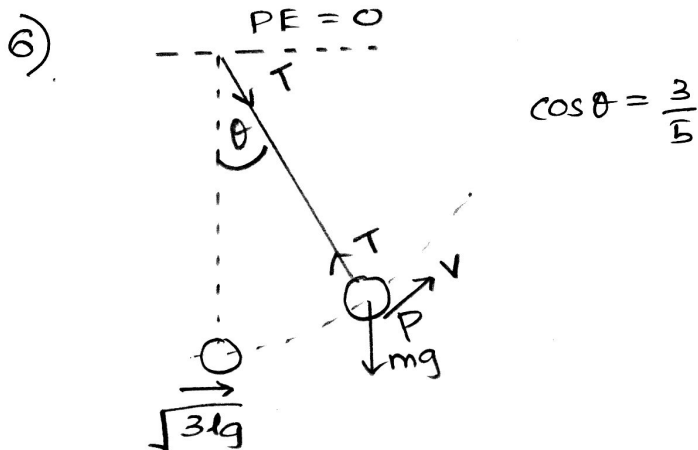
$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OC}| \cos \theta.$$

$$(2\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j}) = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OC}| \cos \theta. \quad (5)$$

$$6+8 = \sqrt{20} \cdot \sqrt{13} \cos \theta.$$

$$\cos \theta = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{13}} = \frac{14}{2\sqrt{5}\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{65}} \quad (5)$$



Applying the Law of Conservation of energy

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 3lg - mgl. \quad (10)$$

$$v^2 = 3lg - 2lg + 2lg \cdot \frac{3}{5}$$

$$v^2 = \sqrt{\frac{11lg}{5}} \quad (5)$$

For P,

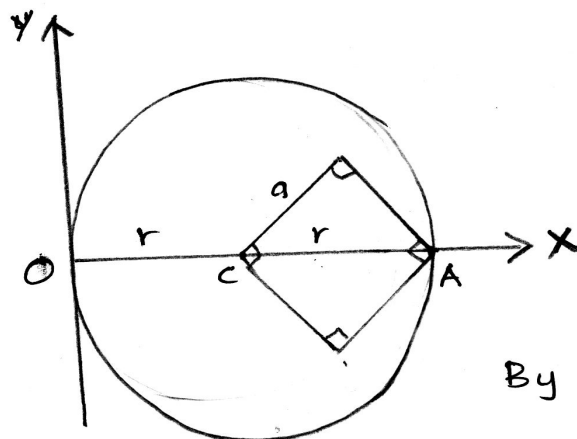
Applying $F = ma$ $\uparrow$

$$T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{l}. \quad (5)$$

$$T = \frac{11mgl}{5l} + \frac{3mg}{5}$$

$$T = \frac{14mg}{5} \quad (5)$$

7)



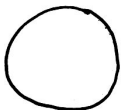
$$2a^2 = r^2$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Density $-\rho$

By symmetry

$$\bar{y} = 0.$$

Object	Mass	Distance from O to center of g.
	$\pi r^2 \rho$	r
	$\frac{r^2 \rho}{2}$	$\frac{3r}{2}$
Composite body	$(\pi - \frac{1}{2}) r^2 \rho$	$\bar{x}$

(5)

(5)

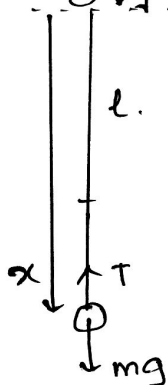
$$(\pi - \frac{1}{2}) r^2 \rho g \bar{x} = \pi r^2 \rho g r - \frac{r^2}{2} \rho g \times \frac{3r}{2} \quad (10)$$

$$\left(\frac{2\pi - 1}{2} \right) \bar{x} = \left(\frac{4\pi - 3}{4} \right) r.$$

$$\bar{x} = \frac{4\pi - 3}{2(2\pi - 1)} r. \quad (5)$$

25

8) $\downarrow \sqrt{2}g$ P.F = 0



By the Law of Conservation of energy,

$$\frac{1}{2} \frac{2mg(x-l)^2}{l} - mgx = \frac{1}{2} m \cdot 2gl \quad (15)$$

$$\frac{x^2 - 2xl + l^2}{l} = l + x \quad (5)$$

$$x^2 - 2xl + l^2 = l^2 + xl$$

$$x = 3l. \quad (x > 0) \quad (5)$$

The maximum distance travelled by the particle is $3l$.

25

$$9) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{9}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{15} \quad (5)$$

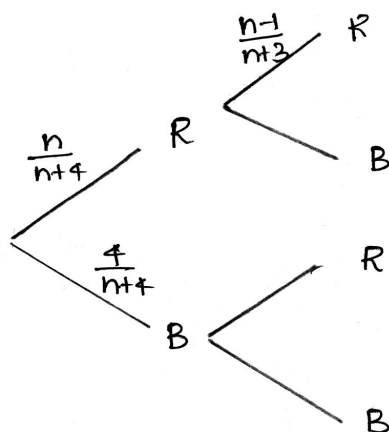
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{15}$$

$$= \frac{7}{30} \quad (5)$$

25

10)



$$\left(\frac{n}{n+4}\right) \left(\frac{n-1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$$3n^2 - 3n = n^2 + 7n + 12$$

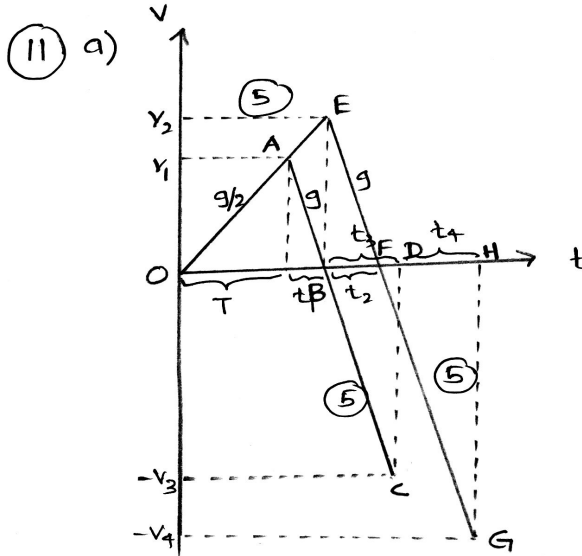
$$n^2 - 5n + 6 = 0 \quad (5)$$

$$(n-6)(n+1) = 0$$

$$n=6 \text{ or } n=-1 \quad (5)$$

$$\text{but } n \neq -1, \therefore n=6 \quad (5)$$

PART B.



15

$$\frac{OA}{T} \quad \frac{v_1}{T} = \frac{g}{2}$$

$$v_1 = \frac{gT}{2} \quad (5)$$

$$\frac{AB}{t_1}, \quad \frac{v_1}{t_1} = g$$

$$t_1 = \frac{v_1}{g}$$

$$t_1 = \frac{gT/2}{g}$$

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad (5)$$

Maximum height reached by the released part

$$= \text{Area of } OAB \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} (T + \frac{T}{2}) v_1$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{3T}{2}) (\frac{gT}{2})$$

$$= \frac{3gT^2}{8} \quad (5)$$

20

$$\frac{OE}{T + T/2} \quad \frac{v_2}{T + T/2} = \frac{g}{2}$$

$$\frac{v_2}{3T/2} = \frac{g}{2}$$

$$v_2 = \frac{3gT}{4} \quad (5)$$

-9-

$$\frac{ED}{t_2} \quad \frac{v_2}{t_2} = g$$

$$t_2 = \frac{v_2}{g}$$

$$t_2 = \frac{3T}{4} \quad (5)$$

The maximum height reached by the shuttle = Area of OED (5)

$$= \frac{1}{2} \left(T + \frac{T}{2} + \frac{3T}{4} \right) \frac{3gT}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{9T}{4} \right) \left(\frac{3gT}{4} \right)$$

$$= \frac{27gT^2}{32} \text{ (5)}$$

20

Maximum height reached by released part = Distance travelled to reach the earth

Area of $\triangle OAB$ = Area of $\triangle BCD$

$$\frac{3gT^2}{8} = \frac{1}{2} t_3 v_3 \text{ (5) } \text{--- (1)}$$

BC $\frac{v_3}{t_3} = g$

$$t_3 = \frac{v_3}{g}$$

By (1), $\frac{3gT^2}{8} = \frac{1}{2} \frac{v_3}{g} \cdot v_3$

$$v_3 = \frac{3g^2T^2}{4}$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{3}gT}{2} \text{ (5)}$$

10

Maximum height reached by shuttle = Distance travelled to reach earth.

Area of $\triangle OEF$ = Area of $\triangle FGH$

$$\frac{27gT^2}{32} = \frac{1}{2} t_4 v_4 \text{ (5) } \text{--- (2)}$$

FH $\frac{v_4}{t_4} = g$

$$t_4 = \frac{v_4}{g}$$

$$\frac{27gT^2}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_4}{g} \cdot v_4$$

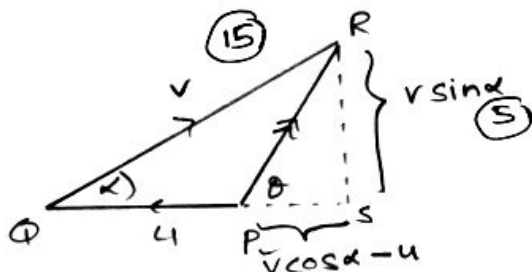
$$-10- \quad v_4 = \frac{3\sqrt{3}gT}{4} \text{ (5)}$$

10

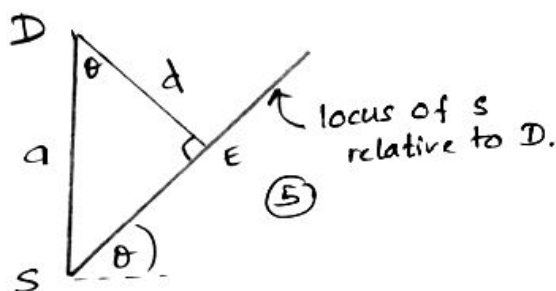
11) b) $V_{D,E} \Rightarrow u$
 $V_{S,E} \Rightarrow v$ at angle α

$$V_{S,D} = V_{S,E} + V_{E,D} \quad (5)$$

$$= \vec{v} + \vec{u} \quad (5)$$



[30]



[05]

Shortest distance $DE = a \sin(90 - \theta)$
 $= a \cos \theta \quad (5)$

PRS Δ
 $\cos \theta = \frac{v \cos \alpha - u}{\sqrt{(v \cos \alpha - u)^2 + (v \sin \alpha)^2}} \quad (5)$
 $= \frac{a (v \cos \alpha - u)}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha}} \quad (10)$

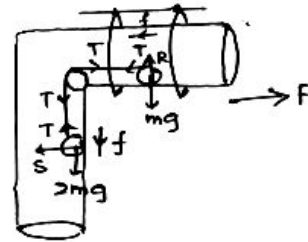
[25]

Time taken for shortest distance $\left\{ \begin{aligned} &= \frac{SE}{PR} = \frac{a \sin \theta}{PR} \quad (5) \\ &= \frac{a v \sin \alpha}{\sqrt{(v \cos \alpha - u)^2 + (v \sin \alpha)^2}} \quad (10) \\ &= \frac{a v \sin \alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv \cos \alpha}} \quad (5) \end{aligned} \right.$

[20]

12) b). For m , $\leftarrow F = ma$
 $T = m(f - F)$ — (1) (10)

For $2m$, $\downarrow F = ma$
 $2mg - T = 2mf$ — (2) (10)



For system, $\rightarrow F = ma$
 $0 = MF + m(F - f) + 2mf$
 $0 = (M + 3m)F - mf$ — (3) (10)

(1) + (2)
 $2mg = 3mf - mF$
 $2g = 3f - F$ — (4) (5)
 $f = \frac{2g + F}{3}$ (5)

$a_{m,E} \rightarrow F$
 $a_{m,M} \leftarrow f$ $a_{m,E}$
 $a_{2m,M} \downarrow f$
 $a_{m,E} = \leftarrow f + \rightarrow F$
 $a_{2m,E} = \downarrow f + \rightarrow F$ (10) [40]

From (3)
 $0 = (M + 3m)F - m\left(\frac{2g + F}{3}\right)$ (5)
 $0 = \left(M + 3m - \frac{m}{3}\right)F - \frac{2mg}{3}$
 $\frac{2mg}{3} = \left(\frac{3M + 8m}{3}\right)F$
 $F = \left(\frac{2mg}{3M + 8m}\right)$ (5)

from (3), $f = \frac{1}{m} (M + 3m) \left(\frac{2mg}{3M + 8m}\right)$
 $= 2g \left(\frac{M + 3m}{3M + 8m}\right)$ (5) [25]

Acceleration of P. $\rightarrow F$
 $\downarrow f$

$a = \sqrt{F^2 + f^2}$
 $= \sqrt{\left(\frac{2mg}{3M + 8m}\right)^2 + \left(\frac{2(M + 3m)g}{3M + 8m}\right)^2}$ (5)
 $= \frac{2g}{3M + 8m} \sqrt{M^2 + 10m^2 + 6Mm}$ (5) [10]

12) b)

Applying the Principle of Conservation of energy.

$$-Mgl - mga + \frac{1}{2} m kga =$$

$$-Mg(-mga \cos \theta) + \frac{1}{2} mv^2 \quad (10)$$

$$-mga + \frac{1}{2} m kga = -mga \cos \theta + \frac{1}{2} mv^2$$

$$v^2 = ga(k-2+2\cos \theta) \quad (5)$$

Applying ~~for~~ $F=ma$ for P,

$$R+T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{a} \quad (10)$$

$$R = -T + mg \cos \theta + \frac{m}{a} ga(k-2+2\cos \theta)$$

For the equilibrium of Q.

$$T - Mg = 0$$

$$T = Mg \quad (5)$$

$$\therefore R = -Mg + mg \cos \theta + \frac{m}{a} \cdot ga(k-2+2\cos \theta) \quad (5)$$

$$= mg \left[k-2+2\cos \theta - \frac{M}{m} \right] \quad (5)$$

When $k=b$.

$$R = mg \left[b-2+2\cos \theta - \frac{M}{m} \right] \quad (5)$$

$$= mg \left[4+2\cos \theta - \frac{M}{m} \right]$$

45

When the reaction disappeared.

$$R = 0 \quad (5)$$

$$mg \left(4+2\cos \theta - \frac{M}{m} \right) = 0$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{M}{m} - 4}{2} \quad (5)$$

But $0 < \theta < \pi$. (5)

$$\cos 0 > \cos \theta > \cos \pi. \quad (5)$$

$$1 > \frac{\frac{M}{m} - 4}{3} > -1 \quad (5)$$

$$3 > \frac{M}{m} - 4 > -3$$

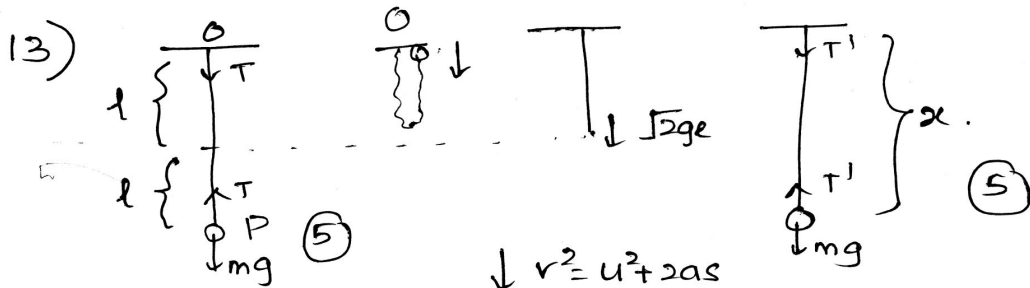
$$7 > \frac{M}{m} > 1$$

$$7m > M > m$$

The reaction is disappeared when

$$7m > M > m. \quad (5)$$

30.



$$\uparrow F = ma$$

$$T - mg = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\lambda l}{l} - mg = 0$$

$$\lambda = mg \quad (5)$$

$$\downarrow v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 0 + 2gl \quad (10)$$

$$v = \sqrt{2gl} \quad (5)$$

15

diagram. 25

$$\downarrow F = ma$$

$$mg - T' = m\ddot{x} \quad (10)$$

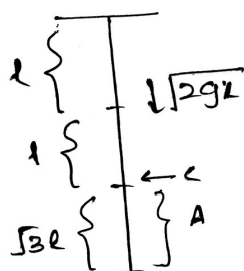
$$mg - mg\left(\frac{x-l}{l}\right) = m\ddot{x}$$

$$-\frac{g}{l}(x-l-l) = \ddot{x}$$

$$-\frac{g}{l}(x-2l) = \ddot{x} \quad (5)$$

$\therefore$ The motion is simple harmonic. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$

+ diagram 30



$$\ddot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$\ddot{x} = \sqrt{2gl}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad x = l \quad (10) \text{ conditions}$$

$$2gl = \frac{g}{l} (A^2 - l^2) \quad (5)$$

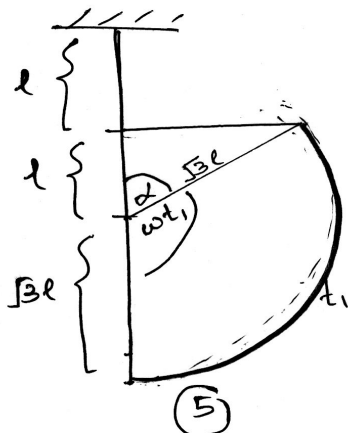
$$2l^2 + l^2 = A^2$$

$$A^2 = 3l^2$$

$$A = \sqrt{3}l \quad (5)$$

20

To calculate the time, let consider a horizontal circular motion of radius $\sqrt{3}l$ moving with ω angular velocity. (5)



$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{3}l} \quad (5)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \omega t_1 &= \pi - \alpha \quad (5) \\ &= \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\omega} \left(\pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (5) \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \end{aligned}$$

For the motion from 0 to distance l , 30
 $\downarrow v = u + at$
 $\sqrt{2gl} = 0 + gt_2 \quad (5)$
 $t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad (5)$ 10

Time taken by particle to reach the maximum distance from 0,

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} + \sqrt{\frac{2l}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

Time taken to reach the maximum height is equal to the time taken by particle to return 0. (10)

$$\therefore \text{Total time taken to reach } \circ \text{ again} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \right\} \quad (5)$$

20

$$14) a) \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$$

Let $\alpha \neq 0$.

(5)

$$\underline{a} + \frac{\beta}{\alpha} \underline{b} = \underline{0}$$

$$\underline{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \underline{b} \quad (5)$$

But $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non-zero, non-parallel vectors.

$\therefore$ The above result is impossible.

then $\alpha = 0$ (5)

Let $\beta \neq 0$,

$$\frac{\alpha}{\beta} \underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$$

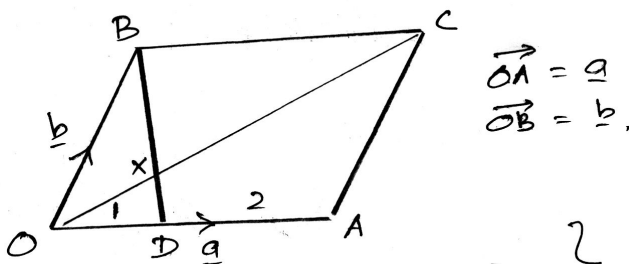
$$\frac{\alpha}{\beta} \underline{a} = -\underline{b}$$

As $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non-zero, non-parallel vectors, above result is impossible

$\therefore \beta = 0$ (5) (similarly)

$\therefore$ For $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$, $\alpha = 0$ and $\beta = 0$ (5)

25



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \underline{a} \\ \vec{OB} &= \underline{b} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} OX &= \lambda OC \\ OX &\parallel OC \end{aligned} \right\} \vec{OX} = \lambda \vec{OC}$$

$$\left. \begin{aligned} BX &= \mu BD \\ BX &\parallel BD \end{aligned} \right\} \vec{BX} = \mu \vec{BD}$$

(5)

$$\vec{OX} = \lambda \vec{OC}$$

$$\vec{OX} = \lambda (\vec{OA} + \vec{AC}) \quad (5)$$

$$\vec{OX} = \lambda (\underline{a} + \underline{b}) \quad (5) \quad \text{---} (1)$$

$$\vec{OX} = \vec{OB} + \vec{BX} \quad (5)$$

$$= \vec{OB} + \mu \vec{BD}$$

$$= \vec{OB} + \mu (\vec{BO} + \vec{OD})$$

$$= \underline{b} + \mu (-\underline{b} + \frac{1}{3}\underline{a})$$

$$= (1-\mu)\underline{b} + \frac{\mu}{3}\underline{a} \quad \text{---} (2) \quad (5)$$

By (1) and (2).

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = (1-\mu)\underline{b} + \frac{\mu}{3}\underline{a}$$

$$(\lambda - \frac{\mu}{3})\underline{a} + (\lambda - 1 + \mu)\underline{b} = 0 \quad (5) \quad [30]$$

As $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non-parallel and non-zero vectors.

$$\lambda - \frac{\mu}{3} = 0 \quad \text{and} \quad \lambda - 1 + \mu = 0$$

$$\lambda = \frac{\mu}{3} \quad (1) \quad \text{and} \quad \lambda + \mu = 1 \quad (2) \quad (5)$$

By (1) and (2).

$$\frac{\mu}{3} + \mu = 1$$

$$4\mu = 3$$

$$\mu = \frac{3}{4} \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \quad (5)$$

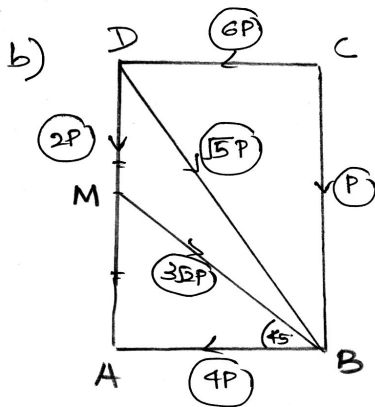
$$\therefore OX = \frac{1}{4} OC$$

$$OX : XC = 1 : 3 \quad (5)$$

$$BX = \frac{3}{4} BD.$$

$$BX : XD = 3 : 1 \quad (5)$$

[25]



$$X = 4P + 6P - 3P - P = 6P \quad (15)$$

$$\downarrow Y = P + 2P + 3P + 2P = 8P \quad (10)$$

$$R = \sqrt{(6P)^2 + (8P)^2} = 10P \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{8P}{6P} = \frac{4}{3} \quad (5)$$

diagram

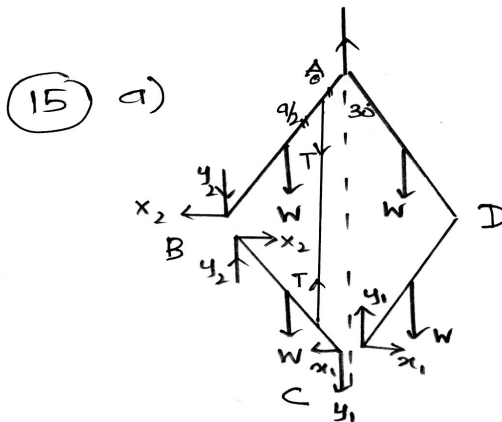
$$\overline{A)} \quad G. = P \cdot a - 6P \cdot 2a + 3\sqrt{3}P \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} + 15P \cdot a \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

$$= P \cdot a - 12Pa + 3Pa + 2Pa \cdot (5)$$

$$= -6Pa \quad (5)$$

There is a couple of moment $6Pa$ in anticlockwise 5

70



For the equ^m of AD and CD,

$$\sum A, \quad x_1 \times 4a \cos 30^\circ - 2W \cdot a \sin 30^\circ = 0 \quad (10)$$

$$x_1 \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2W \cdot a \cdot \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}} \quad (5)$$

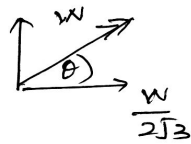
For the equ^m of CD.

$$\sum D, \quad y_1 \times 2a \sin 30^\circ - x_1 \times 2a \cos 30^\circ - W \cdot a \sin 30^\circ = 0 \quad (10)$$

$$y_1 \times 2a \cdot \frac{1}{2} - x_1 \times 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - W \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$y_1 = W \quad (5)$$

$$\text{Reaction at C} = \sqrt{\left(\frac{W}{2\sqrt{3}}\right)^2 + W^2}$$



$$= \frac{W}{2} \sqrt{\frac{13}{3}} \quad (5)$$

$$\tan \theta = \frac{W}{W/2\sqrt{3}}$$

$$\theta = \tan^{-1}(2\sqrt{3}) \quad (5)$$

ii) For the equ^m of BC.

$$\textcircled{B} \quad T \times \frac{3a}{2} \sin 30^\circ - W \times a \sin 30^\circ - x_1 \times 2a \cos 30^\circ - y_1 \times 2a \sin 30^\circ = 0 \quad (10)$$

$$T \times \frac{3a}{2} \times \frac{1}{2} = W \cdot \frac{a}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W \times 2a \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{3T}{4} = \frac{W}{2} + \frac{W}{2} + W$$

$$\frac{3T}{4} = 2W$$

$$T = \frac{8W}{3} \quad (5)$$

iii) For the equ^m of BC,

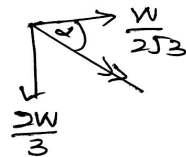
$$\rightarrow x_2 = x_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow y_2 = -T + y_1 + W$$

$$y_2 = -\frac{8W}{3} + 2W$$

$$y_2 = -\frac{2W}{3}$$

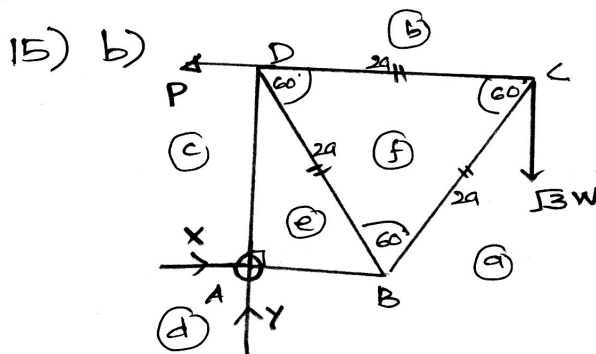
$$\begin{aligned} \text{Reaction at B} &= \sqrt{\left(\frac{W}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2W}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{19}}{6} W \quad (5) \end{aligned}$$



$$\tan \alpha = \frac{2W/3}{W/2\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \quad (5)$$

65



For the eq^m of system,

$$\curvearrowleft P \times 2a \cos 30^\circ = \sqrt{3}W \times 2a.$$

$$P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}W$$

$$P = 2W \quad (5)$$

$$\rightarrow X = P = 2W.$$

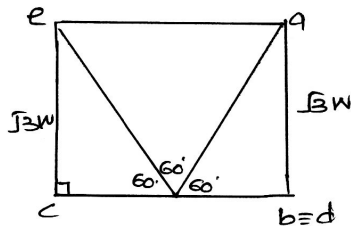
$$\uparrow Y = \sqrt{3}W.$$

$$\text{Reaction at A} = \sqrt{(2W)^2 + (\sqrt{3}W)^2} \quad (5)$$



$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5)$$



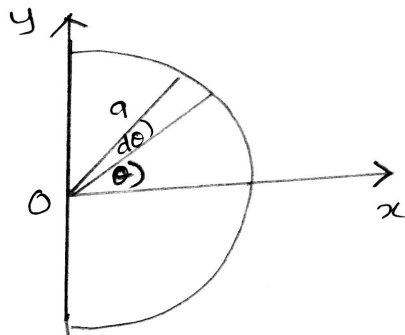
rod	Magnitude	Tension/Thrust
AB (ea)	2W	Thrust
AD (ce)	$\sqrt{3}W$	Thrust
BD (ef)	2W	Tension
BC (af)	2W	Thrust
CD (bf)	W	Thrust

(25)

(95)

85

(16)



By symmetry, the center of mass lies on the x axis. (5)

ρ is the mass per unit area.

$$x = \frac{2a}{3} \cos \theta$$

$$dm = \frac{1}{2} a^2 d\theta.$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2a}{3} \cos \theta \times \frac{1}{2} a^2 d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} a^2 d\theta} \quad (5)$$

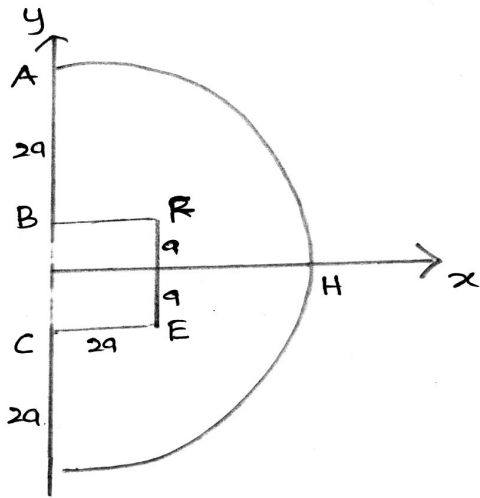
$$= \frac{2a}{3} \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta} \quad (5)$$

$$= \frac{2a}{3} \frac{[\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{[\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}} \quad (5)$$

$$= \frac{2a}{3} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{4a}{3\pi} \quad (5)$$

30



By symmetry, the center of mass lies on the Ox axis. (5)

ρ is the mass per unit area.

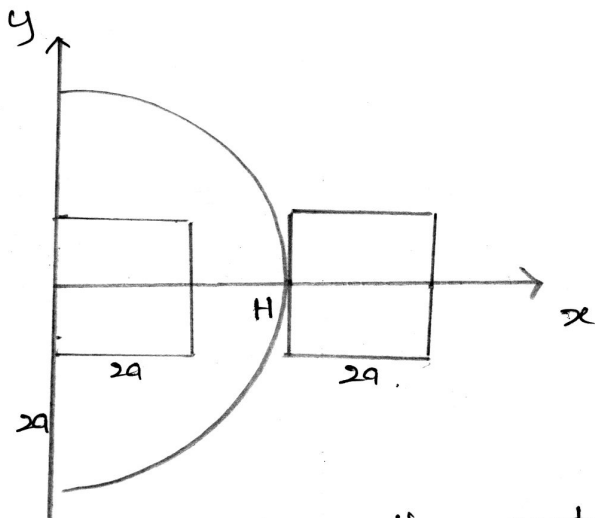
Object	Mass	Distance from O
D	$\frac{\pi(2a)^2}{2} = \frac{2\pi a^2}{1} \rho$ (5)	$\frac{4(2a)}{3\pi} = \frac{8a}{3\pi}$ (5)
□	$4a^2 \rho$ (5)	a (5)
⊐	$(\frac{2\pi-4}{1}) a^2 \rho$ (5)	$\bar{x}$

$$(\frac{2\pi-4}{1}) a^2 \rho \bar{x} = \frac{2\pi a^2}{1} \rho \times \frac{8a}{3\pi} - 4a^2 \rho \times a \quad (10)$$

$$(\frac{2\pi-4}{1}) \bar{x} = (18-4) a$$

$$\bar{x} = \frac{28a}{2\pi-4} \quad (5)$$

45



By Symmetry, the center of mass lies on Ox axis. (5)

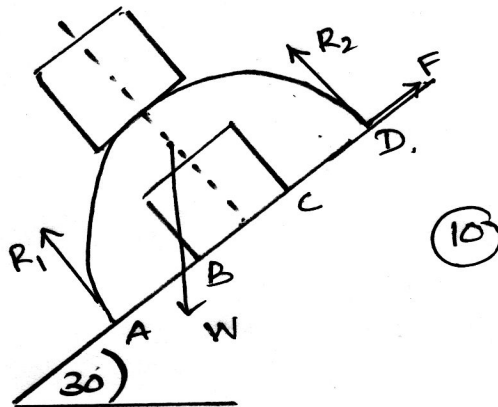
Object	mass	Distance from O
	$\left(\frac{9\pi-8}{2}\right)a^2\rho$	$\frac{28a}{9\pi-8}$ (5)
	$4a^2\rho$	$4a$ (5)
	$\frac{9\pi a^2}{2}\rho$ (5)	$\bar{x}$

$$\frac{9\pi a^2}{2}\rho \bar{x} = \left(\frac{9\pi-8}{2}\right)a^2\rho \left(\frac{28a}{9\pi-8}\right) + 4a^2\rho \times 4a \quad (10)$$

$$\frac{9\pi}{2}\bar{x} = 14a + 16a \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{60}{9\pi}a$$

$$\bar{x} = \frac{20}{3\pi}a \quad (5)$$



$$\nearrow F = W \sin 30^\circ \quad (5)$$

$$\nwarrow R_1 + R_2 = W \cos 30^\circ \quad (5)$$

For the equilibrium,

$$\mu \geq \left| \frac{F}{R_1 + R_2} \right| \quad (10)$$

$$\mu \geq \frac{W \sin 30^\circ}{W \cos 30^\circ}$$

$$\mu \geq \tan 30^\circ$$

$$\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

17) a) i) If $A \cap B = \emptyset$, then A and B are mutually exclusive events. (5)

ii) If $A \cup B = \Omega$, then A and B are exhaustive. (5)

10

b) $P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega)$ (5)

$$2a^2 + 2a + 8a - 1 = 1 \quad (5)$$

$$2a^2 + 10a - 2 = 0$$

$$a^2 + 5a - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\left(a + \frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \frac{25}{4}$$

$$a + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$a = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2} \quad (5)$$

As $a > 0$, $a = \frac{\sqrt{29} - 5}{2}$ (5)

25

c) i) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ (5)

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')]$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \quad (5) \quad \text{--- (1)}$$

$$(\because (A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset) \quad (5)$$

15

$$\text{ii) } A \cup B = (A \cup B') \cup B \quad (5)$$

$$\text{As } (A \cap B') \cap B = \phi$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup B') + P(B) \quad \text{--- (1)} \quad (5)$$

By (1) and (2),

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$

15

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$\frac{3}{4} = P(A \cap B) + \frac{2}{5} \quad (5)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20} \quad (5)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{20} \quad (5)$$

$$= \frac{15+10-7}{20}$$

$$= \frac{9}{10} \quad (5)$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{7}{20} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{20} \quad (5)$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{20} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{5} \quad (5)$$

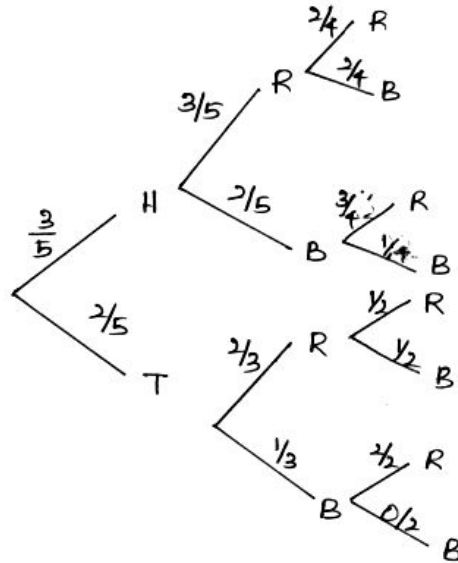
$$P(A \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$= 1 - \frac{7}{20}$$

$$= \frac{13}{20} \quad (5)$$

55

d)



$$i). \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{18}{100} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{47}{150} \quad (5)$$

$$ii) \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{4}{15} \quad (5)$$

30



LOL.LK
Learn Ordinary Level

විභාග ඉලක්ක පහසුවෙන් ජයගන්න පසුගිය විභාග ප්‍රශ්න පත්‍ර



- Past Papers
 - Model Papers
 - Resource Books
- for G.C.E O/L and A/L Exams



විභාග ඉලක්ක ජයගන්න
Knowledge Bank



Master Guide

WWW.LOL.LK



**CASH
ON**

DELIVERY



Whatsapp contact
+94 71 777 4440

Website
www.lol.lk



**Order via
WhatsApp**

071 777 4440