

I. (a)  $f(x) = x^2 + px + q = 0$  இன் மூலங்கள்  $\alpha, \beta$  ஆகும்.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-p}{1} = -p \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$$

$$y(p-x) = p+x \Rightarrow x = \frac{p(y-1)}{y+1}, \quad y \neq -1$$

$f(x) = 0$  இல்  $x$  இற்கு பிரதியிட

$$g(y) = \left[ p \frac{(y-1)}{y+1} \right]^2 + p \left[ \frac{p(y-1)}{y+1} \right] + q = 0$$

$$= (y-1)^2 p^2 + p^2 (y^2 - 1) + q(y+1)^2 = 0$$

$$= (2p^2 + q)y^2 + 2(q - p^2)y + q = 0$$

$$x = \alpha \text{ ஆகும் போது } y = \frac{p+\alpha}{p-\alpha} = \frac{-(\alpha+\beta)+\alpha}{-(\alpha+\beta)-\alpha} = \frac{\beta}{\beta+2\alpha}$$

$f(x) = 0$  என்னும் சமன்பாட்டின் ஓர் மூலம்  $\alpha$  ஆகும், எனவே  $\alpha$  ஆனது  $f(x) = 0$

என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். இவ் வாதே  $y = \frac{\beta}{\beta+2\alpha}$  ஆனது

சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். இதுபோல்  $x = \beta$  ஆகும்போது  $y = \frac{\alpha}{\alpha+2\beta}$

மேலும், அதே முறைப்படி என்பது  $g(y) = 0$  இன் ஒரு தீர்வு எனக் காட்டலாம்.

அத்துடன்  $g(y) = 0$  என்பது ஒரு இருப்படிச் சமன்பாடு என்பதால்  $\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}$  உம்

$\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$  என்பன்  $g(y) = 0$  என்றும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களாகும்.

$$\left( \frac{\alpha}{2\beta+\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\beta}{2\alpha+\beta} \right)^2 = \left( \frac{\alpha}{2\beta+\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha+\beta} \right)^2 - 2 \left( \frac{\alpha}{2\beta+\alpha} \right) \left( \frac{\beta}{2\alpha+\beta} \right)$$

$$= \left( \frac{\alpha(2\alpha+\beta) + \beta(2\beta+\alpha)}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)} \right)^2 - \frac{2\alpha\beta}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}$$

$$= \left( \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta}{2\beta^2 + 2\alpha^2 + 5\alpha\beta} \right)^2 - \frac{2\alpha\beta}{(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\alpha\beta)} = \left[ \frac{2(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta} \right]^2 - \frac{2\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta}$$

$$= \left( \frac{2(-p)^2 - 2q}{2(-p)^2 + q} \right)^2 - \frac{2q}{2(-p)^2 + q} = \left( \frac{2p^2 - 2q}{2p^2 + q} \right)^2 - \frac{2q}{2p^2 + q} = \frac{(2p^2 - 2q)^2 - 2q(2p^2 + q)}{(2p^2 + q)^2}$$

$$= \frac{4p^4 - 8p^2q + 4q^2 - 4qp^2 - 2q^2}{(2p^2 + q)^2} = \frac{4p^4 - 12p^2q + 2q^2}{(2p^2 + q)^2}$$

$$(b) (y + ax)(y + bx)(y + cx) = y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (y + ax)(y^2 + bxy + cxy + bcx^2) \\ &= y^3 + bxy^2 + cxy^2 + bcx^2y + axy^2 + abx^2y + cax^2y + abcx^3 \\ &= y^3 + (b + c + a)xy^2 + (bc + ab + ca)x^2y + abcx^3 \\ &= y^3 + (-3m)x^2y + abcx^3 \quad (\because a + b + c = 0; ab + bc + ca + 3m = 0) \\ &= y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3 \end{aligned}$$

$y = x^2 + m$  என்பதை LHS இல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (x^2 + m)((x^2 + m)^2 - 3mx^2) + abcx^3 \\ &= (x^2 + m)(x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3mx^2) + abcx^3 \\ &= (x^2 + m)(x^4 - mx^2 + m^2) + abcx^3 \\ &= x^6 - mx^4 + m^2x^2 + mx^4 - m^2x^2 + m^3 + abcx^3 \\ &= x^6 + m^3 + abcx^3 \end{aligned}$$

$$\therefore (x^2 + ax + m)(x^2 + bx + m)(x^2 + cx + m) \equiv x^6 + abcx^3 + m^3 \dots\dots\dots (1)$$

$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$  இன் காரணிகள்  $(x^2 - 2x + m)$ ,  $(x^2 + ax + m)$ ,  $(x^2 + bx + m)$  எனவே  $x^6 + 16x^3 + 64 \equiv (x^2 - 2x + m)(x^2 + ax + m)(x^2 + bx + m)$  என எழுதலாம்.

இது ஒரு சர்வசமன்பாடு ஆகையாலும் சமன்பாடு (1) இனைப் பயன்படுத்தியும் மாறிலி  $\Rightarrow m^3 = 64, m = 4$

$$x^3 \text{ இன் குணகம்} \Rightarrow -2ab = 16 \quad ab = -8$$

$$\text{மேலும்} \quad -2 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = 2$$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 2^2 - 4(-8) = 36$$

$$a - b = \pm 6$$

$$a = 4 \text{ அல்லது } -2 \quad a = 4 \text{ உம் } b = \frac{4 - 24.4.1}{4} = \frac{m}{4} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\begin{aligned} (i) \quad g(x) &\equiv (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 2x + 4) \\ &\equiv (x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2 \geq 0 \text{ எல்லா } x \text{ இற்கும்} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad g(x) &= 0, \quad (x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2 = 0 \\ (x + 2)^2 &= 0 \text{ அல்லது } x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ அல்லது } x^2 - 2x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$x = -2 \text{ அல்லது } -2,$$

$$\therefore x = -2, -2, 1 \pm \sqrt{3}i, 1 \pm \sqrt{3}i$$

2. (a) 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9

(i) மறிதரலுடன் 7 இலக்கங்களிலிருந்து வெவ்வேறு நான்கிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை  $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

(ii) மறிதரலின்றி 7 இலக்கங்களிலிருந்து வெவ்வேறு நான்கிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை  $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

வகை (i) 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| X | X | X | X |
|---|---|---|---|

 நான்குமுறை அதே இலக்கம் மறிதரலுடன் வரும் வெவ்வேறான நான்கிலக்கங்களின் எண்ணிக்கை  $= 7$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | x | x | y |
|---|---|---|---|

மூன்று முறை அதே இலக்கம் மறிதரலுடன் வரும்

$$\text{வெவ்வேறான நான்கிலக்கங்களின் எண்ணிக்கை} = 7 \times 6 \times \frac{4!}{3!} = 168$$

∴ நான்கிலக்க எண்களில் யாதாயினும் ஓர் இலக்கம் இரு தடவைகளுக்கு மேற்பட இல்லாத வேறுவேறான எண்களின் எண்ணிக்கை =  $2401 - (168 + 7) = 2226$   
வகை (ii) இல், இரு ஒற்றை இலக்கங்களையும் இரு இரட்டை இலக்கங்களையும் கொண்ட நான்கிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை =  ${}^3C_2 \times {}^4C_2 = 18$   
ஒவ்வொரு தெரிவினதும் மொத்த ஒழுங்கமைப்பு முறைகள் வகை =  $4! = 24$   
∴ இரு ஒற்றை இலக்கங்களும் இரு இரட்டை இலக்கங்களும் கொண்ட மொத்த வெவ்வேறான 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை =  ${}^3C_2 \times {}^4C_2 \times 4! = 18 \times 24 = 432$

ஒரு எண் இரட்டை எண்ணாக வேண்டின் இறுதி இலக்கம் இரட்டையாக இருக்க வேண்டும்.

|  |  |  |   |
|--|--|--|---|
|  |  |  | x |
|--|--|--|---|

∴ இறுதி இலக்கம் இரட்டையான நான்கிலக்க எண்களின்

$$\text{எண்ணிக்கை} = {}^4C_1 = 4$$

இரு ஒற்றை இலக்கத்தை ஒரு இரட்டை இலக்கத்தையும் கொண்டுள்ள தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை =  ${}^3C_2 \times {}^3C_1 = 3 \times 3 = 9$

ஒவ்வொரு தெரிவுக்குமான மொத்த ஒழுங்கமைப்பு =  $3!$

அதாவது இரு ஒற்றை இலக்கங்களையும் இரு இரட்டை இலக்கங்களையும் கொண்ட அமைந்த நான்கிலக்க எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$= {}^4C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3! = 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 216$$

$$(b) x \in R, (1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_r x^r + \dots + {}^nC_n x^n \text{ ----- (1)}$$

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$$

$$= (1+x)({}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1x + {}^{n-1}C_2x^2 + \dots + {}^{n-1}C_r x^r + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1})$$

$$= {}^{n-1}C_0 + ({}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1)x + \dots + ({}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r)x^r + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1} \text{ ----- (2)}$$

(1) இனதும் (2) இனதும் ஒத்த உறுப்புக்களின் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம்

$${}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_r = {}^nC_r, \quad r = 1, 2, \dots, n-1$$

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots + (-1)^{n-1} {}^nC_{n-1} + (-1)^n {}^nC_n$$

$$= {}^nC_0 - ({}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1) + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2) + \dots + (-1)^{n-1} ({}^{n-1}C_{n-2} + {}^{n-1}C_{n-1}) + (-1)^n {}^nC_n$$

$$= 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$$

வாய்ப்புப் பார்த்தல்.

$x = -1$  இனை  $(1+x)^n$  இல் பிரதியிட

$$(1-1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1(-1) + {}^nC_2(-1)^2 + \dots + {}^nC_r(-1)^r + \dots + {}^nC_{n-1}(-1)^{n-1} + {}^nC_n(-1)^n$$

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots + {}^nC_r(-1)^r + \dots + {}^nC_{n-1}(-1)^{n-1} + {}^nC_n(-1)^n$$

n ஆனது இரட்டை நிறைவேண்ணெனின்

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots - {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 0 \text{ ----- (1)}$$

x = 1 இனை  $(1+x)^n$  இல் பிரதியிடும்போது

$$(1+1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1(1) + {}^nC_2(1)^2 + \dots + {}^nC_r(1)^r + {}^nC_{n-1}(1)^{n-1} + {}^nC_n(1)^n$$

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_r + \dots + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n \text{ ----- (2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2^n {}^nC_0 + 2^n {}^nC_2 + 2^n {}^nC_4 + \dots + 2^n {}^nC_n = 2^n$$

$$\therefore {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots + {}^nC_n = 2^{n-1}$$

$$3. 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$$

$$n = 1 \text{ ஆகும் போது LHS} = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1 = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

$$\text{RHS} = 1^4 - (1-1)^4 = 1^4 - 0 = 1$$

$\therefore n = 1$  ஆகும்போது முடிவு உண்மை ஆகும்.

$n = p$  ஆகும்போது முடிவு உண்மை எனக் கொள்க.

$$\text{i.e. } 4p^3 - 6p^2 + 4p - 1 = (p)^4 - (p-1)^4$$

$n = p + 1$  எனின்

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 4(p+1)^3 - 6(p+1)^2 + 4(p+1) - 1 \\ &= 4[p^3 + 3p^2 + 3p + 1] - 6(p^2 + 2p + 1) + 4p + 4 - 1 \\ &= 4p^3 + 12p^2 + 12p + 4 - 6p^2 - 12p - 6 + 4p + 4 - 1 \\ &= 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\ &= p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 - p^4 \\ &= (p+1)^4 - p^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{ஏனெனில் } (p+1)^4 &= (p^2 + 2p + 1)^2 = p^4 + 4p^3 + 1 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 2p^2 \\ &= p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1) \end{aligned}$$

$\therefore n = p$  இற்கு முடிவு உண்மை எனின்,  $n = p + 1$  இற்கு முடிவு உண்மை ஆகும் ஆனால்  $n = 1$  இற்கு முடிவு உண்மை என நிறுவப்பட்டது.

$\therefore$  கணிதத்தொகுத்தறிவு முறைப்படி  $n$  இன் எல்லா நேர் முழு எண்களிற்கும் முடிவு உண்மை ஆகும்.

$$U_r - U_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1 \quad \text{இங்கு} \quad U_r = r^4$$

$$r=1 \quad U_1 - U_0 = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1$$

$$r=2 \quad U_2 - U_1 = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) - 1$$

$$r=n-1 \quad U_{n-1} - U_{n-2} = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$$

$$r=n \quad U_n - U_{n-1} = 4(n)^3 - 6(n)^2 + 4(n) - 1$$

$$\text{கூட்டுக} \quad U_n - U_0 = 4 \sum_{r=1}^n r^3 - 6 \sum_{r=1}^n r^2 + 4 \sum_{r=1}^n (r) - n$$

$$\begin{aligned} \therefore 4 \sum_{r=1}^n r^3 &= n^4 - 0 + 6 \cdot \frac{n}{6} (n+1) (2n+1) - 4 \cdot \frac{n}{2} (n+1) + n \\ &= n^4 + n(n+1) (2n+1) - 2n(n+1) + n \\ &= n(n^3 + 1) + n(n+1) (2n-1) = n(n+1) [n^2 - n + 1 + 2n - 1] \\ &= n(n+1) (n^2 + n) = n^2(n+1)^2 \\ \sum_{r=1}^n r^3 &= \frac{n^2}{4} (n+1)^2 = \left( \frac{n}{2} (n+1) \right)^2 \end{aligned}$$

$$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \dots$$

$$V_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + r^2 = \frac{r}{6} (r+1) (2r+1) = \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{6} r$$

$$\sum_{r=1}^n V_r = \sum_{r=1}^n \left( \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{6} r \right) = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^n r^3 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n r^2 + \frac{1}{6} \sum_{r=1}^n r$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2}{4} (n+1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{6} (n+1) (2n+1) + \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{2} (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{12} [n(n+1) + 2n + 1 + 1] = \frac{n(n+1)}{12} (n^2 + 3n + 2) = \frac{n}{12} (n+1)^2 (n+2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n V_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)^2 (n+2)}{12} = \infty \times \infty^2 \times \infty = \infty$$

முடிவிலி வரைக்குமான எண்களின் கூட்டுத்தொகை முடிவற்றதெனின் தொடர் ஒருங்கு தொடரல்ல.

$$W_r = \frac{2r+1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + r^2} = \frac{2r+1}{\frac{r}{6} (r+1) (2r+1)} = \frac{6(2r+1)}{r(r+1) (2r+1)}$$

$$W_r = \frac{6}{r(r+1)} = \frac{6}{r} - \frac{6}{r+1} = f(r) - f(r+1) \text{ இங்கு } f(r) = \frac{6}{r}$$

$r = 1$  ஆகும் போது

$$W_1 = f(1) - f(2)$$

$r = 2$  ஆகும் போது

$$W_2 = f(2) - f(3)$$

$r = n - 1$  ஆகும் போது

$$W_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$

$r = n$  ஆகும் போது

$$W_n = f(n) - f(n+1)$$

கூட்டுக

$$S_n = \sum_{r=1}^n W_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= 6 - \frac{6}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 6 - \frac{6}{n+1} \right) = 6 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 6 - \frac{6}{\infty} = 6 - 0 = 6$$

முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகை முடிவுள்ளதெனின் தொடர் ஒருங்கு தொடராகும்.

4. (a)  $Z = x + iy$  என்க.  $Z - a = (x - a) + iy$ ,  $Z + a = (x + a) + iy$

$$|Z - a| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$|Z - a| = |Z + a|, \quad \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2 + y^2$$

$$4ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

ஆதலால்  $Z$  இன் ஒழுக்கானது  $|Z - a| = |Z + a|$  ஆகும்போது ஆகண் தளத்திலுள்ள கற்பனை அச்சு,  $x = 0$

#### Aliter / வேறொரு

$P$  என்பது ஆகண் வரிப்படத்தில்  $Z$  ஐக் குறிக்கும் புள்ளி எனில்

$$A(a, 0), B(-a, 0), \quad AP = |Z - a|, \quad BP = |Z + a|$$

புள்ளி  $P$  ஆனது  $|Z - a| = |Z + a|$  என்னும் நிபந்தனையை திருப்திப்படுத்துவதால்  $AB$  யின் செங்குத்து இருசம சுறாக்கியானது ஆகண்தளத்தில் கற்பனை அச்சாகும்.

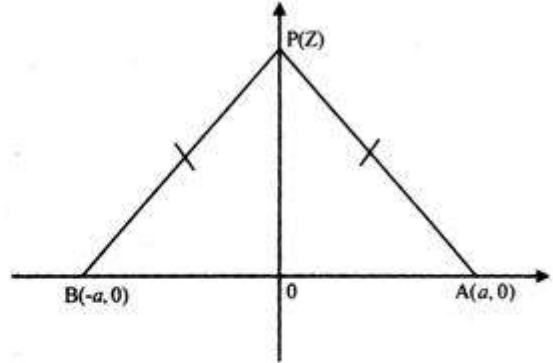
பகுதி (a) இன்படி  $\frac{Z_1}{Z_2}$  என்னும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளி ஆகண்

தளத்தில் கற்பனை அச்சில் இருக்கும். மேலும்  $i \frac{Z_1}{Z_2}$  என்னும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளி, ஆகண் தளத்தில் மெய் அச்சில் காணப்படும்.

(a)  $Z_1, Z_2 \neq 0$

$$|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{Z_1}{Z_2} - 2 \right| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} + 2 \right|$$



சிக்கலெண்  $i \frac{Z_1}{Z_2}$  ஆனது  $i \frac{Z_1}{Z_2} = k$  எனும் வடிவில் எழுதப்படலாம். இங்கு  $k$  மெய்யாகும்.

(b) (i)  $\frac{Z_1}{Z_2}$  எனும் சிக்கலெண் குறிக்கும் புள்ளி கற்பனை அச்சில் இருப்பதால்

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

இங்கே  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  நேர் பெறுமானம் கற்பனை அச்சில் நேர் பெறுமானம்

புள்ளிகளையும்  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  மறைப்பெறுமானம் கற்பனை அச்சின் மறைப் பெறுமானம் புள்ளிகளையும் குறிக்கும்.

$$\left|\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\right| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\arg(Z_1) - \arg(Z_2)| = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ஏனெனில் } \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2).$$

$$(ii) |Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$$

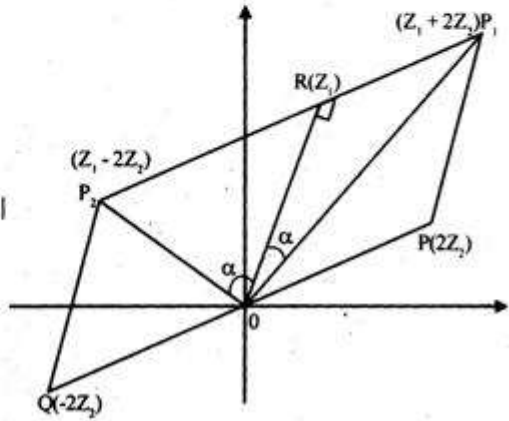
$$OP_2 = OP_1$$

$$RP_1 = OP = |2Z_2|$$

$$OQ = RP_2 = |-2Z_2|$$

$$\therefore OQ = RP_2$$

$$\therefore \angle ORP_1 = \frac{\pi}{2}$$



$$\tan \alpha =$$

$$= \frac{|2Z_2|}{|Z_1|} = 2 \frac{|Z_2|}{|Z_1|} = \frac{2}{|k|} \quad \therefore \frac{iZ_1}{Z_2} = k$$

$$OP_1 \text{ ஆனது } OP_2 \text{ இற்குச் செங்குத்து இல்லாவிடின் } \alpha \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha \neq 1 \Rightarrow |k| \neq 2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left( \frac{2}{|k|} \right)}{1 - \left( \frac{2}{|k|} \right)^2} = \frac{4|k|}{k^2 - 4}$$

$$\text{i.e. } \angle OP_1OP_2 = \tan^{-1} \left( \frac{4|k|}{k^2 - 4} \right)$$

$$OP_1 \text{ ஆனது } OP_2 \text{ இற்குச் செங்குத்து எனின் } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{|k|} = 1 \Rightarrow |k| = 2 \Rightarrow k = +2 \text{ அல்லது } -2$$

$$\begin{aligned} 5. \quad (a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x + x \sin 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \sin 3x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 2x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\sin 3x)}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 8 \left( \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} + 3 \times 1 \quad \because \quad \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \\ &= 8 \times 1 \times 1 + 3 = 11 \quad \because \quad \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \end{aligned}$$

$$(b) \quad (i) \quad y = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right) \quad Z = \tan^{-1}(x)$$

$$\frac{dy}{dZ} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dZ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dx} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) \right] \cdot \frac{1}{\frac{d}{dx} (\tan^{-1}(x))} \\
 &= \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)^2} \cdot \left[ \frac{x \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - (\sqrt{1+x^2}-1) \cdot 1}{x^2} \right] \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \\
 &= \frac{x^2}{x^2 + (1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2} + 1} \left[ \frac{x^2 - (1+x^2 - \sqrt{1+x^2})}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \right] \cdot (1+x^2) \\
 &= \frac{x^2}{2(1+x^2 - \sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**Aliter**

$$Z = \tan^{-1}(x) \Rightarrow x = \tan Z, \quad x = \tan Z \text{ ஐ}$$

$$y = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) \text{ இல் பிரதியிட}$$

$$y = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1+\tan^2 Z}-1}{\tan Z} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\sec Z-1}{\tan Z} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1-\cos Z}{\sin Z} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{Z}{2})}{2\sin \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{\sin^2 \frac{Z}{2}}{\sin \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2}} \right) = \tan^{-1} \left( \tan \left( \frac{Z}{2} \right) \right) = \frac{Z}{2}$$

$$\frac{dy}{dZ} = \frac{d}{dZ} \left( \frac{Z}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$(b) (ii) \quad y = e^{m \sin^{-1} x}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{m \sin^{-1} x} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{----- (1)}$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = my \quad \text{----- (2)}$$

x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = m \frac{dy}{dx}$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = m \sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx}$$

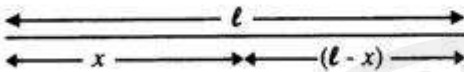
$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0 \quad \text{----- (2)}$$

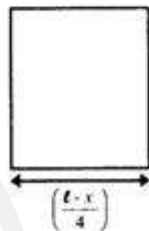
x ஐ குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$(1-x^2) \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} (-2x) - x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot 1 - m^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = 0, \Rightarrow (1-0) \frac{d^3 y}{dx^3} + 0 - 0 - \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} - m^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = (1+m^2) \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = (1+m^2) m \quad \left( \because (1) \Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = e^0 \frac{m}{1} = m \right)$$

(c) 



வட்டத்தின் ஆரை =  $\frac{x}{2\pi}$

சதுரத்தின் ஒருபக்கத்தின் நீளம் =  $\frac{l-x}{4}$

சதுரத்தின் பரப்பு + வட்டத்தின் பரப்பு =  $A(x)$

$$A(x) = \pi \left( \frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left( \frac{l-x}{4} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$$

$$\frac{d}{dA} [A(x)] = \frac{x}{4\pi} + \frac{2(l-x)}{16} (-1) = \left( \frac{4+\pi}{\pi} \right) \left( x - \frac{l\pi}{4+\pi} \right)$$

$$\frac{d}{dx} A(x) = 0 \quad \text{ஆகும்போது} \quad x = \frac{l\pi}{4+\pi}$$

$$x < \frac{l\pi}{4+\pi} \quad \text{ஆகும்போது} \quad \frac{d}{dx} A(x) < 0, \quad x = \frac{l\pi}{4+\pi} \quad \text{ஆகும்போது} \quad \frac{d}{dx} A(x) = 0,$$

$$x > \frac{l\pi}{4+\pi} \quad \text{ஆகும்போது} \quad \frac{d}{dx} A(x) > 0$$

∴  $A(x)$  இழிவு பெறுமானத்தை  $x = \frac{l\pi}{4+\pi}$  ஆகும்போது எடுக்கும்.

$$x = \frac{l\pi}{4+\pi} \quad \text{ஆகும்போது} \quad \text{வட்டத்தின் விட்டம்} = \frac{2x}{2\pi} = \frac{2(l\pi)}{2\pi(4+\pi)} = \frac{l}{4+\pi} \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம்} = \frac{l-x}{4} = \frac{1}{4} \left( l - \frac{l\pi}{4+\pi} \right) = \frac{l}{4} \frac{(4+\pi-\pi)}{4+\pi} = \frac{l}{4+\pi} \quad \text{-----(2)}$$

∴ (1), (2) சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் = வட்டத்தின் விட்டம்

6. (a)  $\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} dx = 1$

$$\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

$$\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{(Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x)(1+x^2) + D(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

பகுதிகள் சமனாக இருப்பதால் தொகுதிகளைச் சமன் செய்யலாம்.

$$2X = (Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x)(1+x^2) + D(1+x^2)$$

இது ஓர் சர்வசமன்பாடாகையால் ஒத்த உறுப்புக்களின் குணகங்களைச் சமன் செய்யலாம்,  $x$  எல்லா பெறுமானங்களையும் எடுக்கும்.

$$x^3 / \quad A + C = 0, \quad x = -1 \text{ ஆக } D = -1$$

$$\text{மாறிலி} / \quad B + C + D = 0 \Rightarrow B + C = 1$$

$$x^2 / \quad 2A + B + C + D = 0, \quad A = 0, \quad C = 0, \quad B = 1$$

$$\int \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \tan^{-1}(x) - \frac{(1+x)^{-1}}{(-1)} + \text{மாறிலி} = \tan^{-1}(x) + \frac{1}{1+x} + \text{மாறிலி}$$

(b)  $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$   $J = \int e^{ax} \sin bx \, dx$

(i)  $bI = b \int e^{ax} \cos bx \, dx$   
 $= b e^{ax} \frac{(\sin bx)}{b} - b \int e^{ax} a \frac{\sin bx}{b} dx$   
 $= e^{ax} \sin bx - aJ$   
 $\therefore bI + aJ = e^{ax} \sin bx \quad \text{----- (1)}$

(ii)  $aI = a \int e^{ax} \cos bxdx = a \cos bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - a \int (1 - \sin bx) \cdot b \frac{e^{ax}}{a} dx$

$aI = e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bxdx$   
 $aI - bJ = e^{ax} \cos bx \quad \text{----- (2)}$

$(1)b + (2)a \Rightarrow (b^2 + a^2)I = e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)$

$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$

$(1)a - (2)b \Rightarrow (a^2 + b^2)J = e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)$

$J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$

$$(c) \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x(x^3-1)}$$

$$= \int_1^8 \left( \frac{-x}{3t} \right) \frac{dt}{x \left( -\frac{1}{t} - 1 \right)} = \int_1^8 \frac{dt}{3t \left( \frac{1}{t} + 1 \right)}$$

$$= \int_1^8 \frac{dt}{3(1+t)} = \frac{1}{3} [\ln|1+t|]_1^8$$

$$= \frac{1}{3} [\ln 9 - \ln 2] = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{9}{2} \right)$$

$$x^3 t + 1 = 0$$

$$3x^2 t + x^3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-3x^2 t}{x^3} = \frac{-3t}{x}$$

$$dx = \frac{-x}{3t} dt$$

$$x = -1 \text{ ஆக } t=1, \quad x = -1/2 \text{ ஆக } t=8$$

7. (a)  $P(\alpha, \beta)$  என்பது தரப்பட்ட இரு

நேர்கோடுகளினால் ஆன கோணத்தின் இருகூறாக்கியில் உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$PM = PN$$

$$\left| \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right| = \left| \frac{a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|$$

$$\frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{(a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

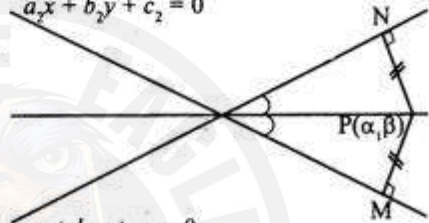
$P(\alpha, \beta)$  இன் ஒழுக்கு

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{(a_2 x + b_2 y + c_2)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

இவையே இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$



$$(b) \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = t \text{ என்க.}$$

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad \text{இங்கு } t \text{ ஒரு பரமானம்}$$

$P(x, y), \quad A(x_0, y_0)$  ஆகிய புள்ளிகளிற்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$\begin{aligned} PA^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (x_0 + at - x_0)^2 + (y_0 + bt - y_0)^2 = (a^2 + b^2)t^2 = 1 \times t^2 \end{aligned}$$

$$PA = \sqrt{t^2} = |t| \quad (\because a^2 + b^2 = 1)$$

(c) பகுதிகள் (a), (b) ஐப் பயன்படுத்தி  $\angle BAD$  யின் இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{(2x - y + 1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{(x - 2y + 5)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$2x - y + 1 = \pm (x - 2y + 5)$$

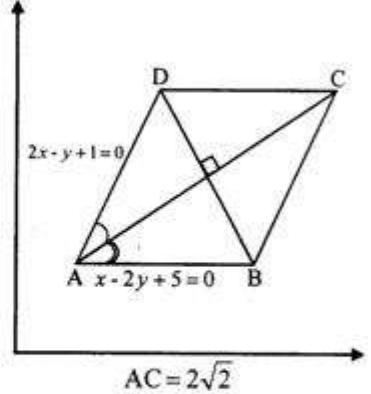
$$(+) x + y - 4 = 0, \quad (-) 3x - 3y + 6 = 0$$

$$x - y + 2 = 0$$

சமன்பாடுகள்  $x + y - 4 = 0$ ,

$x - 2y + 5 = 0$  (AB) ஐ கருதுக.

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 + (-1)\left(\frac{1}{2}\right)} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = -3$$



$\therefore x + y - 4 = 0$  விரிகோணத்தின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு

$\therefore AC$  யின் சமன்பாடு  $x - y + 2 = 0$

புள்ளி A  $2x - y + 1 = 0$

$x - 2y + 5 = 0$

$$\frac{x}{-5+2} = \frac{y}{1-10} = \frac{1}{-4+1} \Rightarrow A(1, 3)$$

$$AC \text{ யின் சமன்பாடு } \frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |2\sqrt{2}|$$

$C = (3, 5)$  அல்லது  $C = (-1, 1)$

முதலாம் கால்வட்டத்தில் சாய்சதுரம் உள்ளதால்  $C = (3, 5)$  ஆகும்.

BC யின் சமன்பாடு  $y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$

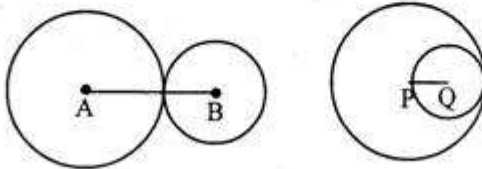
DC யின் சமன்பாடு  $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 7 = 0$

$$\tan \hat{D}AC = \left| \frac{2-1}{1+2 \times 1} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\triangle ADE \text{ இல் } DE = AE \tan \angle DAC = \sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$ABCD \text{ யின் பரப்பு } = 2\triangle ADC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

8. இரு வட்டங்களில் மையங்களிற்கு இடைப்பட்ட தூரம்  $= d = AB, d = PQ$



$$d^2 = (g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2, \quad d = \sqrt{(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2}$$

வட்டங்களின் ஆரைகள்  $r_1, r_2$  என்க.

$$r_1^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1$$

$$r_2^2 = g_2^2 + f_2^2 - c_2$$

$$r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$$

$$r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$$

இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று உட்புறமாகத் தொடுவதற்கு  $d = |r_1 - r_2|$   
 இருவட்டங்களை ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக தொடுவதற்கு  $d = r_1 + r_2$   
 யாதாயினும் இரு வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று தொடுவதற்கு  $d = |r_1 \pm r_2|$   
 $\Delta C P_1 T$  யில் கோணம்  $\angle C P_1 T = 90^\circ$

$$\text{பைதகரஸ் தேற்றப்படி } C P_1^2 = C T^2 + P_1 T^2$$

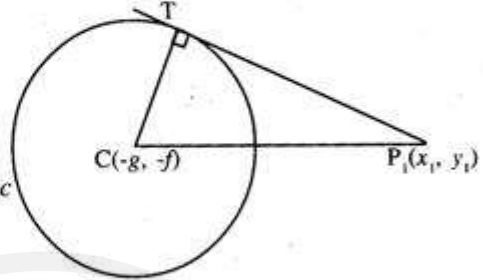
$$P_1 T^2 = C P_1^2 - C T^2$$

$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$

$$= x_1^2 + 2gx_1 + g^2 + y_1^2 + 2fy_1 + f^2 - g^2 - f^2 + c$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$P_1 T = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$



$$S_1 = x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow C_1 \equiv (-2, 1) \text{ ஆரை } r_1 = \sqrt{4 + 1 + 5} = \sqrt{10}$$

$$S_2 = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0 \Rightarrow C_2 \equiv (4, 3) \text{ ஆரை } r_2 = \sqrt{16 + 9 - 15} = \sqrt{10}$$

$$C_1 C_2 = \sqrt{(4 + 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = r_1 + r_2$$

$\therefore$  வட்டங்கள்  $S_1 = 0$  உம்  $S_2 = 0$  உம் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடும்.

$$\text{புள்ளி } A, C_1 C_2 \text{ இன் நடுப்புள்ளியாகும் } A \equiv \left( \frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = (1, 2)$$

$P \equiv (\alpha, \beta)$  என்க.

$$P \text{ யிலிருந்து } S_1 = 0 \text{ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலி } P T_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha - 2\beta - 5}$$

$$P \text{ யிலிருந்து } S_2 = 0 \text{ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலி } P T_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 8\alpha - 6\beta + 15}$$

$$P T_1 = k P T_2 \Rightarrow (P T_1)^2 = k^2 (P T_2)^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha - 2\beta - 5 = k^2 (\alpha^2 + \beta^2 - 8\alpha - 6\beta + 15)$$

$$(1 - k^2)\alpha^2 + (1 - k^2)\beta^2 + (4 + 8k^2)\alpha + (6k^2 - 2)\beta - 5 - 15k^2 = 0$$

$$(i) \quad k = 1 \text{ எனின் } 12\alpha + 4\beta - 5 - 15 = 0 \Rightarrow 3\alpha + \beta - 5 = 0$$

$\therefore (\alpha, \beta)$  இன் ஒழுங்கு  $3x + y - 5 = 0$ , ஒரு நேர் கோடு படித்திறன்  $m = 3$

$$A \equiv (1, 2) \quad \text{LHS} = 3(1) + 2 - 5 = 0$$

புள்ளி A யின் ஆள்கூறுகள் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்வதால் நேர்கோடு A யினூடு செல்லும்.

$$m_{c_1 c_2} = c_1 c_2 \text{ இன் படித்திறன் } = \frac{3 - 1}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$m_{c_1 c_2} \times m = (-3) \times \frac{1}{3} = -1$$

$\therefore$  புள்ளி P யின் ஒழுக்கு A யினூடு செல்லும் செங்குத்தான நேர்கோடாகும்.

(ii)  $k \neq 1 \Rightarrow 1 - k^2 \neq 0$  பயின் ஒழுக்கு

$$(1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 + (4 + 8k^2)x + (6k^2 - 2)y - 5 - 15k^2 = 0$$

இது ஒரு வட்டமாகும்.

$$\text{புள்ளி } A \equiv (1, 2) \Rightarrow \text{LHS} \equiv (1 - k^2)1 + (1 - k^2)(2)^2 + (4 + 8k^2)1 + (6k^2 - 2)2 - 5 - 15k^2 \\ = 1 + 4 + 4 - 4 - 5 - k^2 - 4k^2 + 8k^2 + 12k^2 - 15k^2 = 0 = \text{RHS}$$

$\therefore$  வட்டம்  $A(1, 2)$  என்னும் புள்ளியினூடு செல்லும்.

$$k = \frac{1}{2} \text{ எனில் } \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{4}\beta^2 + 6\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{35}{4} = 0$$

$$\text{இன் ஒழுக்கு வட்டம் } S_3 \equiv x^2 + y^2 + 8x - \frac{2}{3}y - \frac{35}{3} = 0$$

$$C_1 = \left(-4, \frac{1}{3}\right) \quad r_1 = \sqrt{16 + \frac{1}{9} + \frac{35}{3}} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

$$C_2C_3 = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{5\sqrt{10}}{3} + \sqrt{10} = r_1 + r_2$$

$\therefore$  இரு வட்டங்கள்  $S_1 = 0$  உம்  $S_2 = 0$  உம்  $A$ யில் வெளிப்புறமாகத் தொடும்.

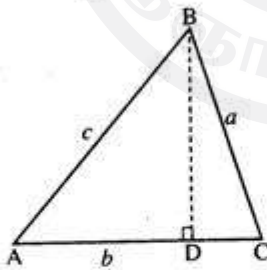
$$C_1C_3 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{5\sqrt{10}}{3} - \sqrt{10} = r_1 - r_2$$

$\therefore$  வட்டங்கள்  $S_1 = 0$  உம்  $S_3 = 0$  உம் புள்ளி  $A$ யில் உட்புறமாகத் தொடும்.

9. (a) கோசைன் நெறி  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

நிறுவல்

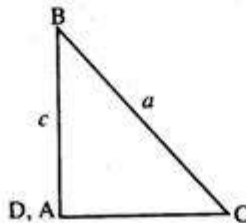
(i)  $\triangle ABC$  ஓர் கூர்ங்கோண முக்கோணம்  $A < 90^\circ$ ,  $\triangle BDC$  யில்



$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 \\ &= (AB^2 - AD^2) + (AC - AD)^2 \\ &= AB^2 - AD^2 + AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2AC \cdot AB \cos A \\ &= c^2 + b^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

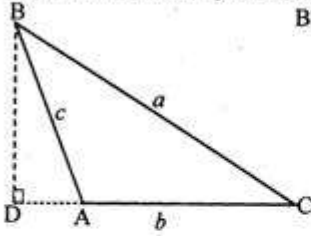
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(ii)  $A = 90^\circ$ ,  $\triangle ABC$  ஓர் செங்கோண முக்கோணம்  $BC^2 = BA^2 + AC^2$



$$\begin{aligned} &= BA^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cos A, \quad C = 90^\circ \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2cb \cos A \end{aligned}$$

(iii) ABC ஒரு விரிகோண முக்கோணம்  $A > 90^\circ$ ,  $\triangle BDC$  யில்



$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 \\ &= AB^2 - DA^2 + (DA + AC)^2 \\ &= AB^2 - DA^2 + DA^2 + 2DA \cdot AC + AC^2 \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot DA \\ &= c^2 + b^2 + 2b \cdot AB \cos(\pi - A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

$$(i) \quad 2 \left( \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

$$\text{LHS} = 2 \left[ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} \right] = 2 \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} \right) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$(a+b+c)(b+c+a+c) = 3(a+c)(b+c)$$

$$(a+b+c)^2 + (a+b+c)c = 3(ab+bc+ac+c^2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + ac + bc + c^2 = 3(ab + bc + ac + c^2)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} = \cos C = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$$

$$(b) \quad \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

$$= 2 \left( \cos \theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = R \cos(\theta - \alpha), R = 2, \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} \cos^2 \theta + (1 - \sqrt{3}) \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta - \cos \theta + \sin \theta = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) - 1(\cos \theta - \sin \theta) = 0$$

$$(\cos \theta - \sin \theta)(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) = 0$$

$$\cos \theta - \sin \theta \quad \text{அல்லது} \quad \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$\cos \theta = \sin \theta, \Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \text{இங்கு } n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Rightarrow \cos \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{6} = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad \text{இங்கு } m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

(c)  $-1 \leq x \leq 1$

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$$

$$\theta = \cos^{-1}(x)$$

$\theta$  இன் தலை மையப் பெறுமானம் 0 இற்கும்  $\pi$  இற்கு இடையில் இருக்கும்.

$$x = \cos \theta$$

$$-x = -\cos \theta = \cos(\pi - \theta)$$

ஆனால்  $(\pi - \theta)$  ஆனது 0 இற்கும்  $\pi$  இற்கும் இடையில் இருக்கும்

$$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \theta$$

$$= \pi - \cos^{-1}(x)$$

August 2010

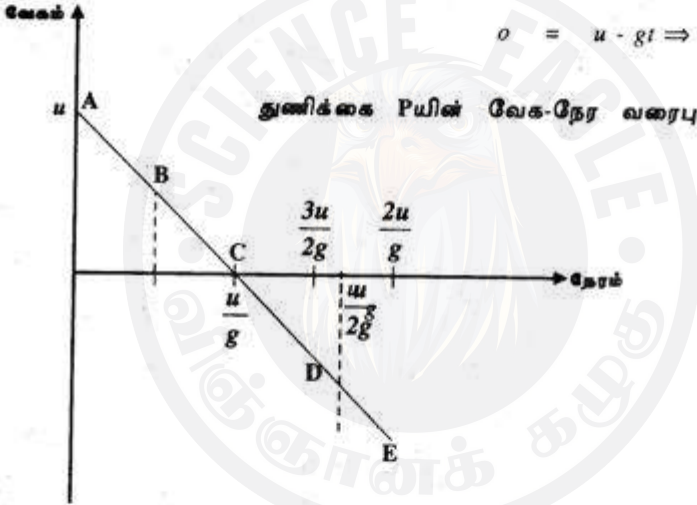
Combined Mathematics - II

Answers

1. (a) அதி உயரத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம்

$$v = u + at$$

$$0 = u - gt \Rightarrow t =$$

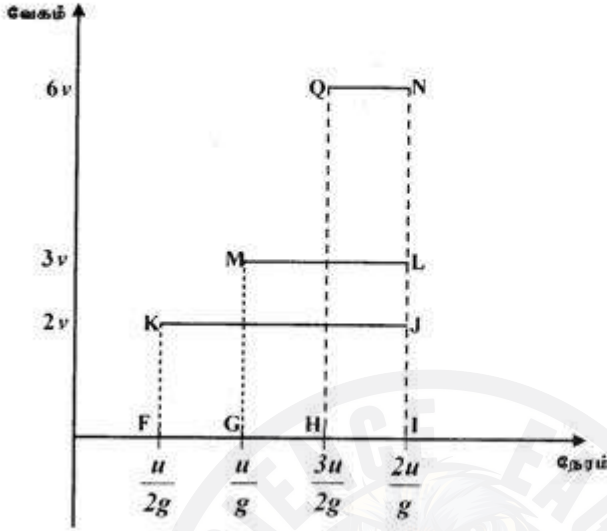


துணிக்கை P யின் வேக-நேர வரைபு நேர்கோடு AE யினால் தரப்படும்.

துணிக்கைகள்  $P_1, P_2, P_3$  என்பன துணிக்கை P இலிருந்து கிடையாக வீசப்படுவதால் அவற்றின் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறுகள் P யின் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறுகளுடன் குறிப்பிட்ட நேரங்களில் முறையே பொருந்தும். இதிலிருந்து துணிக்கைகள்  $P_1, P_2, P_3$  யின் வேகங்களின் நிலைக்குத்துக் கூறுகள் வேக நேர வளையிகள் P யின் வேக-நேர வளையியின் பகுதிகளுடன் முறையே பொருந்தும்.

துணிக்கை  $P_1$  இன் நிலைக்குத்து வேக கூற்றின் வேக-நேர வரைபு நேர்கோடு BE  
துணிக்கை  $P_2$  இன் நிலைக்குத்து வேக கூற்றின் வேக-நேர வரைபு நேர்கோடு CE  
துணிக்கை  $P_3$  இன் நிலைக்குத்து வேக கூற்றின் வேக-நேர வரைபு வரைபு நேர்கோடு DE

கிடை வேக கூற்றின் வேக-நேர வரைபு



- (i) முதலாவது வேக-நேர படத்திலிருந்து நான்கு துணிக்கைகளும் ஒரே நேரம்  $\frac{2u}{g}$

நேரத்தில் தரையை வந்தடைகின்றன என்பது வெளிப்படை.

- (ii) இரண்டாவது வேக-நேர வரைபிலிருந்து துணிக்கை  $P_1$  கிடையாகச் சென்ற தூரம்

= பரப்பு செவ்வகம் FIJK

$$= 2v \left( \frac{2u}{g} - \frac{u}{2g} \right) = \frac{3uv}{g}$$

துணிக்கை  $P_2$  கிடையாகச் சென்ற தூரம்

= பரப்பு செவ்வகம் GILM

$$= 3v \left( \frac{2u}{g} - \frac{u}{2g} \right) = \frac{3uv}{g}$$

துணிக்கை  $P_3$  கிடையாகச் சென்ற தூரம்

= பரப்பு செவ்வகம் MLNQ

$$= 6v \left( \frac{2u}{g} - \frac{3u}{2g} \right) = \frac{3uv}{g}$$

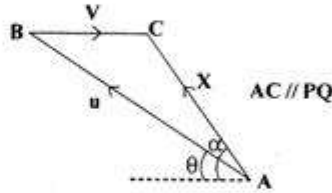
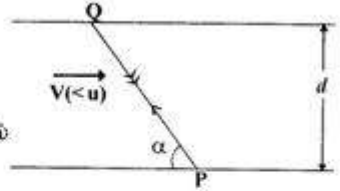
துணிக்கைகள்  $P_1, P_2, P_3$  கிடையாகச் சென்ற தூரம்  $\frac{3uv}{g}$  ஆகையால் மூன்று

துணிக்கைகளும் தரையில் ஒரே இடத்தில் விழுகின்றன.

(b)  ${}^M V_W = u$  ,  ${}^W V_E = V \rightarrow$

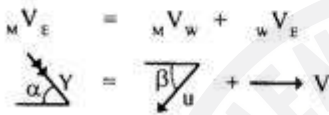
${}^M V_E =$  , நீரோட்டத்திற்கு எதிரான திசையில்

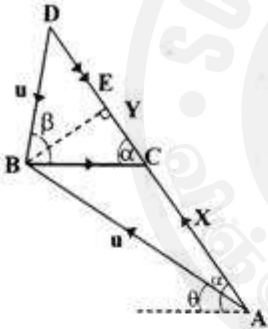
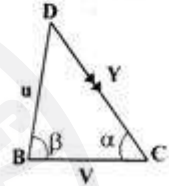
${}^M V_E = {}^M V_W + {}^W V_E$   

${}^M V_W = \beta u$  ,  ${}^W V_E = V \rightarrow$

${}^M V_E =$   நீரோட்டத்தின் திசையில்

${}^M V_E = {}^M V_W + {}^W V_E$   




$\Delta ABE$  யில்

$AE = \sqrt{u^2 - (V \sin \alpha)^2}$

$EC = V \cos \alpha$

$\therefore X = AC = AE - EC$

$= \sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha} - V \cos \alpha$

நீரோட்டத்திற்கு எதிரான திசையில் PQ தூரத்தை

நீந்த எடுத்த நேரம்  $t_1 = \frac{PQ}{X}$

$\Delta BDE$ யில்

$DE = \sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha}$

$Y = DE + EC = \sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha} + V \cos \alpha$

நீரோட்டத்தின் திசையில் PQ தூரத்தை நீந்த எடுத்த நேரம்  $= t_2 = \frac{PQ}{Y}$

மொத்த நேரம்  $= t_1 + t_2 = \frac{PQ}{X} + \frac{PQ}{Y} = PQ \frac{(X + Y)}{XY}$

$= d \operatorname{Cosec} \alpha \frac{(\sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha} - V \cos \alpha + \sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha} + V \cos \alpha)}{(\sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha} - V \cos \alpha)(\sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha} + V \cos \alpha)}$

$= \frac{d \operatorname{Cosec} \alpha (2\sqrt{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha})}{u^2 - V^2 \sin^2 \alpha - V^2 \cos^2 \alpha} = \frac{d (2\sqrt{u^2 \operatorname{Cosec}^2 \alpha - V^2})}{u^2 - V^2} \quad (\because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1)$

- (i) புள்ளி Q ஆனது புள்ளி P யின் நேரோட்டத்தின் திசையில்  $\alpha$  இனை  $(\pi - \alpha)$  ஆல் பிரதியிட மொத்த நேரம் பெறப்படும்.

$$\text{மொத்த நேரம்} = \frac{2d \sqrt{u^2 \operatorname{Cosec}^2 (\pi - \alpha) - V^2}}{u^2 - V^2} = \frac{2d \sqrt{u^2 \operatorname{Cosec}^2 \alpha - V^2}}{u^2 - V^2}$$

- (ii) மொத்த நேரம் இழிவாவதற்கு தொகுதி இழிவாக இருக்க வேண்டும் தொகுதியின் இழிவுப் பெறுமானத்திற்கு  $(\operatorname{Cosec}^2 \alpha)_{\min} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$   
புள்ளி Q ஆனது ஆற்றின் மற்றைய கரையில் புள்ளி P யிற்கு நேர் எதிரானதாக இருக்கும் போது மொத்த நேரம் இழிவாகும்.

2. நேரம்  $t = t$  யில்  $OA = x$ ,  $AP = y$  என்க.

$$x + y = l \Rightarrow \dot{x} + \dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

$$\text{தரவின்படி } F = -\ddot{x}, \quad f = \ddot{y} \Rightarrow -F + f = 0 \Rightarrow F = f$$

துணிக்கை P யிற்கு AC வழியே

$F = ma$  ஐ பிரயோகிக்க.

$$mg \sin \alpha - T = m(f - F \cos \alpha) \text{ ----- (1)}$$

தொகுதிக்கு  $F = ma$  ஐ

$$T = MF + m(F - f \cos \alpha) \text{ ----- (2)}$$

$$f = F, (1) + (2) \Rightarrow mg \sin \alpha = MF + m(F - F \cos \alpha) + m(F - F \cos \alpha)$$

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}$$

ஆப்பின் இயக்கத்திற்கு  $u = 0$ ,  $s = d$ ,  $t = ?$   $F = \checkmark$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \leftarrow, \quad d = 0 + \frac{1}{2}Ft^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{F}} = \sqrt{\frac{2d(M + 2m(1 - \cos \alpha))}{mg \sin \alpha}}$$

ஆப்பின் இயக்கத்திற்கு  $V = ?$ ,  $u = 0$ ,  $F = \checkmark$   $t = \checkmark$ ,  $v = u + at \leftarrow$

$$v = 0 + Ft = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} \cdot \sqrt{\frac{2d(M + 2m(1 - \cos \alpha))}{mg \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2d mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}}$$

துணிக்கை P யிற்கு  $v = u + at$  தளம் வழியே

$$v_1 = 0 + (f - F \cos \alpha)t = F(1 - \cos \alpha)t \checkmark$$

$v = u + at$  தளத்திற்கு செங்குத்தாக பிரயோகிக்க.  $v_2 = 0 + F \sin \alpha \cdot t$

$$V^2 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{F^2(1 - \cos \alpha)^2 t^2 + F^2 \sin^2 \alpha t^2} = Ft \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} \cdot \sqrt{\frac{2d(M + 2m(1 - \cos \alpha))}{mg \sin \alpha}} \cdot \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 2 \sqrt{\frac{d mg \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}}$$

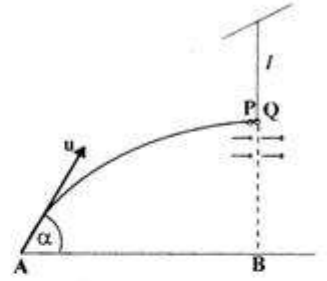
3. துணிக்கை P, Q ஐ அடைய எடுத்த நேரம்  $t_0$  என்க. ஆரம்பத்தில் P இற்கும் Q இற்கும் இடைப்பட்ட கிடைத்தூரம் R என்க.

A இலிருந்து Q இற்கு  $\uparrow V = u + at$

$$0 = u \sin \alpha - g t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{u \sin \alpha}{g}$$

A இலிருந்து Q இற்கு  $\rightarrow s = ut + \frac{1}{2} at^2$

$$R = u \cos \alpha \cdot \frac{u \sin \alpha}{g} = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}$$



உந்தக்காப்பு விதிப்படி

$$mu \cos \alpha + 0 = mV_p + mV_0$$

$$V_p + V_0 = u \cos \alpha \quad (1)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனைவிதிப்படி

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

$$V_0 - V_p = e(0 - u \cos \alpha) = -eu \cos \alpha \quad (2)$$

முன்

(P)

$$\rightarrow u \cos \alpha$$

$$\rightarrow V_p$$

(Q)

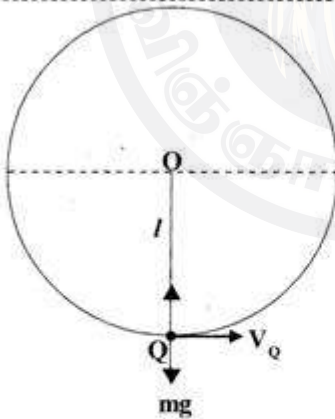
$$\rightarrow 0$$

$$\rightarrow V_0$$

பின்

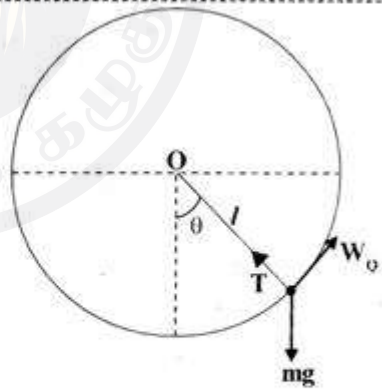
$$(1) + (2) \Rightarrow 2V_0 = (1 + e)u \cos \alpha \Rightarrow V_0 = \frac{1}{2}(1 + e)u \cos \alpha$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2V_p = (1 - e)u \cos \alpha \Rightarrow V_p = \frac{1}{2}(1 - e)u \cos \alpha$$



நிலை (i)

PE = 0



நிலை (ii)

நிலை (ii) இற்கு  $F = ma$  ஐ பிரயோகிக்க.  $T - mg \cos \theta = \frac{m W_0^2}{l} \quad (3)$

இயக்கத்தின் போது இழையின் உள்ள இழுவையின் திசை எப்போதும் இயக்கத்தின் திசைக்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால் இழுவையால் வேலை செய்யப்படவில்லை, சக்தி காப்புத் தத்துவத்தின்படி

∴ நிலை (i) இல் (PE + KE) = நிலை (ii) இல் (PE + KE)

$$-mgl + \frac{1}{2} mV_0^2 = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2} mW_0^2$$

$$W_0^2 = V_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{4} (1+e)^2 u^2 \cos^2 \alpha - 2gl(1 - \cos \theta)$$

$$(3) \Rightarrow T = mg \cos \theta + \frac{m}{l} \left[ \frac{1}{4} (1+e)^2 u^2 \cos^2 \theta - 2gl(1 - \cos \theta) \right]$$

முழுவட்டத்தை துணிக்கை Q ஆக்குவதற்கு  $\theta = \pi$  ஆகும் போது  $T \geq 0$

$$T = mg(-1) + \frac{m}{l} \left[ \frac{1}{4} (1+e)^2 u^2 \cos^2 \alpha - 2gl(1 - (-1)) \right] \geq 0$$

$$(1+e)^2 u^2 \cos^2 \alpha - 2gl \geq 0, \left( u \cos \alpha - \frac{\sqrt{20gl}}{1+e} \right) \left( u \cos \alpha + \frac{\sqrt{20gl}}{1+e} \right) \geq 0$$

$$\therefore u \cos \alpha \geq \frac{2\sqrt{5gl}}{1+e} \text{ எனின் துணிக்கை Q பூரண வட்டத்தை ஆக்கும்.}$$

துணிக்கையின் இயக்கத்தை கருதுக. துணிக்கை Q உடன் மோதுவதற்கு முன்னர் துணிக்கை P அடைந்த அதி உயர்  $\uparrow V^2 = u^2 + 2as$

$$0 = u^2 \sin^2 \alpha + 2(g)h \Rightarrow h = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\text{கிடையாகச் சென்ற தூரம்} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = R$$

மோதலின் P கிடையாகச் சென்ற தூரம் = S

$$C \rightarrow D \downarrow s = ut + \frac{1}{2} ut^2, \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 0 + \frac{1}{2} gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \frac{U \sin \alpha}{g}$$

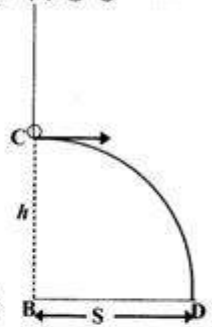
$$C \rightarrow D \quad S = ut + \frac{1}{2} at^2 \rightarrow S = V_p t_1 = \frac{1}{2} (1-e) U \cos \alpha \cdot \frac{2u \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2}{2g} (1-e) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{u^2}{4g} (1-e) \sin 2\alpha$$

∴ P கிடையாகச் சென்ற மொத் தூரம் =

$$R + S = \frac{u^2 \sin \alpha}{2g} + \frac{u^2}{4g} (1-e) \sin 2\alpha = \frac{u^2}{4g} (3-e) \sin 2\alpha$$

$e = 3$  ஆகும் போது துணிக்கை கிடையாகச் சென்ற தூரம் பூச்சியமாகும். எனவே மீண்டும் எறியப்பட்ட புள்ளியை வந்ததையும்.



4. சமநிலையில் இழை உள்ள போது இழுவை  $T_0$  என்க. நிலை (ii)

$$T_0 = mg = \frac{\lambda a}{l} \Rightarrow a = \frac{mgl}{\lambda}$$

நிலை (iv) இற்கு  $F = ma \downarrow$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \lambda \frac{(a+x)}{l} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{l}$$

$$m\ddot{x} + \frac{mgl}{a} x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{a} x = 0$$

$$x = A \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

$$\dot{x} = -A \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t + B \sqrt{\frac{g}{a}} \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \quad \text{----- (1)}$$

$$t = 0, \quad x = b \Rightarrow b = A \times 1 + B \times 0 \Rightarrow A = b$$

$$t = 0, \quad \dot{x} = 0 \Rightarrow 0 = -A \times 0 + B \times \sqrt{\frac{g}{a}} \times 1 \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore x = b \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

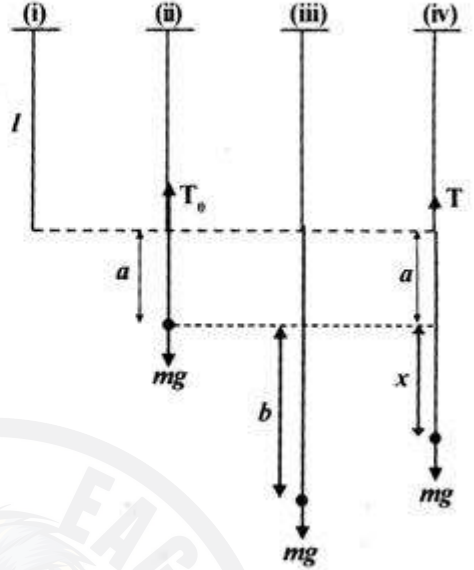
$x = -a$  ஆகும் வரை துணிக்கை எளிய இசை இயக்கத்தை ஆக்கும்.

$$a = b \cos \left( \sqrt{\frac{g}{a}} t \right) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha = \frac{-a}{b} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{b}$$

$\therefore$  துணிக்கை P ஆனது நேரம்  $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$  இற்கு எளிய இசை இயக்கத்தை

ஆற்றுகின்றது. இங்கு  $\sin \alpha = \frac{a}{b}$  அல்லது  $\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{a}{b} \right)$

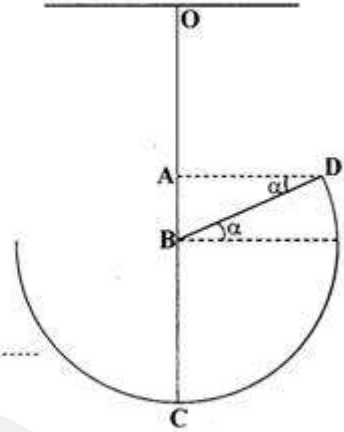


வேறு வழி : எளிய இசை இயக்கத்தை ஆக்கும் பகுதி வட்டவில் CD வரையாகும்.

$$\text{கோண வேகம்} = \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$\text{நேரம்} = \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\omega} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sqrt{\frac{g}{a}} \text{ இங்கு } \sin \alpha = \frac{a}{b}$$



$$x = b \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \Rightarrow \dot{x} = -b \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

$$t = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sqrt{\frac{a}{g}} \Rightarrow \dot{x} = -b \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{a}} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sqrt{\frac{a}{g}}\right)$$

$$= -b \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -b \sqrt{\frac{g}{a}} \cos \alpha = -b \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{\frac{g}{a}} (b^2 - a^2)$$

∴ எளிய இசை இயக்கத்திலிருந்து விலகும் நேரத்தில் துணிக்கை P யின் வேகம்

$$\text{மேல் நோக்கி } \sqrt{\frac{g}{a}} (b^2 - a^2)$$

துணிக்கையானது A யில் மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துக் வேகத்துடன் புவியீர்ப்பின்

$$\text{கீழ் ஆரம்ப வேகம் } \sqrt{\frac{g}{a}} (b^2 - a^2) \text{ மேல் நோக்கி இயங்கும்.}$$

$$\uparrow v^2 = u^2 + 2as \text{ ஐ பிரயோகிக்க. } s = l, a = -g, v = ?$$

$$v^2 = \frac{g}{a} (b^2 - a^2) + 2(-g)l = \frac{g}{a} (b^2 - a^2) - 2 \frac{\lambda a}{m}$$

$$= \frac{g}{a} \left[ b^2 - a^2 - \frac{2\lambda a^2}{mg} \right] = \frac{g}{a} \left[ b^2 - a^2 \left( 1 + \frac{2\lambda}{mg} \right) \right]$$

$$b^2 > a^2 \left( 1 + \frac{2\lambda}{mg} \right) \text{ எனில் } v^2 > 0$$

$$\left( b - a \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}} \right) \left( b + a \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}} \right) > 0 \Rightarrow b > a \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}}$$

எனில் P சீலிங்கில் பூச்சியமல்லாத வேகத்துடன் அடிக்கும்.

5. (a) FA வழியே விசைகளைக் கூறாக்க.

$$\bar{X} = -P + 2P \cos 60^\circ - P \cos 60^\circ - 2P + 3P \cos 60^\circ + 2P \cos 60^\circ$$

$$= 6P \cos 60^\circ - 3P = 0$$

FA ந்கு செங்குத்தாக விசைகளைக் கூறாக்க.

$$\uparrow Y = 12 \sin 60^\circ + P \sin 60^\circ + 3P \sin 60^\circ - 2P \sin 60^\circ$$

$$= 4P \sin 60^\circ = 4P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}P$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{3}P \uparrow \text{விளையுள் AC வழியே தாக்கும்.}$$

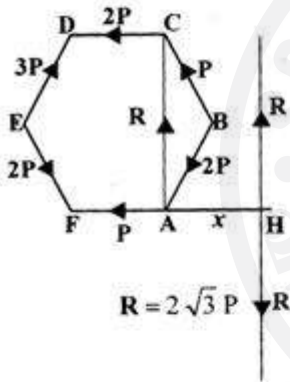
A பற்றித்திருப்பம் எடுக்க.

$$\curvearrowright G = P \cdot 2a \sin 60^\circ + 2P \cdot 4a \sin 60^\circ - 3P \cdot 4a \cos 30^\circ + 2P \cdot 2a \sin 60^\circ$$

$$= 2Pa \sin 60^\circ = Pa\sqrt{3} \cdot \text{Nm}$$

∴ தொகுதியானது பருமன்  $Pa\sqrt{3} \cdot \text{Nm}$  உள்ள ஓர் இணையுடன்

AC வழியே தாக்கும்  $2\sqrt{3}P$  எனும் ஓர் விளையுள் விசைக்கு சமவலுவானது.



நீட்டப்பட்ட FA இல் A இலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள புள்ளி H இல்

$2\sqrt{3}P$ ,  $2\sqrt{3}P$  பருமன் உள்ள விசைகளை சமமாகவும் எதிராகவும் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக புகுத்துக.

$$2\sqrt{3}P \cdot x = \sqrt{3}Pa$$

$$\therefore x = \frac{a}{2}$$

∴ H இல் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு தனி விசை  $2\sqrt{3}P$  விளையுள் விசை ஆகும்.

∴ H இல்  $2\sqrt{3}P$  விசையை CA இற்கு

சமாந்தரமான திசையில் புகுத்தினால் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

(b) கோல் AB யிற்கு B பற்றித் திருப்பம் எடுக்க  $AB = BC = 2a$

$$F_A 2a \sin 45^\circ + W a \cos 45^\circ = R \cdot 2a \sin 45^\circ$$

$$2F_A + W = 2R \text{ ---- (1)}$$

கோல் BC யிற்கு B பற்றித்திருப்பம் எடுக்க.

$$S \cdot 2a \sin 45^\circ = F_C \cdot 2a \cos 45^\circ + w \cdot a \sin 45^\circ$$

$$2S = 2F_C + w \text{ ---- (5)}$$

நிலைக்குத்தாக கூறாக்க.  $R + S = W + w \text{ --- (3)}$

கிடையாக கூறாக்க  $F_A = F_C \text{ ---- (4)}$

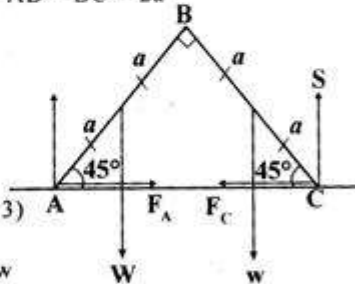
$$(1) + (2) 2F_A = 2F_C \Rightarrow 2R - W = 2S - w$$

$$2R - 2S = W - w \text{ ---- (5)}$$

$$(3), (5) 4R = 3W + w$$

$$(3) 4S = 4W + 4w - 3W - w = W + 3w$$

$$(1) \Rightarrow 4F_A = 4R - 2W = 3W + w - 2W = W + w$$



$$\frac{F_A}{R} = \frac{4F_A}{4R} = \frac{W+w}{3W+w}; \quad \frac{F_B}{S} = \frac{4F_B}{4S} = \frac{W+w}{W+3w}$$

சமநிலைக்கு  $F_A \leq \mu R$  உம்  $F_B \leq \mu S$

$$\frac{W+w}{3W+w} \leq \mu \quad \text{உம்} \quad \frac{W+w}{W+3w} \leq \mu$$

இதிலிருந்து  $\frac{W+w}{W+3w} \leq \mu$

$\mu = \frac{W+w}{W+3w}$  எனில்  $F_C = \mu R_C$  உம் ஆகும் போது உராய்வு C யில் எல்லைச் சமநிலை அடையும் ஆனால்  $F_A < \mu R_A$  உம் ஆவதால் உராய்வு A யில் எல்லைச் சமநிலை அல்ல. எனவே நழுவுவல் A யில் அன்றி C யில் நிகழப் பார்க்கும்.

6. (a) சமச்சீரின்படி C உள்ள மறுதாக்கம்

கிடையானது (X என்க)

கோல் BC யின் சமநிலை  $1Y = W$

B யில் மறுதாக்கத்தின் கூறு  $X \leftarrow$

கோல் BC யிற்கு B பற்றித்திருப்பம் எடுக்க.

$$W \cdot a \sin \beta = X \cdot 2a \cos \beta$$

$$X = \frac{1}{2} W \tan \beta \text{ ----- (1)}$$

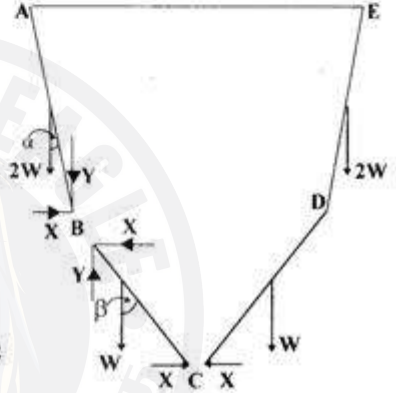
கோல் AB யிற்கு A பற்றித்திருப்பம் எடுக்க.

$$A \downarrow X \cdot 2a \cos \alpha = Y \cdot 2a \sin \alpha + 2W \cdot a \sin \alpha$$

$$X = 2W \tan \alpha \text{ ----- (2)}$$

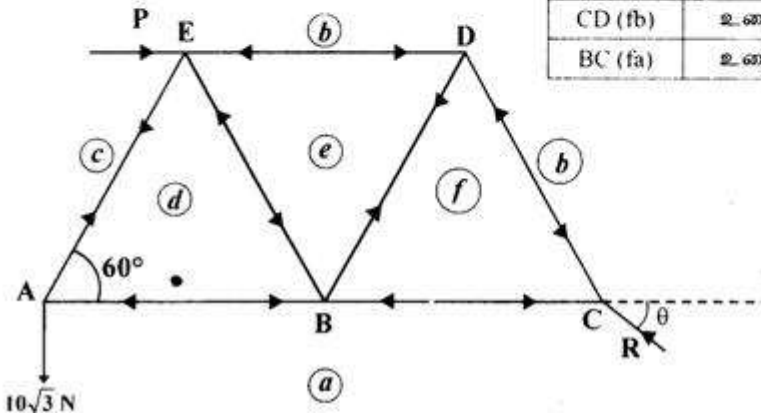
$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{2} W \tan \alpha = 2W \tan \alpha$$

$$\tan \beta = 4 \tan \alpha$$



| கோல்    | தகைப்பு | பருமன் |
|---------|---------|--------|
| AB (da) | உதைப்பு | 10 N   |
| AE (dc) | இழுவை   | 20 N   |
| ED (be) | உதைப்பு | 20 N   |
| BE (de) | உதைப்பு | 20 N   |
| BD (ef) | இழுவை   | 20 N   |
| CD (fb) | உதைப்பு | 20 N   |
| BC (fa) | உதைப்பு | 30 N   |

(b)



- (i) C பற்றி திருப்பம் எடுக்க

$$P \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot 2a$$

$$P = 40 \text{ N}$$

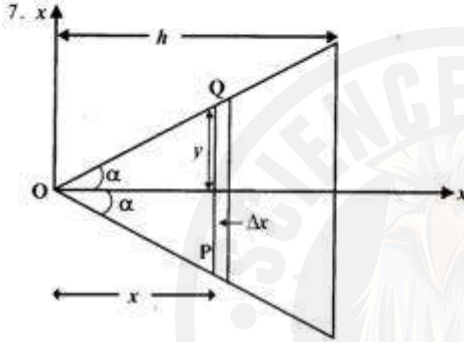
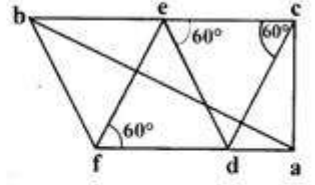
- (ii) C யில் உள்ள மறுதாக்கம் R கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம்  $\theta$  என்க.

$$\rightarrow R \cos \theta = P \quad \uparrow R \sin \theta = 10\sqrt{3}$$

$$R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = P^2 + (10\sqrt{3})^2$$

$$R^2 = (40)^2 + (10\sqrt{3})^2 = 10^2 (16 + 3) \Rightarrow R = 10\sqrt{19} \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{10\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$



சமச்சீரினால் புலியீர்ப்பு மையமானது  $ox$  வழியே இருக்கும். கூம்பின் அடர்த்தி  $\rho$  என்க, உச்சி O இலிருந்து புலியீர்ப்பு மையம் G இன் தூரம்  $\bar{x}$  என்க. வட்ட அடர் PQ இன் திணிவு  $= \pi y^2 (\Delta x) \rho$  O பற்றித்திருப்பம் எடுக்க

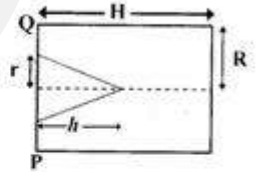
$$\frac{1}{3} \pi (h \tan \alpha)^2 h \rho \bar{x} = \int_0^h \pi (x \tan \alpha)^2 x \rho dx$$

$$\frac{1}{3} h^3 \bar{x} = \int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} + 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4} h$$

$\therefore$  கூம்பின் புலியீர்ப்பு மையமானது சமச்சீர் அச்ச வழியே அடியில் இருந்து  $\frac{1}{4} h$  தூரத்தில் காணப்படும்.

சமச்சீரின்படி கூம்பு பொன்னின் பு.மை சமச்சீர் அச்ச வழியே இருக்கும்

விட்டம் PQ இலிருந்து அச்சின் பு.மைத்திற்கான தூரம்  $\bar{x}$  என்க.



$$\left( \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \rho \bar{x} = \left( \pi R^2 H \right) \rho \cdot \frac{H}{2} - \frac{1}{3} \pi r^2 h \left( \frac{1}{4} h \right)$$

$$\bar{x} = \frac{6R^2 H^2 - r^2 h^2}{4(3R^2 H - r^2 h)}$$

$$\bar{x} = h \text{ உம் } R = 2r \text{ எனின் } \bar{x} = \frac{6(2r)^2 H^2 - r^2 h^2}{4(3(2r)^2 H - r^2 h)} = h, \quad h = \frac{24 H^2 - h^2}{4(12H - h)}$$

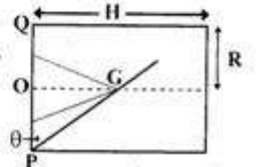
$$3h^2 - 48 Hh + 24 H^2 = 0 \Rightarrow h^2 - 16 Hh + 8 H^2 = 0$$

$$(h - 8H)^2 = 56 H^2 \quad (h - 8H)^2 = 56 H^2 \quad h = 8H \pm \sqrt{56 H^2} = 2(4 \pm \sqrt{14}) H$$

$$h = 2(4 + \sqrt{14}) H > H \quad \therefore \text{பொருத்தாது} \quad \therefore h = 2(4 - \sqrt{14}) H$$

$$\tan \theta = \frac{OG}{PO} = \frac{h}{R} = \frac{2(4 - \sqrt{14}) H}{2r} = \frac{2(4 - \sqrt{14}) 3r}{2r}$$

$$\theta = \tan^{-1} [3(4 - \sqrt{14})]$$



$$\begin{aligned}
 8. \quad A &= (A \cap B) \cup (A \cap B') \\
 P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \\
 &= P[(A \cap B)] + P[(A \cap B')] \quad \because (A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset \\
 \text{i.e } P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= B \cup (A \cap B') \\
 P(A \cup B) &= P[B \cup (A \cap B')] = P(B) + P(A \cap B') \quad \because A \cap (A \cap B') = \emptyset \\
 &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{முதற் பகுதியின் படி}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i) \quad P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) \\
 &= P(A) - P(A)P(B) \quad \because A, B \text{ என்பன சாரா நிகழ்தகவு} \\
 &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')
 \end{aligned}$$

சாரா நிகழ்வுகளின் வரைவிலக்கணப்படி,  $A, B'$  என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள்.

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad P(A' \cap B') &= P[(A \cup B)'] \quad \text{De Morgan's விதிப்படி} \\
 &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
 &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
 &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A')P(B')
 \end{aligned}$$

சாரா நிகழ்வுகளின் வரைவிலக்கணப்படி  $A', B'$  என்பன சாராதவை.

$C$  என்பது நிரந்தர துடுப்பாட்டக்காரன் காயம் காரணமாக தொடர் போட்டிகளில் இருந்து நிறுத்தப்படும் நிகழ்ச்சி என்க.  $D$  என்பது நிரந்தர பந்து வீச்சாளன் காயம் காரணமாக தொடர் போட்டிகளில் இருந்து நிறுத்தப்படும் நிகழ்ச்சி என்க.

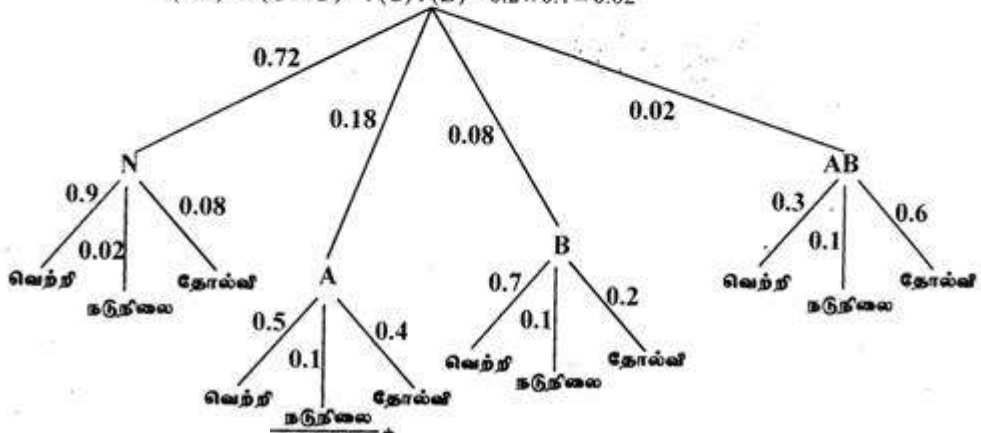
$$P(C) = 0.2, \quad P(D) = 0.1$$

$$P(N) = P(C' \cap D') = P(C')P(D') = (1 - P(C))(1 - P(D)) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$$

$$P(A) = P(C \cap D') = P(C)P(D') = 0.2 \times 0.9 = 0.18$$

$$P(B) = P(C' \cap D) = P(C')P(D) = 0.8 \times 0.1 = 0.08$$

$$P(AB) = P(C \cap D) = P(C)P(D) = 0.2 \times 0.1 = 0.02$$



மரவரிப்படத்தின் மூலம்

$$\begin{aligned} P(\text{வெற்றி}) &= 0.72 \times 0.9 + 0.18 \times 0.5 + 0.08 \times 0.7 + 0.02 \times 0.3 \\ &= 0.648 + 0.09 + 0.056 + 0.006 = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{வெற்றி}) &= P(N) P(\text{வெற்றி} | N) + P(A) P(\text{வெற்றி} | A) \\ &\quad + P(B) P(\text{வெற்றி} | B) + P(AB) P(\text{வெற்றி} | AB) \\ &= 0.72 \times 0.9 + 0.18 \times 0.5 + 0.08 \times 0.7 + 0.02 \times 0.3 \\ &= 0.648 + 0.09 + 0.056 + 0.006 = 0.8 \end{aligned}$$

மரவரிப்படத்திலிருந்து

$$\begin{aligned} P(\text{தோல்வி}) &= 0.72 \times 0.08 + 0.18 \times 0.4 + 0.08 \times 0.2 + 0.02 \times 0.6 \\ &= 0.0576 + 0.072 + 0.016 + 0.012 = 0.1576 \end{aligned}$$

$$P(\text{தோல்வி} \cap B) = 0.08 \times 0.2 = 0.016$$

$$P(B | \text{தோல்வி}) = \frac{P(\text{தோல்வி} \cap B)}{P(\text{தோல்வி})} = \frac{0.016}{0.1576} = 0.1$$

வேறுமுறை

$$\begin{aligned} P(\text{தோல்வி}) &= P(N) P(\text{தோல்வி} | N) + P(A) P(\text{தோல்வி} | A) + \\ &\quad + P(B) P(\text{தோல்வி} | B) + P(AB) P(\text{தோல்வி} | AB) \\ &= 0.72 \times 0.08 + 0.18 \times 0.4 + 0.08 \times 0.2 + 0.02 \times 0.6 \\ &= 0.0576 + 0.072 + 0.016 + 0.012 = 0.1576 \end{aligned}$$

$$P(\text{தோல்வி} \cap B) = P(B) P(\text{தோல்வி} | B) = 0.08 \times 0.2 = 0.016$$

$$P(B | \text{தோல்வி}) = \frac{P(\text{தோல்வி} \cap B)}{P(\text{தோல்வி})} = \frac{0.016}{0.1576} = 0.1$$

$$9. (a) \text{ இடை} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{மாற்ற திறன்} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

(i) இடை =  $\bar{x} = 58$  மீ சரியாக பதியப்பட்ட எனக் கொள்ளப்பட்டபோது.

$$\bar{x} = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} x_i + 53 + 65 \right] = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} x_i + 118 \right]$$

$$\text{திருத்தத்தின் பின் இடை} \bar{y} = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} x_i + 63 + 55 \right] = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} x_i + 118 \right]$$

எனவே வழி காரணமாக  $\Rightarrow$  இடை பாதிக்கப்படவில்லை.

$$(ii) \text{ மாற்றிறன் } = 3.2 = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} (x_i - 58)^2 + (53 - 58)^2 + (65 - 58)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} (x_i - 38)^2 + 25 + 49 \right] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{திருத்தத்தின் பின் மாற்றிறன் } s^2 = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} (x_i - 38)^2 + (63 - 58)^2 + (55 - 58)^2 \right]$$

$$= s^2 = \frac{1}{40} \left[ \sum_{i=1}^{38} (x_i - 38)^2 + 25 + 9 \right] \text{ ----- (2)}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow s^2 - 3.2 = \frac{34}{40} - \frac{74}{40} = \frac{-40}{40} = -1$$

$$s^2 = 3.2 - 1 = 2.2$$

$\therefore$  திருத்தம் காரணமாக மாற்றிறன் குறைந்துள்ளது.

| வகுப்பாயிடை<br>திணிவு kg | மீறன்<br>$f$ | நடுப்<br>புள்ளி<br>( $x$ ) | $fx$  | $d = \frac{x - 45}{10}$ | $df$ | $fd^2$ |
|--------------------------|--------------|----------------------------|-------|-------------------------|------|--------|
| 0 - 10                   | 10           | 5                          | 50    | -4                      | -40  | 160    |
| 10 - 20                  | 27           | 15                         | 405   | -3                      | -81  | 243    |
| 20 - 30                  | 33           | 25                         | 825   | -2                      | -66  | 132    |
| 30 - 40                  | 35           | 35                         | 1,225 | -1                      | -35  | 35     |
| 40 - 50                  | 38           | 45                         | 1,710 | 0                       | 0    | 0      |
| 50 - 60                  | 30           | 55                         | 1,650 | 1                       | 30   | 30     |
| 60 - 70                  | 19           | 65                         | 1,235 | 2                       | 32   | 76     |
| 70 - 80                  | 8            | 75                         | 600   | 3                       | 24   | 72     |
| கூட்டுத்தொகை             | 200          |                            | 7,700 |                         | -130 | 748    |

$$(b) (i) \text{ இடை } = \frac{7,700}{200} = 38.5$$

$$\text{வேறுவழி இடை } = 45 + \left( -\frac{130}{200} \right) \times 10 = 38.5$$

இடையம்

இடையம் உள்ள வகுப்பு 30 - 40

தரப்பட்ட பரம்பலின் இடையம் = m என்க

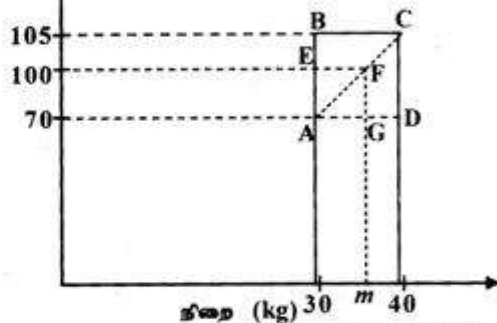
$$\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC}$$

$$\frac{m-30}{40-30} = \frac{100-70}{105-70}$$

$$\frac{m-30}{10} = \frac{30}{35}$$

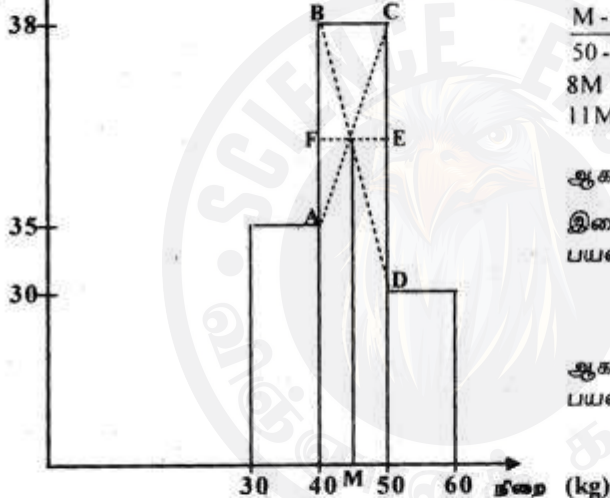
$$m = 30 + 8.57 = 38.57$$

மீட்டர்



நிறை (kg) 30 m 40

மீட்டர்



ஆகார வகுப்பு (40 - 50)

$$\frac{M-40}{50-M} = \frac{38-35}{38-30} = \frac{3}{8}$$

$$8M - 320 = 180 - 3M$$

$$11M = 150 + 320 = 470$$

$$\text{ஆகாரம்} = M = \frac{470}{11} = 42.73$$

இடையைப் பயன்படுத்தும்போது பயனிகளின் உச்ச எண்ணிக்கை

$$= \frac{1500}{38.5} = 38.96 \approx 39$$

ஆகாரத்தைப் பயன்படுத்தும் போது பயனிகளின் உச்ச எண்ணிக்கை

$$= \frac{1500}{42.73} = 35.1 \approx 35$$

∴ பாதுகாப்புக்காக ஒரு தடவையில் கொண்டு செல்லத்தக்க பயனிகளின் உச்ச எண்ணிக்கை 35 ஆகும்.

$$\bar{d} = \frac{-130}{200} = -0.65$$

$$S_d^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum d} - (\bar{d})^2 = \frac{748}{200} - (-0.65)^2$$

$$= 3.74 - 0.4225 = 3.3175 \Rightarrow S_d = 1.82$$

$$S_y = 10 \times 1.82 = 18.2$$

$$\begin{aligned} \text{ஒராயம் குணகம்} &= \frac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியம விலகல்}} \\ &= \frac{3(38.5 - 38.57)}{18.2} = -0.115 \end{aligned}$$

எனவே பரம்பல் மறை ஒராய வடிவமானது.

