அந்தரங்கமானது

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2016

10 – இணைந்த கணிதம் I

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்துக்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளும் கருத்துக்களுக்கிணங்க, இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாறலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன.

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை – 2016

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளி பிரிந்து செல்லும் விதம்

பத்திரம் I

பகுதி A	10 x 25	=	250
பகுதி B	05 x 150	=	750
மொத்தம்		=	**1000/10**

பத்திரம் I இற்கான இறுதிப் புள்ளி = 100

பகுதி A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ என நிறுவுக.

$n=1$ ஆக, $\text{L.H.S.} = \sum_{r=1}^{1} r(r+1) = 2$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{3}(1+1)(1+2) = 2. \quad 5$$

எனவே, $n=1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$n=p$ க்கு முடிவு உண்மை என்க. இங்கு $p \in \mathbb{Z}^+$

அதாவது $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ 5

எனவே, $\sum_{r=1}^{p+1} r(r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(r+1) + (p+1)[(p+1)+1]$ 5

$$= \frac{p}{3}(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2)$$

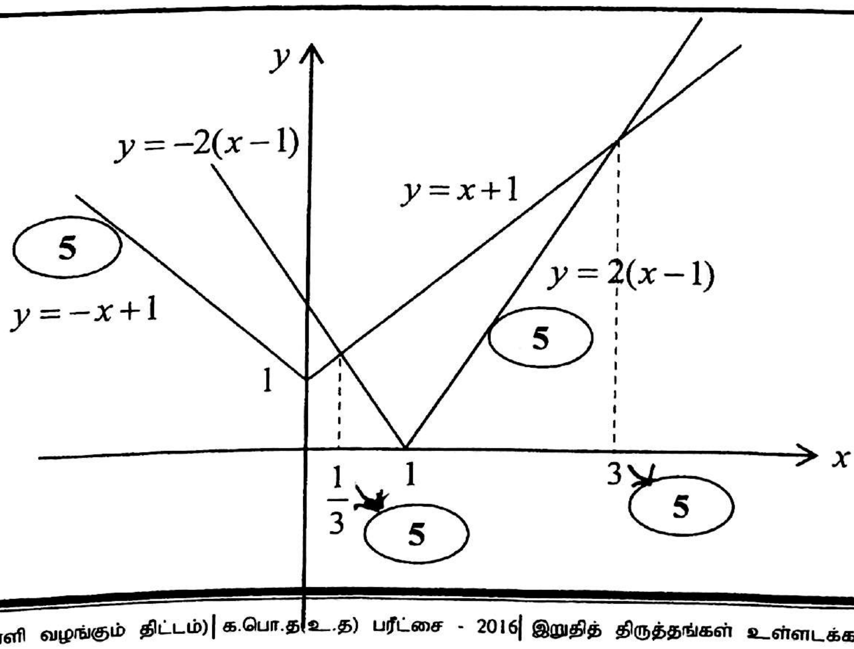
$$= \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3). \quad 5$$

$\therefore n = p+1$ இற்கு முடிவு உண்மை

இதிலிருந்து $n=p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின், $n=p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும் ஆனால் $n=1$ இற்கு முடிவு உண்மை என நிறுவப்பட்டது. $\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும். 5

25

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = |x| + 1$, $y = 2|x-1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,** சமனிலி $|x| + 1 > 2|x-1|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



வரிப்படத்திலிருந்து, $|x|+1>2|x-1| \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$. 5

25

OR $\{x : x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{3} < x < 3\}$

Aliter 1

வகை (i) $\boxed{x \geq 1}$ $x+1>2(x-1) \Leftrightarrow x<3$. 5

எனவே இவ்வகையில், $1 \leq x < 3$ என்பது x இற்கான தீர்வுகளாகும்.

வகை (ii) $\boxed{0<x<1}$ $x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$. 5

எனவே இவ்வகையில், $\frac{1}{3}<x<1$ என்பது x இற்கான தீர்வுகளாகும்.

வகை (iii) $\boxed{x \leq 0}$ $-x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>1$

இது முரண்பாடானது எனவே இவ்வகையில் தீர்வுகள் இல்லை.

எனவே $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3}<x<3\right\}$ என்பது தீர்வுத் தொடையாகும் 5

15

Aliter 2

$|x|+1>2|x-1|$

$\Leftrightarrow x^2+2|x|+1>4(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2(|x|+4x)+3<0$

Case I $\boxed{x>0}$

$3x^2-10x+3<0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3)<0$ 5

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$ 5

Case II $\boxed{x<0}$

$3x^2-6x+3<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2<0$

இது சாத்தியமில்லை. 5

15

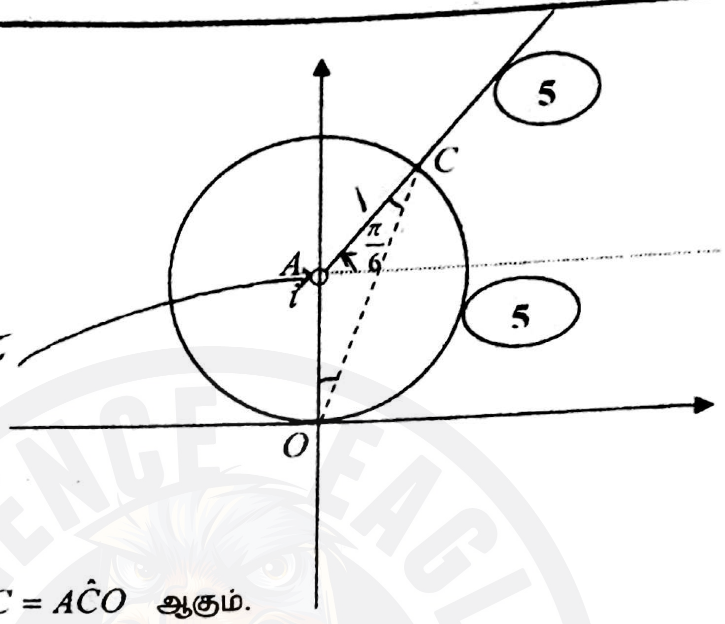
3. ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில

(i) $|z - i| = 1$, (ii) $\text{Arg}(z - i) = \frac{\pi}{6}$

ஆகியவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்குகளைப் பருமட்டாக வரைந்து. இவ்வொழுக்குகளின் வெட்டுப் புள்ளியினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணை வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இற் காண்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

மையம்
ஆரை
வட்டம் $\Big\}$ — 05

Important



$O\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்

$OA = AC$ என்பதால் $A\hat{O}C = A\hat{C}O$ ஆகும்.

எனவே $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

ஆகவே OC ஆனது நேர் x- அச்சுடன் அமைக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. 5

மேலும் $OC = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$. 5

எனவே தேவையான சிக்கல் எண்: $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. 5

25

Aliter

$y_C = 1 + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$ 5

$x_C = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore z_C = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ 5

5

ஆகவே $r = \sqrt{3}$ உம் $\theta = \frac{\pi}{6}$ உம் ஆகும்.

$Z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \sqrt{3}\left(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3\right)$

$\therefore r = \sqrt{3}, \quad \theta = \pi/3$

15

4. ஒவ்வோர் இலக்கமும் ஒரு தடவை மாத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டால், 1,2,3,4,5 என்னும் இலக்கங்களிலிருந்து ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்ட எத்தனை வெவ்வேறு எண்களை ஆக்கலாம் ?
இவ்வெண்களில் (i) எத்தனை இரட்டை எண்கள் உள்ளன ?
(ii) எத்தனையில் 3, 4 ஆகிய இலக்கங்கள் அடுத்தடுத்து உள்ளன ?

4. 5 4 3 2 1

தேவையான விடை $=5!$ 5

$=120.$ 5

120 மட்டும் இருந்தால் — 10

(i) இறுதி இலக்கம் 2 அல்லது 4 ஆக இருக்க வேண்டும்.

தேவையான விடை $=2\times 4!=48$ 5

5

48 மட்டும் இருந்தால் — 10

(ii) $\boxed{3\ 4}$ ஒன்றாகவும் அதே ஒழுங்கிலும் இருக்கும் போது

தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை $=4!$

(i) $\boxed{4\ 3}$ ஒன்றாகவும் அதே ஒழுங்கிலும் இருக்கும் போது

மீண்டும் தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை $4!$

தேவையான விடை $=2\times 4!=48$

5

25

5. $\alpha>0$ எனக் கொள்வோம். $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}=16$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

Conjugate — 05

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha x}{(1+\cos(\alpha x))}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

5 5

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{2x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\right)^2 \times \frac{\alpha^2}{2} \times \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

5

$$= 1^2 \cdot \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{4}{2} \quad = \alpha^2 \quad 5$$

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \; (\because \alpha > 0) \quad 5$$

25

Aliter

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

5

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}} \times \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{x^2} \cdot \left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\frac{\alpha x}{2}}\right)^2 \times \frac{\alpha^2}{4} \times \left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

5

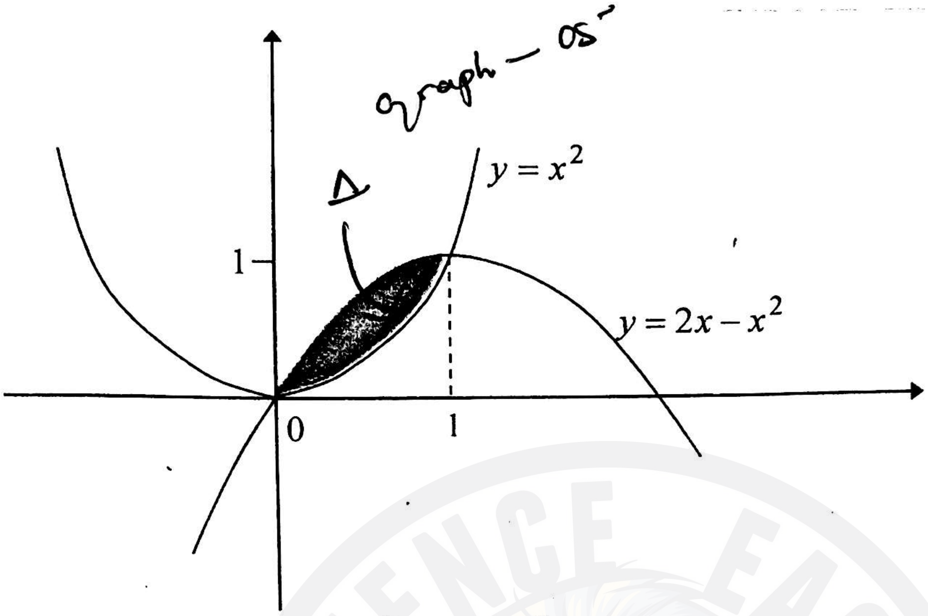
$$= 1^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \cdot 4 = \alpha^2 \quad 5$$

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \quad (\because \alpha > 0)$$

5

25

6. $y=x^2, y=2x-x^2$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{3}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.



இடைவெட்டும் புள்ளிகளில் : $x^2=2x-x^2$

$x(x-1)=0$

$x=0$ or $x=1$.

தேவையான பரப்பு $=\int_0^1\left[(2x-x^2)-x^2\right]dx$ 15

10

$=2\int_0^1(x-x^2)dx$

$=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$ 5

$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ 5

$=\frac{1}{3}$ சதுர அலகுகள்

25

7. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ இற்கு $x=3\sin^2\frac{\theta}{2}$, $y=\sin^3\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C தரப்பட்டுள்ளது. $\frac{dy}{dx}=\sin 2\theta$ எனக் காட்டுக.

C மீது உள்ள ஒரு புள்ளி P இல் இருக்கும் தொடலியின் படித்திறன் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ எனின், P ஐ ஒத்த பரமானம் θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\frac{dx}{d\theta}=6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

5

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{3\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta \quad 5$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 5$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}. \quad 5$$

only $\theta = \pi/6$

25

---

8. உற்பத்தியினூடாகவும் $2x + 3y - k = 0$, $x - y + 1 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகவும் செல்லும் நேர்கோடு l எனக் கொள்வோம்; இங்கு $k\ (\neq 0)$ ஒரு மாறிலி. l இன் சமன்பாட்டை k இன் சார்பிற் காண்க.
$(1, 1)$, $(3, 4)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளும் l இன் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளனவெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $k < 18$ எனக் காட்டுக.

$l:\ 2x + 3y - k + \lambda(x - y + 1) = 0 \quad 5$

உற்பத்தியினூடு l செல்வதால் $-k + \lambda = 0$

$\therefore \lambda = k \quad 5$

$\therefore l$ இன் சமன்பாடு $(2+k)x + (3-k)y = 0 \quad 5$

$(1,1)$ உம் $(3,4)$ உம் ஒரே பக்கத்தில் இருப்பதால்

$\Rightarrow [(2+k)+(3-k)][3(2+k)+4(3-k)] > 0 \quad 5$

$\Rightarrow \quad 5(18-k) > 0$

$\Rightarrow \quad k < 18. \quad 5$

25

Aliter

$l:\ x-y+1+\lambda(2x+3y-k)=0$ இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$. 5

உற்பத்தியினூடு l செல்வதால்,

$1-\lambda k=0$

$\Rightarrow\ \lambda k=1$

$\Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{k}.\ (\because k\neq 0)$ 5

$\therefore\ l$ இன் சமன்பாடு $\left(1+\frac{2}{k}\right)x+\left(\frac{3}{k}-1\right)y=0$ 5

$(1,1)$ உம் $(3,4)$ உம் ஒரே பக்கத்தில் இருப்பதால்

$\Rightarrow \left[1+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}-1\right]\left[3+\frac{6}{k}+\frac{12}{k}-4\right]>0$ 5

$\Rightarrow\ \frac{5(18-k)}{k^2}>0 \quad \Rightarrow \quad k<18.\ (\because k\neq 0)$ 5

25

---

9. $A\equiv(1,2)$, $B\equiv(-5,4)$ எனவும் S என்பது AB ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் எனவும் கொள்வோம்.
(i) வட்டம் S இனதும்
(ii) வட்டம் S ஐ நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டுகின்ற, மையம் $(1,1)$ ஐ உடைய வட்டத்தினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

கட்டாயம் இல்லை

(i) $\frac{(y-2)(y-4)}{(x-1)(x+5)}=-1$ for $x\neq 1,-5$ இற்கு 5

$S:(x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ 5

10 இதுமட்டும் இன்றேல்

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

(ii) தேவையான வட்டம் S' எனின்

$x^2+y^2-2x-2y+c'=0.$ 5

S, S' என்பன நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுவதால் $\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c'$,
இங்கு $g=2,\ f=-3,\ g'=-1,\ f'=-1,\ \ c=3,\ \ c'=c'$.

$\Rightarrow 2(2)(-1)+2(-3)(-1)=3+c'$ 5

$\Rightarrow \qquad c'=-1$ 5

25

$\therefore S': x^2+y^2-2x-2y-1=0$

Aliter

(i) $S:(x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ 10

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

(ii) தேவையான வட்டம் S' எனின்

$S':(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ 5

$x^2+y^2-2x-2y+2-r^2=0.$

S , S' என்பன நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுவதால்

$\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c',$

இங்கு $g=2, f=-3, g'=-1, f'=-1, c=3$ and $c'=2-r^2$.

$2(2)(-1)+2(-3)(-1)=3+(2-r^2)$ 5

$\Rightarrow \quad r^2=3$ 5

$\therefore S':x^2+y^2-2x-2y-1=0$

25

10. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ இற்குச் சமன்பாடு $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ ஐத் தீர்க்க.

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$

5 5

$2\cos 2x\cos x+\cos 2x=2\sin 2x\cos x+\sin 2x$

$\cos 2x(2\cos x+1)=\sin 2x(2\cos x+1)$ 5

$\cos 2x=\sin 2x \; (\because 0\le x\le \frac{\pi}{2}\Rightarrow 2\cos x+1\neq 0)$ Important

5

$\tan 2x=1 \; (\because \cos 2x=0\Rightarrow \sin 2x\neq 0)$

$2x=\frac{\pi}{4} \; \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$x=\frac{\pi}{8}.$ 5

25

பகுதி B

11. (a) $a \neq 0$ ஆகவும் $a+b+c \neq 0$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனவும் $f(x) = ax^2 + bx + c$ எனவும் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $f(x) = 0$ இல் 1 ஒரு **மூலமன்று** எனக் காட்டுக.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம்.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{a}(a+b+c)$ எனவும் $\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\beta - 1}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $g(x) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் காட்டுக; இங்கு $g(x) = (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$.

இப்போது $a > 0$ எனவும் $a+b+c > 0$ எனவும் கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் m_1 ஆனது $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $\Delta = b^2 - 4ac$ ஆகும்.

$g(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் m_2 எனக் கொள்வோம். $(a+b+c)m_2 = a\,m_1$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $g(x) \geq 0$ ஆக இருந்தால்-இருந்தால் மாத்திரம் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) \geq 0$ எனக் காட்டுக.

(b) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ எனவும் $q(x) = x^2 + 3x + 6$ எனவும் கொள்வோம். மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $p(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியையும் $q(x)$ ஆனது $(x-2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியையும் காண்க.

$p(x) = (x-1)\,q(x) + 5$ என வாய்ப்புப் பார்த்து, $p(x)$ ஆனது $(x-1)(x-2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியைக் காண்க.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

(a) $f(1) = a + b + c \neq 0.$ 5

$\therefore$ 1ஆனது $f(x) = 0$ இன் மூலமன்று. 5

10

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ and $\alpha\beta = \frac{c}{a}.$ 5

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$ 5

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1 \\ &= \frac{a+b+c}{a} \end{aligned}\right\} \longrightarrow 5$$

15

Let $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - 1}$ and $\beta_1 = \frac{1}{\beta - 1}.$

α_1, β_1 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $(x - \alpha_1)(x - \beta_1) = 0.$

i.e. $x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_1\beta_1 = 0.$ ---------------------(1)

எனவே $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\beta - 1} = \frac{\alpha + \beta - 2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$ 5

$$=\frac{-\frac{b}{a}-2}{(a+b+c)/a}=-\frac{(2a+b)}{a+b+c}.$$ 5

மேலும் $\alpha_1\beta_1=\frac{a}{a+b+c}.$ 5

(1)இன் படி தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு $x^2+\frac{(2a+b)}{(a+b+c)}x+\frac{a}{a+b+c}=0$ 10

$\Leftrightarrow (a+b+c)x^2+(2a+b)x+a=0$

$\Leftrightarrow g(x)=0$, where $g(x)=(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a.$ 5

Important கிட்டவரைத்து

30

$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$ 5

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0\ (\because a>0)}-\frac{\Delta}{4a}$$ 5

நிறைவர்க்கத்திற்கு 10

$\geq\frac{-\Delta}{4a}$; (சமம் $x=-\frac{b}{2a}$.ஆகும் பொழுது) 5

கிட்டாய

5

$\therefore f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $-\frac{\Delta}{4a}.$ 5

அதாவது $m_1=-\frac{\Delta}{4a}.$

25

எனவே $m_2=-\frac{\Delta'}{4(a+b+c)},$ 5

இங்கு $\Delta'=(2a+b)^2-4(a+b+c)\cdot a$ 5

$=4a^2+4ab+b^2-4a^2-4ab-4ac$

$=b^2-4ac$

$=\Delta.$ 5

மேலும் $m_2 = \dfrac{-\Delta'}{4(a+b+c)}$

$= \dfrac{4a\, m_1}{4(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)m_2 = m_1 a$ 5

20

$f(x) \geq 0$ எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும்

$\Leftrightarrow m_1 \geq 0$ 5

$\Leftrightarrow m_2 \geq 0 \qquad \because m_2 = \dfrac{a\, m_1}{(a+b+c)}$ 5

$\Leftrightarrow g(x) \geq 0$ எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் 5

$\Longleftrightarrow$ இல்லாவிட்டால்
less — 05

15

(b) $p(x)$ ஆனது $(x-1)$ ஆல் வகுக்கப்படும் பொழுது மீதி $p(1) = 5$ 5

கட்டாயம் 5, 16

$q(x)$ ஆனது $(x-2)$ ஆல் வகுக்கப்படும் பொழுது மீதி $q(2) = 16$ 5

10

$(x-1)q(x) + 5 = (x-1)(x^2+3x+6) + 5$ 5

$= x^3 + 3x^2 + 6x - x^2 - 3x - 6 + 5$

$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ 5

$= p(x)$.

10

$q(x) = (x-2)(x-5) + 16$ ஆகும் 5

$\therefore \; p(x) = (x-1)\{(x-2)(x+5)+16\} + 5$

$= (x-1)(x-2)(x+5) + 16x - 11.$ 5

எனவே தேவையான மீதி $16x - 11$. 5

15

வேறுமுறைகளுக்கும் புள்ளி வழங்குக.

12. (a) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $(1+x)^n$ இற்கு ஈருறுப்பு விரியைக் கூறுக. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ இற்கு $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{n-r}{r+1}$ எனக் காட்டுக.

$(1+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் x^r, x^{r+1}, x^{r+2} ஆகியவற்றின் குணகங்கள் அதே வரிசையில் எடுக்கப்படும்போது $1:2:3$ விகிதங்களில் உள்ளனவாகும். இச்சந்தர்ப்பத்தில் $n = 14$ எனவும் $r = 4$ எனவும் காட்டுக.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$ எனவும் $f(r) = r(Ar+B)$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு A, B ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = -3 - \dfrac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதென மேலும் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

கட்டாயம் இருக்க வேண்டும்

(a) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, இங்கு ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ for $r = 0, 1, 2, \ldots, n$

5 5 $\boxed{10}$

OR $(1+x)^n = {}^nC_0 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots + {}^nC_n x^n$

கட்டாயம்

$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, இற்கு

$$\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}$$ 10

$$= \frac{\dfrac{1}{r+1}}{\dfrac{1}{n-r}} = \frac{n-r}{r+1}. \text{ ------------ (1)}$$ 5 $\boxed{15}$

இதே போல் $r = 0, 1, 2, \ldots, n-2$, இற்கு

$$(1) \Rightarrow \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}.$$ 5

${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1:2:3$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது 5

$$\Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = 2 \quad , \quad \frac{n-r-1}{r+2} = \frac{3}{2}$$

5 5

$\Rightarrow n-r=2(r+1)$ --------- (2) , $2(n-r-1)=3(r+2)$

$\Rightarrow 4(r+1)-2=3r+6$

$\Rightarrow r=4$, அத்துடன் (2) இன் படி $n=14$.

5 5 30

(b) $\dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}=\dfrac{r(Ar+B)}{(2r-3)(2r-1)}-\dfrac{(r+1)(Ar+A+B)}{(2r-1)(2r+1)}$ 10

$\Leftrightarrow 10r+9=r(Ar+B)(2r+1)-(r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$ 5

$=r\left[2Ar^2+(A+2B)r+B\right]-(r+1)\left[2Ar^2+(2A+2B-3A)r-3(A+B)\right]$

$=2Ar^3+(A+2B)r^2+Br-2Ar^3-(2B-A)r^2+3(A+B)r-2Ar^2-(2B-A)r+3(A+B$

$(4A+2B)r$

$=-(2A+4B)r+3(A+B)$, $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு 5

$\Leftrightarrow r^1:4A+2B=10$, $r^0:3A+3B=9$ 10

வேறுமுறையால் செய்து இல்லை

$\Leftrightarrow A=2$, $B=1$.

less — 10

5 5 40

ஆனால் $U_r=g(r)-g(r+1)$, இங்கு $g(r)=\dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$ அத்துடன் $f(r)=r(2r+1)$.

$r=1;\quad U_1=g(1)-g(2)$

$r=2;\quad U_2=g(2)-g(3)$ 10

$\vdots$

$U_{n-1}=g(n-1)-g(n)$

$U_n=g(n)-g(n+1)$

$\sum_{r=1}^{n}u_r=g(1)-g(n+1)$ 10

$=\dfrac{(1).(3)}{(-1)(1)}-\dfrac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$

$=-3-\dfrac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ 10 30

05 05

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left\{-3-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}\right\}$$ **5**

இல்லாவிட்டாலும் வழங்குக 5

5

$$= -3-\frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$ **5**

எனவே $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் அதன் கூட்டுத்தொகை $-\frac{7}{2}$ ஆகும். **5**

5

25

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ ஆகவும் $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{Y}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக λ, μ ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளைக் காண்க.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{AP}$ ஆகியவற்றைக் கண்டு, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ எனக் காட்டுக;

இங்கு $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(*b*) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளி A ஆனது சிக்கலெண் $2+i$ ஐ வகைகுறிக்கின்றது. புள்ளி B ஆனது $OB = 2(OA)$ ஆகவும் $A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது; இங்கு O ஆனது உற்பத்தி ஆகும். $A\hat{O}B$ ஆனது OA இலிருந்து இடஞ்சுழியாக அளக்கப்படுகின்றது. புள்ளி B இனால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

மேலும் $OACB$ ஓர் இணைகரமாக இருக்கத்தக்கதாகப் புள்ளி C இனால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணையும் காண்க.

(*c*) $z \in \mathbb{C}$ எனவும் $w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$ எனவும் கொள்வோம். $\operatorname{Im} w = -1$ எனவும் $|w-1+i| = 5$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $z = \pm(2+i)$ எனக் காட்டுக.

$$(a)\ \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ **5**

$$\lambda\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$ **5**

எனவே $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2.$$ **5**

$$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

எனவே $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5

$\Leftrightarrow \mu = -1.$ 5 | 25

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-a-2c=1$

$-b-2d=0$

$a+c=0$

$b+d=1$

$\Rightarrow c=-1, a=1$

$\Rightarrow d=-1, b=2$

$P^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} P}{|P|}$ using only → 05 marks

less → 10

$$\therefore \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$ 15

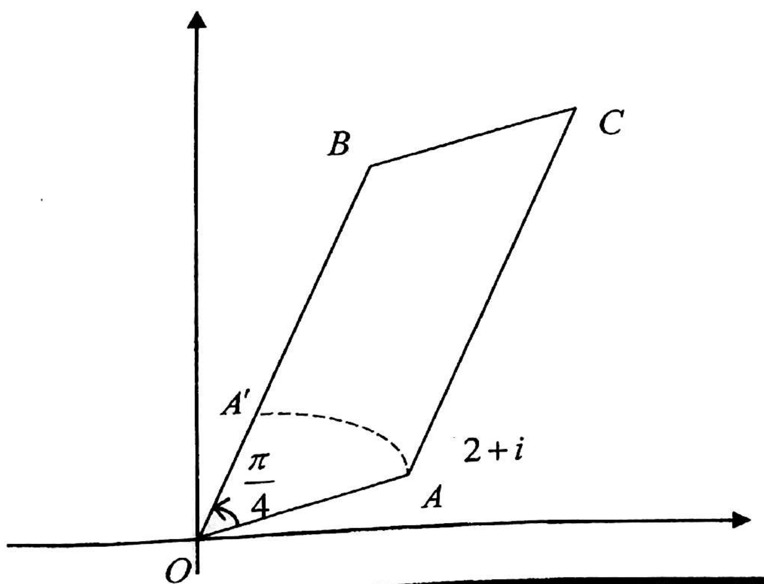
$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ 5

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$ 5

25

---

b)



OA ஐ இடம்சுழிப்போக்கில் O பற்றி $\dfrac{\pi}{4}$ கோணத்தினூடாக சுழற்றும் போது புள்ளி A' இனால் குறிப்பிடப்படும் பெறப்படும் சிக்கலெண் $z_1 = (2+i)\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ 10

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)(1+i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i).$$ 5

$OA = OA' \Rightarrow OB = 2OA'$.

B புள்ளி இனால் குறிக்கப்படும் சிக்கலெண் z_2

$z_2 = 2z_1$ ஆல் கொடுக்கப்படும்

$$z_2 = \sqrt{2}(1+3i).$$ 10 $\boxed{25}$

புள்ளி C இனால் குறிக்கப்படும் சிக்கலெண் 10

$$= (2+i) + z_2$$

$$= 2 + i + \sqrt{2}(1+3i)$$

$$= \left(2+\sqrt{2}\right) + \left(1+3\sqrt{2}\right)i.$$ 5 $\boxed{15}$

(c) $w = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{5z}{2+i}$

$$= \frac{2(1-i)}{2} + \frac{5z(2-i)}{5}$$ 5

5 10

$$= 1 - i + z(2-i).$$

வேறுமுறையில் செய்தாலும் புள்ளி வழங்கவும்.

$\operatorname{Im} w = -1 \Rightarrow -1 = -1 + \operatorname{Im} z(2-i)$ 15

$\Rightarrow \operatorname{Im} z(2-i) = 0$

$\Rightarrow z(2-i) = \bar{z}(2+i)$ ------(1)

$|w - 1 + i| = 5 \quad \Rightarrow |z(2-i)| = 5$

வேறுமுறையில் செய்தாலும் புள்ளி வழங்கவும்

$\Rightarrow |z||2-i| = 5$

$$\Rightarrow |z|\sqrt{5} = 5$$ **15**

$$|z| = \sqrt{5} \text{ ------------ } (2)$$

$$(1)\times z \ \Rightarrow \ z^2(2-i) = z\bar{z}(2+i)$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad z\bar{z} = 5$$

$$\therefore z^2(2-i) = (2+i)5$$ **10**

$$z^2 = \frac{2+i}{2-i}.5 = \frac{5}{5}(2+i)^2$$

$$\therefore z = \pm(2+i).$$ ← 10 OR 0 **10**

60

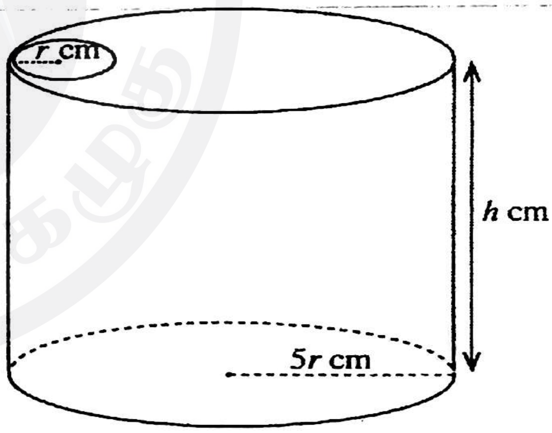
---

14. (*a*) $x \neq \pm 1$ இற்கு $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$y = f(x)$ இன் அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.
கிடை அணுகுகோடானது வளையி $y = f(x)$ ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(*b*) ஆரை $5r$ cm ஐயும் உயரம் h cm ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளை வடிவத்தில் உள்ள ஒரு மெல்லிய உலோகக் கொள்கலத்திற்கு, ஆரை r cm ஐ உடைய ஒரு வட்டத் துளை உள்ள ஆரை $5r$ cm ஐ உடைய ஒரு வட்ட மூடி உள்ளது (உருவைப் பார்க்க). கொள்கலத்தின் கனவளவு $245\,\pi$ cm^3 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. துளை உள்ள மூடியைக் கொண்ட கொள்கலத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $r > 0$ இற்கு $S = 49\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



S ஆனது இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*a*) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ for $x \neq \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)2.(x-3) - (x-3)^2.2x}{(x^2-1)^2}$$ **15**

$$= \frac{2(x-3)\left[x^2-1-x(x-3)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}.$$ **5**

20

கிடை அணுகுகோடு: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ இதிலிருந்து $y = 1$ ஆகும் 5

மேலும்

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty.$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty.$

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு: $x = \pm 1$ 5

10

தீர்க்க: $y = f(x)$ இல் $y = 1$ ஆகும் போது

i.e $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-1} = 1$ 5

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 1$

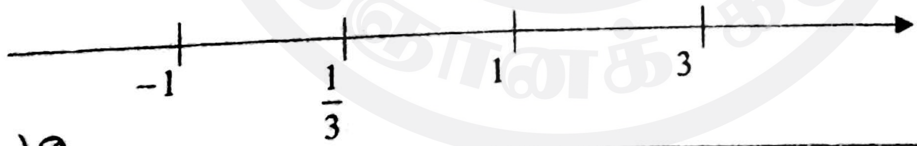
$\Leftrightarrow 6x = 10$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}.$ 5

எனவே தேவையான புள்ளி $= \left(\dfrac{5}{3}, 1\right).$ 5

15

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ or $x = \dfrac{1}{3}.$



	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ குறி	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)

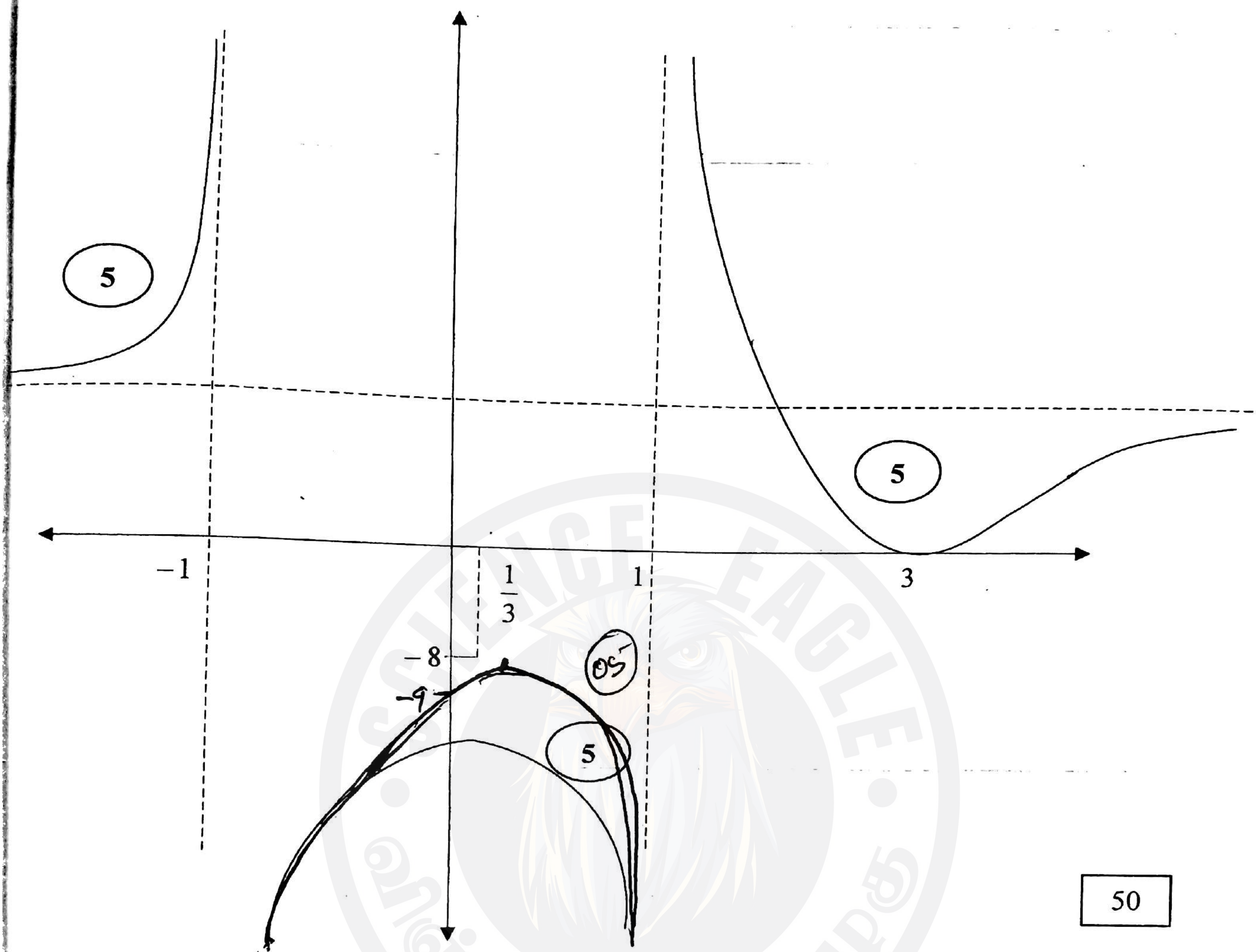
25

இரண்டு திரும்பல் புள்ளிகளாவன: $\left(\dfrac{1}{3}, -8\right)$ – உயர்வுப் புள்ளி. 5

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{3} - 3\right)^2}{\dfrac{1}{9} - 1} = \dfrac{64}{-8} = -8$

$(3, 0)$ – இழிவுப் புள்ளி. 5

2nd Derivative பாவித்தால் 10 15 less



50

10

(b) $S = 2\pi(5r)h + \pi(5r)^2 \times 2 - \pi r^2$

$= 10\pi rh + 49\pi r^2$ ——————————(1)

$245\pi = \pi(5r)^2 \times h$ 5

$\therefore h = \dfrac{245}{25r^2} = \dfrac{49}{5r^2}$

(1) $\Rightarrow S = 10\pi r \times \dfrac{49}{5r^2} + 49\pi r^2$

$= 49\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right);\ r > 0.$ 5

20

$\dfrac{dS}{dr} = 49\pi\left(2r - \dfrac{2}{r^2}\right)$ 10 oR 0

5 $\dfrac{dS}{dr}=0 \Leftrightarrow 2r=\dfrac{2}{r^2} \Leftrightarrow r=1.\quad (\because r>0)$ 5

2nd Derivative பாவித்தால் less – 05

5 $\dfrac{dS}{dr}<0;\ \ 0<r<1$ இற்கு, $\dfrac{dS}{dr}>0\ ;\ r>1$ இற்கு 5

$\therefore S$ இழிவாகும். இங்கு $r=1$ ஆகம்.. 5

35

15.(a) (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ ஐக் காண்க.

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ ஐக் கண்டு, **இதிலிருந்து,** $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ ஐக் காண்க.

மேற்குறித்த தொகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி, $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைத்து, **இதிலிருந்து,** $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(c) (i) $n\neq -1$ எனக் கொள்வோம். பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int x^n(\ln x)\,dx$ ஐக் காண்க.

(ii) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$ 10 OR 0

$$=\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C_1,$$ 10 இங்கு C_1 எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

20

(ii) $$\frac{d\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)}{dx}=\frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-1/2}\times(2-2x)$$

$$=\frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$ 10 OR 0

இதிலிருந்து

$\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=-\sqrt{3+2x-x^2}+C_2$, இங்கு$C_2$ எதேச்சையான மாறிலியாகும். 10

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=\int\frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$ 10

$=-\sqrt{3+2x-x^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C_3$, இங்கு C_3 எதேச்சையான மாறிலியாகும். 10

05 05

40

(b) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ 10

ஏனைய 2 சரியானால்

Less – 05

$$2x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2:&\quad 0 = A + B \\ x^1:&\quad 2 = B + C \end{aligned}\right\} \quad A - C = -2 \qquad A = -3/2$$

$$x^0:\ -1 = A + C \qquad\qquad C = 1/2 \qquad B = 3/2$$

10

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{-3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$ 5

$$= \frac{-3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C_4,$$ 15

05 05 05

இங்கு C_4 எதேச்சையான மாறிலியாகும்

40

(c) (i) $n \neq -1,$

$$\int x^n(\ln x)dx = \int (\ln x).\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$ 10

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.\frac{1}{x}\,dx$$ 10

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C_5$$ 10

இங்கு C_5 எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

30

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$. 5

15

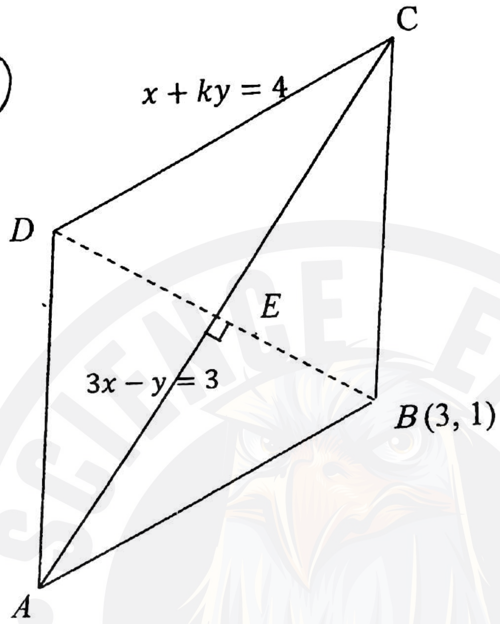
20

16.(a) ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ இன் மூலைவிட்டம் AC இன் சமன்பாடு $3x - y = 3$ உம் $B \equiv (3, 1)$ உம் ஆகும். அத்துடன் CD இன் சமன்பாடு $x + ky = 4$ ஆகும்; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி. k இன் பெறுமானத்தையும் BC இன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(b) முறையே $x^2 + y^2 = 4, (x-1)^2 + y^2 = 1$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்படும் C_1, C_2 என்னும் வட்டங்களை அவற்றின் தொடுகைப் புள்ளியைத் தெளிவாகக் காட்டிப் பருமட்டாக வரைக. ஒரு வட்டம் C_3 ஆனது C_1 ஐ உள்ளேயும் C_2 ஐ வெளியேயும் தொடுகின்றது. C_3 இன் மையம் வளையி $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(a)

use the mirror image less than -10



ஆழ்விம்பம் பாவித்தால் less -10

BD ⊥ AC

BD இன் சமன்பாடு: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3) \quad (\because BD \perp AC)$ 10 OR 0

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = t \text{ (say)}$$

$\therefore x = 3 + 3t, \; y = 1 - t.$ 10 OR 0

D க்குத் தொடர்பான பெறுமானம் t என்க.

எனின் $E \equiv \left(3 + \frac{3t}{2}, 1 - \frac{t}{2}\right)$ ஆனது AC யில் கிடக்கும்

$\therefore 3\left(3 + \frac{3t}{2}\right) - \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow 8 + 5t = 3 \qquad \Rightarrow t = -1.$ 10

$\therefore D \equiv (0, 2)$ 10

இது DC யில் கிடக்கும்

$0 + k \times 2 = 4$

$k = 2.$ 10

50

$\left.\begin{matrix} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7x = 10 ; 7y = 9$

$C \equiv \left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right).$ 10

BC இன் சமன்பாடு:

$$y-1=\frac{\frac{2}{7}}{-\frac{11}{7}}(x-3)$$

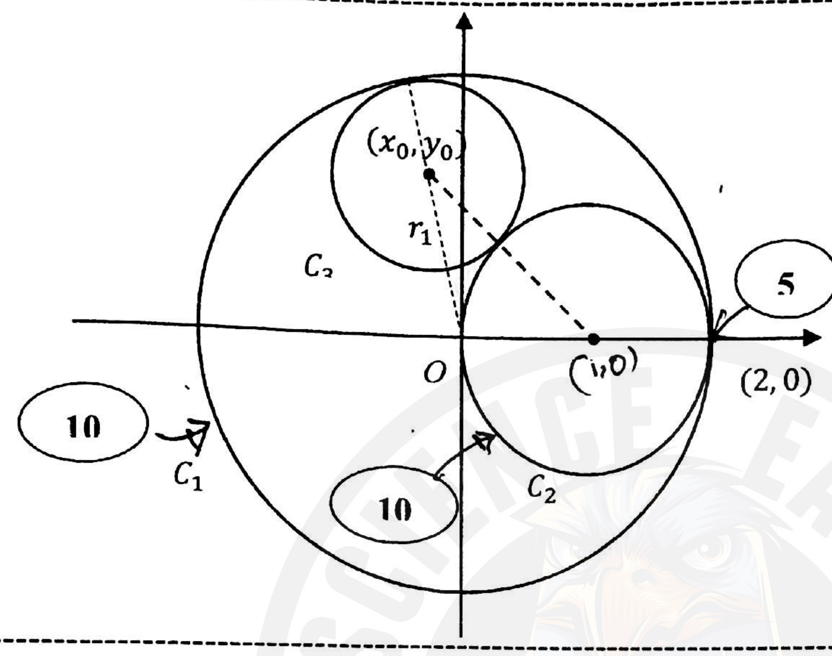
$$-11y+11=2x-6$$

$$2x+11y=17.$$

10

20

(b)



centre & radius

25

C_3 ஆனது C_1 ஐ உட்புறமாகத் தொடும் எனின் $\Rightarrow \quad 2-r_1=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$ 15 OR

C_3 ஆனது C_2 ஐ வெளிப்புறமாகத் தொடும் எனின் $\Rightarrow 1+r_1=\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2}$ 15 OR

$$3=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2} \quad 5$$

$$(x_0-1)^2+{y_0}^2=9-6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+{x_0}^2+{y_0}^2$$

$${x_0}^2-2x_0+1+{y_0}^2=9-6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+{x_0}^2+{y_0}^2$$

$$2x_0+8=6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2} \quad 10$$

$$\Rightarrow 9({x_0}^2+{y_0}^2)={x_0}^2+8x_0+16$$

$$\Rightarrow 8{x_0}^2+9{y_0}^2-8x_0-16=0 \quad 5$$

இதிலிருந்து (x_0, y_0)வளையியில் கிடப்பதால், $8x^2+9y^2-8x-16=0$. 5

55

(x, y) less than — 05

17. (a) $\tan(\alpha + \beta)$ இற்கான திரிகோணகணிதச் சர்வசமன்பாட்டை $\tan \alpha$, $\tan \beta$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\tan 2\theta$ ஐ $\tan \theta$ இன் சார்பிற் பெற்று, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ எனக் காட்டுக.

இறுதிச் சமன்பாட்டில் $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ எனப் பிரதியிட்டு, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ ஆனது $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$ என மேலும் தரப்படும்போது $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ என உய்த்தறிக.

(b) $0 < A < \pi$ இற்கு $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ எனக் காட்டுக.

வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் கோசைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி

$(a + b + c)(b + c - a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a + b - c)(a + c - b)$ எனக் காட்டுக.

(c) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ எனக் காட்டுக.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \quad 10$$

OR 2

10

$\alpha = \beta = \theta$ என்க 5

இல்லாவிட்டாலும் 05 வழங்கி

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}. \quad 5$$

10

$$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta) \quad 5$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta} \quad 5$$

$$= \frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta) + 2\tan\theta}{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta} \quad 5$$

$$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} \quad 5$$

20

$$\theta = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{1 - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \quad 5$$

கட்டாயம்

$$\Rightarrow -3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)-3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+1=0. \qquad \left(\because \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=1.\right)$$ 5

$\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ என்பது $x^3-3x^2-3x+1=0$ இன் தீர்வாகும். 5

15

$(x+1)(x^2-4x+1)=0$

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\neq -1 \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ என்பது $x^2-4x+1=0$ இன் தீர்வாகும் 5

5

$$\text{i.e. } x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$ 5

$\frac{5\pi}{12}>\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)>1.$ கட்டாயம் 5

$\because 2-\sqrt{3}<1,\ \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}.$ 5

25

(b) $0<A<\pi$.

5

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)}=\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)$$ 5

5

15

கோசைன் விதிப்படி

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$ 5 எங்கே இருந்தாலும் 5 வழங்குக.

$$\cos A=-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$$

எனவே $$\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}}{1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}}$$ 10

$$=\frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{2bc-a^2+b^2+c^2}$$ 5

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(a+b+c)}$$ 5

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = (a+b-c)(a+c-b). \quad 5$$

30

(c) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ என்க. 5

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha > 0$

$\cos\beta > 0.$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{3}{5}.\sqrt{1-\frac{25}{169}} + \sqrt{1-\frac{9}{25}}.\frac{5}{13} \quad 5$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13}$$

$$= \frac{56}{65}. \quad 5$$

$\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, எனவே $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

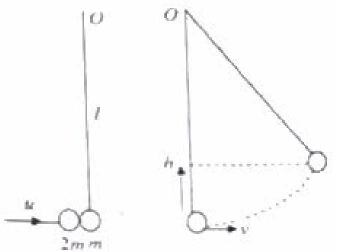
இதேபோல் $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$, எனவே $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$.

$\therefore\ 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ எனவே $\alpha + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$. 10 OR 0

25

---

1 A particle of mass m hangs in equilibrium at one end of a light inextensible string of length l whose other end is tied to a fixed point O. Another particle of mass $2m$ collides horizontally with velocity u with the first particle and coalesces with it. Find the velocity with which the composite particle begins to move.
Show that if $u=\sqrt{gl}$, then the composite particle reaches a maximum height of $\frac{2l}{9}$ above its initial level.



Let v be the velocity with which the composite particle begins to move

Apply $\underline{I}=\Delta(M\underline{v})$ for the system:

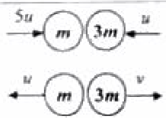
$\leftarrow \quad 0=3mv-2m\times u$ (5)

$\Rightarrow v=\frac{2u}{3}$. (5)

By the Conservation of Energy, $(3mg)h=\frac{1}{2}(3m)v^2$, where h is the required height.

$\therefore \ h=\frac{v^2}{2g}=\frac{4u^2}{9(2g)}=\frac{4gl}{18g}=\frac{2l}{9}$ (5) (10)

2 A particle P of mass m and a particle Q of mass $3m$ move on a smooth horizontal table along the same straight line towards each other with speeds $5u$ and u respectively, as shown in the figure. After their impact, P and Q move **away from each other** with speeds u and v respectively. Find v in terms of u, and show that the coefficient of restitution between P and Q is $\frac{1}{3}$.



Apply $\underline{I}=\Delta(M\underline{v})$ for the system:

$\leftarrow \quad 0=(3mv-mu)-(5mu-3mu)$ (5)

$\Rightarrow 3mv=3mu$ (5)

$\Rightarrow v=u$. ....(1)

By Newton's law of restitution: (10)

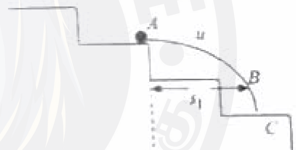
$v+u=e(5u+u)$

$(1)\Rightarrow 2u=6eu$

$\therefore \ e=\frac{1}{3}$. (5)

25

3 A particle P, projected horizontally with velocity u given by $u=\frac{3}{2}\sqrt{ga}$ from a point A at the edge of a step of a fixed stairway perpendicular to that edge, moves under gravity. Each step is of height a and length $2a$ (see the figure). Show that the particle P will not hit the first step below A, and it will hit the second step below A at a horizontal distance $3a$ from A.



For the motion of P, apply $s=ut+\frac{1}{2}at^2$;

$\downarrow$ from A to B: $a=\frac{1}{2}gt_1^2$, where t_1 is the time taken to reach the level of the 1[st] step below (5)

$t_1=\sqrt{\frac{2a}{g}}$.

Let s_1 be the horizontal distance moved in time t_1

$\rightarrow$ from A to B: $s_1=u\times t_1=\frac{3}{2}\sqrt{ga}\times\sqrt{\frac{2a}{g}}=\frac{3}{\sqrt{2}}a>2a$. (5) (5)

Thus P will not hit the 1[st] step below A.

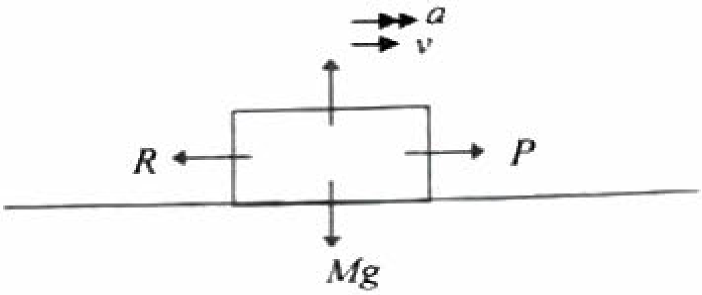
Time taken from A to C is $t_2=\sqrt{\frac{2(2a)}{g}}$. (5)

$\rightarrow \quad s=ut_2=\frac{3}{2}\sqrt{ga}\cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}}=3a$. (5)

25

4. A car of mass M kg moves along a straight level road against a resistance of constant magnitude R N. At an instant when the car is moving at speed v m s^{-1}, its acceleration is a m s^{-2}. Show that the power of its engine at this instant is $(R + Ma)v$ W.

The car then moves with a constant speed v_1 m s^{-1} against a resistance of the same constant magnitude R N up a straight road inclined at an angle α to the horizontal, working at the same power. Show that $v_1 = \dfrac{(R + Ma)v}{R + Mg\sin\alpha}$.



Let P N be the tractive force

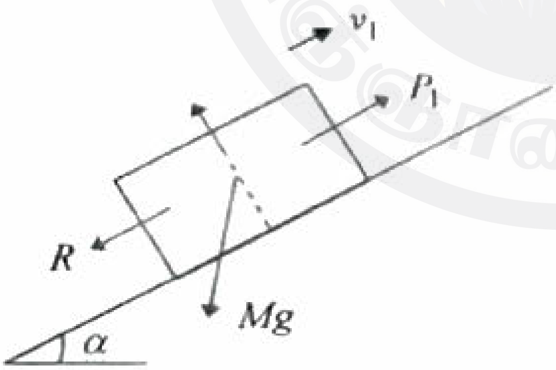
Apply $\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$:

$P - R = Ma$ -------------- (1) 5

Let H W be the power of its engine.

Then $H = P \times v$ 5

$= (R + Ma)v$ (by (1)) 5



$\underline{F} = m\underline{a}$: $\nearrow$

$P_1 - R - Mg\sin\alpha = 0$ ---------- (2) 5

Also $H = P_1 \times v_1$

$\therefore\ v_1 = \dfrac{H}{P_1} = \dfrac{(R + Ma)v}{(R + Mg\sin\alpha)}$. (by (2))

5

5 In the usual notation, let $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ and $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{i} + (1-\alpha)\mathbf{j}$, where $\alpha \in \mathbb{R}$.

Find (i) $|\mathbf{a}|$ and $|\mathbf{b}|$.

(ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ and $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ in terms of α.

If the angle between $\mathbf{a}$ and $\mathbf{c}$ is equal to the angle between $\mathbf{b}$ and $\mathbf{c}$, show that $\alpha = \frac{1}{2}$.

(i) Magnitudes of vectors

$$\left.\begin{aligned}|\underset{\sim}{a}| &= \sqrt{3^2+4^2} = 5\\ |\underset{\sim}{b}| &= \sqrt{4^2+3^2} = 5\end{aligned}\right\} \quad 5$$

5

(ii) $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{c} = 3\alpha + 4(1-\alpha) = 4-\alpha$

5

$\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c} = 4\alpha + 3(1-\alpha) = 3+\alpha$

Let θ be the angle between $\underset{\sim}{a}$ and $\underset{\sim}{c}$. Then $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{c} = |\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{c}|\cos\theta$ and

$\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c} = |\underset{\sim}{b}||\underset{\sim}{c}|\cos\theta$ 5

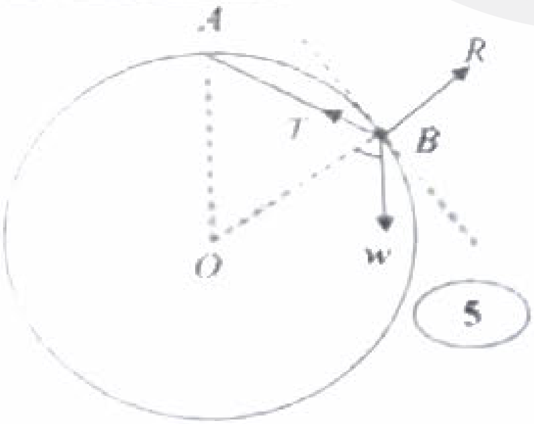
Since $|\underset{\sim}{a}| = |\underset{\sim}{b}|$, we have $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}$.

$\therefore 4-\alpha = 3+\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. 5

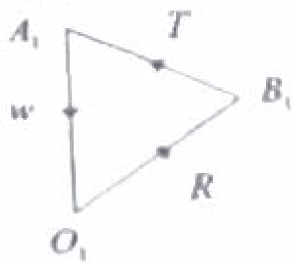
25

6 One end of a light inextensible string of length $2l$ is attached to the highest point of a thin smooth rigid circular wire of radius $a\left(>\sqrt{2}l\right)$ which is fixed in a vertical plane. A small smooth bead of weight w, which is free to move along the wire, is attached to the other end of the string. The bead is in equilibrium with the string taut, as in the figure. Mark the forces acting on the bead and show that the tension of the string is $\frac{2wl}{a}$.



5

Triangle of Forces



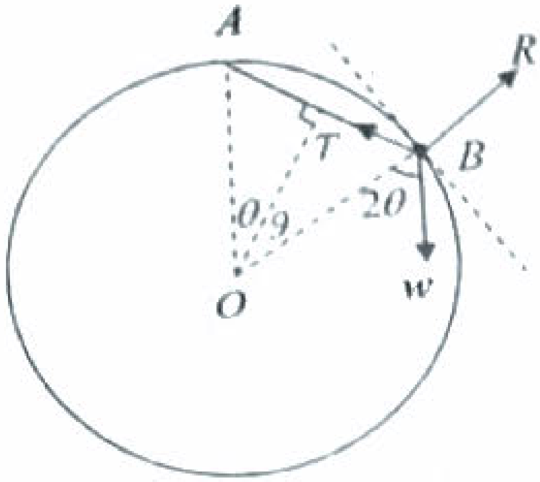
10

$\frac{T}{AB} = \frac{w}{OA} \Rightarrow T = \frac{2wl}{a}$ 5

5

25

1



5

By Lami's Theorem, $\dfrac{T}{\sin(\pi - 2\theta)} = \dfrac{w}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)}$. 10

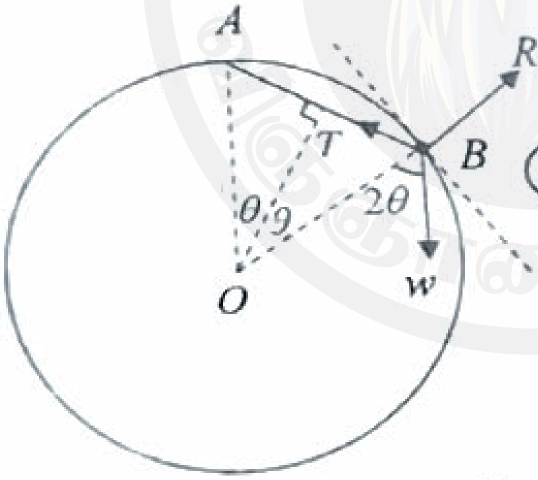
$$\therefore \quad T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$

$$= 2w\sin\theta = \frac{2wl}{a} \quad \left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$ 5

5

25

er 2



5

Resolve in a direction perpendicular to OB

$$T\cos\theta = w\sin 2\theta$$ 10

$$T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$ 5

$$= 2w\sin\theta$$

$$= \frac{2wl}{a} \quad \left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$ 5

7. Let A and B be two events of a sample space Ω. In the usual notation, $P(A) = p$, $P(B) = \frac{p}{2}$ and $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$, where $p > 0$. Find $P(A \cap B)$ in terms of p.
Deduce that if A and B are independent events, then $p = \frac{5}{6}$.

For two events A and B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. 5

This gives us $P(A \cup B) = \frac{3p}{2} - P(A \cap B)$. ------------ (1) 5

It is given that $P(A \cup B)) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$. ------------ (2)

(1) and (2) $\Rightarrow \frac{3p}{2} - 2P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5p}{12}$. 5

If A and B are independent, then $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$. 5

$$\Rightarrow \frac{5p}{12} = p \cdot \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{5}{6}. \quad (\because p > 0)$$

5

8. A bag contains 6 white balls and n black balls which are equal in all respects, except for col... Two balls are taken out at random from the bag, one after the other, without replacement. ... probability that the first ball is white and the second ball is black is $\frac{4}{15}$. Find the value o...

Probability that the first ball is white $= \frac{6}{n+6}$.

Probability that the first ball is white and the second ball is black $= \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)}$

$$\therefore \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)} = \frac{4}{15} \quad 5.$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 23n + 60 = 0 \quad 5.$$

$\Rightarrow n = 4$. ($\because n$ is a positive integer) 5

(Note: no marks if the answer is written as $n = 4$ or $n = \frac{15}{2}$)

9 The mean of three distinct integers less than 11 is 7. When two more integers are taken, mean of all five integers is 5. Also, the only mode of these five integers is 3. Find the integers

Let x, y, and z be distinct integers less than 11 with a mean of 7

Then $\frac{x+y+z}{3} = 7$. 5

$\Rightarrow x + y + z = 21$ ---------------(1)

Since x, y, and z are distinct and the only mode is 3, at least one of the two integers additionally taken must be 3. Let the other be t

Since the mean of the five integers is 5, we have $\frac{x+y+z+t+3}{5} = 5$. 5

$\Rightarrow \quad 21 + 3 + t = 25$

$\Rightarrow \quad t = 1$. 5

Hence the integers are $x, y, z, 3, 1$. Since the only mode is 3, and x, y and z are distinct, exactly one of them must be 3. Let $z = 3$.

Again (1) $\Rightarrow x + y = 18$. -------------- (2) 5

Since x and y are integers less than 11, (2) gives us

$(x = 8$ and $y = 10)$ or $(x = 10$ and $y = 8)$. Hence, the five numbers are 1, 3, 3, 8 and 10.

5 25

1, 2, 3, 4 and 5. The number of times the arrow hits each of the sectors is given in the following frequency table, where p and q are constants.

Number	1	2	3	4	5
Frequency	1	p	q	5	2

If the mean and the variance of the above data are given to be 3 and $\frac{6}{5}$ respectively, find the values of p and q.

Mean $\mu = 3 \Rightarrow \frac{1+2p+3q+20+10}{p+q+8} = 3$ 5

$\Rightarrow 2p + 3q + 31 = 3p + 3q + 24$

$\Rightarrow \quad p = 7$. 5

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$$ 5

Variance $= \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1\cdot 1^2 + 7\cdot 2^2 + q\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{q+15} - 3^2$ 5

$\Rightarrow \quad 51(q+15) = 5(1 + 28 + 9q + 80 + 50)$

$\Rightarrow \quad q = 5$. 5

25

Alter

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$ 5

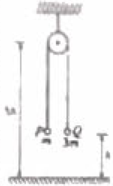
Variance $= \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1(1-3)^2 + 7(2-3)^2 + q(3-3)^2 + 5(4-3)^2 + 2(5-3)^2}{1+7+q+5+2}$ 5

$\Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{4+7+5+8}{15+q}$

$\Rightarrow q = 5$. 5

15

11. (a) A particle P of mass m is connected to a particle Q of mass $3m$ by a light inextensible string passing over a small smooth pulley fixed at a height $3h$ above an inelastic horizontal floor. Initially the two particles are held at a height h above the floor with the string taut, and released from rest. (See the adjoining figure.) Applying Newton's second law separately to the motions of P and Q, show that the magnitude of acceleration of each particle is $\frac{g}{2}$.



After a time t_0 the particle Q strikes the floor, comes to rest instantly, remains at rest for a further time t_1 and begins to move up. Sketch the velocity-time graphs separately for the motions of the two particles P and Q until the particle Q begins to move up.

Using these graphs, show that $t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ and find t_1 in terms of g and h.

Show further that the particle P reaches a maximum height $\frac{5h}{2}$ above the floor.

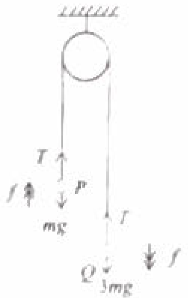
(b) A straight river of breadth a flows with uniform speed u. The points A and C are situated on opposite banks of the river such that the line AC is perpendicular to the direction of flow of the river. Also, a stationary buoy B is fixed in the middle of the river, on the upstream side of AC such that ABC is an equilateral triangle. (See the adjoining figure.)

A boat moving with speed v ($> u$) relative to water starts off from A and moves until it reaches B. Then it moves from B to C. Sketch the velocity triangles for the motions of the boat from A to B and from B to C.

Show that the speed of the boat in its motion from A to B is $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u\right)$ and find its speed in the motion from B to C.

Hence, show that the total time taken by the boat for the paths AB and BC is $\frac{a\sqrt{4v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}$

(a)



Apply $F = mf$:

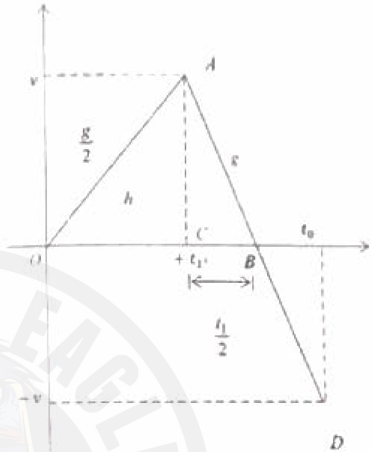
For $Q(3m)\downarrow$ $\quad 3mg - T = 3mf$ $\quad$ 5

For $P(m)\uparrow$ $\quad T - mg = mf$ $\quad$ 5

$2mg = 4mf$

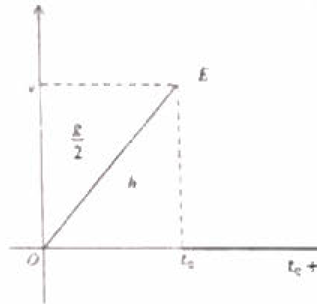
$\Rightarrow f = \frac{g}{2}$ $\quad$ 5

15



15

Particle P



10

Particle Q

25

From the v-t graphs

Area under OA or OE $\quad = \frac{1}{2}\cdot t_0 \cdot v = h$ ---------- (1) $\quad$ 5

Gradient of OA or OE $\quad = \frac{v}{t_0} = \frac{g}{2}$ ---------- (2) $\quad$ 5

$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot t_0 \cdot \frac{g t_0}{2} = h$

$\Rightarrow \quad t_0^2 = \frac{4h}{g}$

$\Rightarrow \quad t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$. $\quad$ 5

15

Also (2) $\Rightarrow v = \frac{g}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$ $\quad$ 5

For its motion under gravity alone, time taken by $P = \frac{2v}{g}$

$$\therefore \; t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \qquad 5$$

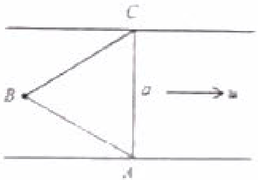
$\boxed{10}$

Maximum height reached by $P = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{t}{2} = \frac{1}{2}h$ 5

Total height above the level of floor $= h + h - \frac{h}{2} = \frac{5h}{2}$ 5

$\boxed{10}$

(b)



$\underline{V}(B,W) = v$

$\underline{V}(W,E) = u \rightarrow$

$\underline{V}(B,E) =$  for AB and  for BC 5 For both

$\underline{V}(B,E) = \underline{V}(B,W) + \underline{V}(W,E)$

$= \underline{V}(W,E) + \underline{V}(B,W)$

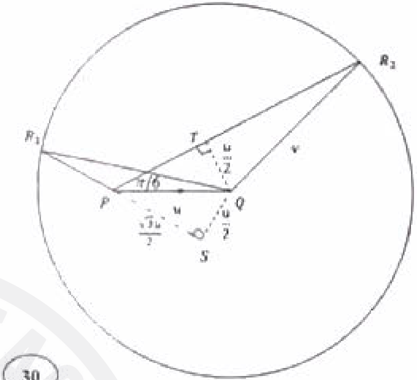
5

$= \overline{PQ} + \overline{QR_i}$

$= \overline{PR_i}$ for $i = 1, 2$, where $AB // PR_1$ and $BC // PR_2$ respectively.

5 5

(Note: 10 marks each for setting up for each velocity triangle)



30

(Note: 15 marks each for each velocity triangle)

$\boxed{30}$

For AB: $\Delta\, PQR_1$

$$R_1S = \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$$

$$PR_1 = R_1S - PS \qquad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u\right). \qquad 5$$

For BC: $\Delta\, PQR_2$

$$PR_2 = PT + TR_2$$

$$= \frac{\sqrt{3}u}{2} + \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}} \qquad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} + \sqrt{3}u\right) \qquad 5$$

$$PR_1 . PR_2 = \frac{1}{4}\left(4v^2 - u^2 - 3u^2\right)$$

$PR_1 + PR_2 = \sqrt{4v^2 - u^2}$

$PR_1 \cdot PR_2 = v^2 - u^2$

$$\text{Total Time} = \frac{a}{PR_1} + \frac{a}{PR_2}$$

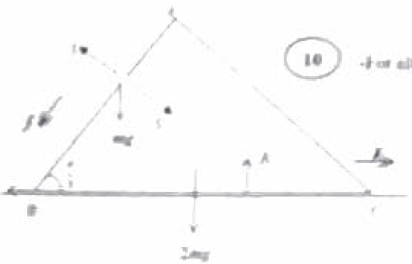
$$= a\,\frac{(PR_1 + PR_2)}{PR_1 . PR_2}$$

$$\sqrt{4v^2 - u^2} \qquad 5$$

12. (a) The triangle ABC in the figure is a vertical cross-section through the centre of gravity of a uniform wedge of mass $2m$. The line AB is a line of greatest slope of the face containing it and $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$. The wedge is placed with the face containing BC on a rough horizontal floor. The face containing AB is smooth. A particle of mass m is held on AB as in the figure and the system is released from rest. It is given that the wedge moves in the direction of $\overrightarrow{BC}$ and that the magnitude of the frictional force exerted on the wedge by the floor is $\frac{R}{6}$, where R is the magnitude of the normal reaction exerted on the wedge by the floor. Obtain equations which are sufficient to determine R, in terms of m and g.

(b) OAB in the figure is a circular sector of radius a subtending an angle $\frac{\pi}{6}$ at the centre O with OA vertical. It is a cross-section perpendicular to the axis of a smooth cylindrical sector fixed with its axis horizontal. One end of a light inextensible string passing over a small smooth pulley fixed at B is attached to a particle P of mass $3m$ and the other end is attached to a particle Q of mass m. Initially, the particle P is held at A and the particle Q hangs freely at the horizontal level of O. The system is released from rest in this position with the string taut. When OP makes an angle $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$ with the upward vertical show that $2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos\theta) + g\theta$ and that the tension in the string is $\frac{3}{4}mg(1 - \sin\theta)$, and find the normal reaction on the particle P.

(a)



(10) For all forces

$\underline{a}(2m, E) = F \longrightarrow$

$\underline{a}(m, 2m) = f$

$\underline{a}(m, E) = \underline{a}(m, 2m) + \underline{a}(2m, E)$

(10)

Apply $\underline{F} = m\underline{a}$,

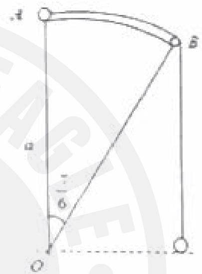
(i) For the Particle $\swarrow mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\left(f - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ (15)

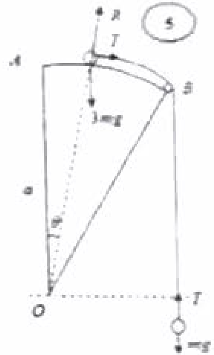
(ii) For the System $\rightarrow -\frac{R}{6} = 2mF + m\left(F - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)$ (15)

(iii) For the system $\uparrow$ $R - 3mg = -m\frac{f}{\sqrt{2}}$ (10)

60

(b)





(5)

(5)

By Conservation of Mechanical Energy

$3mga = 3mga\cos\theta - mga\theta + \frac{1}{2}(3m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(m)(a\dot{\theta})^2$ (25) PE 10, KE 10, Equation 05

$2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos\theta) + g\theta$ (5)

40

Applying $\underline{F} = m\underline{a}$

For P $\searrow T + 3mg\sin\theta = 3mf$ ------- (1) (15)

For Q $\downarrow mg - T = mf$ ------- (2) (10)

By (1) and (2),

$3mg - 5T = T + 3mg\sin\theta$

$4T = 3mg(1 - \sin\theta)$ 5

$T = \frac{3mg}{4}(1 - \sin\theta)$

30

Applying $\underline{F} = m\underline{a}$ for P

$\swarrow$ $3mg\cos\theta - R = 3ma\dot{\theta}^2$ 10

$R = 3mg\cos\theta - \frac{3m}{2}\{3g(1-\cos\theta) + g\theta\}$ 10

$= \frac{3mg}{2}(2\cos\theta - 3 + 3\cos\theta - \theta)$

$= \frac{3mg}{2}(5\cos\theta - \theta - 3)$

20

Note:

P will not leave the surface for $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$

$$R|_{\theta=0} = 3mg > 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{3mg}{2}(-5\sin\theta - 1) < 0 \; for \; 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$R|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{3mg}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - 3\right) > 0$$

13. One end of a light elastic string of natural length a and modulus of elasticity $4mg$ is tied to a fixed point O and the other end to a particle P of mass m. The particle P is released from rest at O. Find the velocity of the particle P when it passes through the point A, where $OA = a$.

Show that the length of the string $x (\geq a)$ satisfies the equation $\ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$

Taking $X = x - \frac{5a}{4}$, express the above equation in the form $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$, where $\omega (> 0)$ is a constant to be determined.

Assuming that $\dot{X}^2 = \omega^2\left(c^2 - X^2\right)$, find the amplitude c of this simple harmonic motion.

Let L be the lowest point reached by the particle P. Show that the time taken by P to move from A to L is $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

At the instant when the particle P is at L another particle of mass λm $(1 \leq \lambda < 3)$ is gently attached to P. Show that the equation of motion of the composite particle of mass $(1+\lambda)m$ is $\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$

Show further that the composite particle performs complete simple harmonic motion with amplitude $(3-\lambda)\frac{a}{4}$

For motion of P under gravity alone

from O to A:

$\downarrow$ $v^2 = 2ga \Rightarrow v = \sqrt{2ag}$. 05

Tension in the string: $T = \frac{4mg(x-a)}{a}$, $x \geq a$ 5

$\downarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$: $-T + mg = m\ddot{x}$ 05

Eliminating T: $-4mg\frac{(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x}$ 5

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{4g}{a}(x-a) = \frac{4g}{a}\cdot\frac{a}{4}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ ------------------------- (1) 5

Write $X = x - \frac{5a}{4} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$ and $\ddot{X} = \ddot{x}$. 5

Then (1) becomes $\ddot{X} + \frac{4g}{a}X = 0$

Hence $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$, where $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$ $(\because \omega > 0)$

5 5

40

$\Rightarrow \dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ------------------------- (2)

$\dot{x} = \sqrt{2ga}$ when $x = a$ $\Rightarrow \dot{X}^2 = 2ga$ when $X = -\frac{a}{4}$

5 5

Then (2) $\Rightarrow 2ga = \frac{4g}{a}\left[c^2 - \left(\frac{-a}{4}\right)^2\right]$ 5

$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$ ($\because c > 0$) 5

Centre is given by $\ddot{X} = 0$; i.e. $x = \frac{5a}{4}$ 5

25

$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a$ 5

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ 5

Time taken from A to $L = \frac{\pi - \alpha}{\omega}$ 5

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ 5

15

[illegible] the circular arc, angle and distances marked) 35

$T_1 = \frac{4mg(x-a)}{a}$

For composite particle $F = ma$

$(1+\lambda)mg - T_1 = (1+\lambda)m\ddot{x}$ 10

$(1+\lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x-a) = (1+\lambda)m\ddot{x}$ 5

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}(x-a) - g = 0$ 5

[illegible]

[illegible] 5

25

Centre C_1: $x = OC_1 = (5+\lambda)\frac{a}{4}$

$C_1L = 2a - (5+\lambda)\frac{a}{4}$ 5

$= (3-\lambda)\frac{a}{4}$ 5

New amplitude $c_1 = (3-\lambda)\frac{a}{4}$ (>0) $\because \lambda < 3$

Complete Simple Harmonic Motion if and only if

$AC_1 \geq c_1$ 5

$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq (3-\lambda)\frac{a}{4}$

$5 + \lambda - 4 \geq 3 - \lambda$

$\lambda \geq 1$ 5 25

Aliter

Let $X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, where A and B are constants to be determined.

$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$. 5

When $t = 0$ and $x = a$, $X = -\frac{a}{4}$ and $\dot{X} = V = \sqrt{2ga}$

5 5

$\therefore A = -\frac{a}{4}$ and $V = B\omega \Rightarrow B = \frac{V}{\omega}$

5 5

Solution: $X = -\frac{a}{4}\cos\omega t + \frac{V}{\omega}\sin\omega t$. 25

Differentiating $\dot{X} = \frac{a\omega}{4}\sin\omega t + V\cos\omega t$ 5

Lowest point L is reached when $\dot{X} = 0$ 5

$\Rightarrow c = \frac{3a}{4} \quad (\because c > 0)$ 5

Centre is given by $\ddot{X} = 0$; i.e. $x = \frac{3a}{4}$ 5

25

$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a$ 5

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ 5

Time taken from A to $L = \frac{\pi - \alpha}{\omega}$ 5

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$ 5

14

With the circular arc, angle and distances marked

15

$T_1 = \frac{4mg(x-a)}{a}$

For composite particle $F = ma$

$(1+\lambda)mg - T_1 = (1+\lambda)m\ddot{x}$ 10

$(1+\lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x-a) = (1+\lambda)m\ddot{x}$ 5

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}(x-a) - g = 0$ 5

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left(x - \ldots \frac{a}{4}\right)$

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left(x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right) = 0$ 5

25

Centre C_1: $x = OC_1 = (5+\lambda)\frac{a}{4}$

$C_1L = 2a - (5+\lambda)\frac{a}{4}$ 5

$= (3-\lambda)\frac{a}{4}$ 5

New amplitude $c_1 = (3-\lambda)\frac{a}{4} \quad (>0) \because \lambda < 3$

Complete Simple Harmonic Motion if and only if

$AC_1 \geq c_1$ 5

$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq (3-\lambda)\frac{a}{4}$

$5 + \lambda - 4 \geq 3 - \lambda$

$\lambda \geq 1$ 5 25

Alter

Let $X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, where A and B are constants to be determined.

$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$. 5

When $t = 0$ and $x = a$, $X = -\frac{a}{4}$ and $\dot{X} = V = \sqrt{2ga}$

5 5

$-\frac{a}{4} = A$ and $V = B\omega \Rightarrow B = \frac{V}{\omega}$

5 5

Solution: $X = -\frac{a}{4}\cos\omega t + \frac{V}{\omega}\sin\omega t$. 25

Differentiating $\dot{X} = \frac{a\omega}{4}\sin\omega t + V\cos\omega t$ 5

Lowest point L is reached when $\dot{X} = 0$ 5

Then $\tan \omega t_1 = -\dfrac{4V}{a\omega}$ 5

$\omega t_1 = \pi - \alpha$

$\tan \alpha = \dfrac{4V}{a\omega}$ where $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 5

Centre C of SHS is such that $x = \dfrac{5a}{4}$ or $AC = \dfrac{a}{4}$ 5

$$\frac{a}{4} = c\cos\alpha = \frac{c(a\omega)}{\sqrt{16V^2 + a^2\omega^2}}$$

$$= c\,\frac{2\sqrt{ga}}{\sqrt{16 \times 2ga + 4ga}} = \frac{1}{3}c$$ 5

$$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$$

Also from above $\omega t_1 = \pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 5

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

35

---

14 (a) The position vectors of two points A and B with respect to an origin O are $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ respectively, where O, A and B are **not collinear**. Let C be the point such that $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ and let D be the point such that $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. By expressing $\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{AD}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, show that $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Let P and Q be the points on AB and OD respectively, such that $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{OQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{OD}$, where $0 < \lambda < 1$. Show that $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$.

(b) In a parallelogram $ABCD$, let $AB = 2$ m and $AD = 1$ m, and let $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$. Also, let E be the mid-point of CD. Forces of magnitudes 5, 5, 2, 4 and 3 newtons act along AB, BC, DC, DA and BE respectively, in the directions indicated by order of the letters. Show that their resultant force is parallel to $\overrightarrow{AE}$, and find its magnitude.

Also, show that the line of action of the resultant force meets AB produced at a distance $\frac{3}{2}$ m from B.

An additional force acting through C is now added to the above system of forces so that the resultant force of the new system is along $\overrightarrow{AE}$. Find the magnitude and direction of the additional force.

Let $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

Then $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{\underline{b}}{3}$ 5 and $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2}$ 5

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

$= -\underline{a} + \frac{\underline{b}}{2} - \frac{\underline{a}}{2}$

$= \frac{3}{2}\left(-\underline{a} + \frac{\underline{b}}{3}\right)$ ---------- (1) 5

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\underline{a} + \frac{\underline{b}}{3}$ ---------- (2) 5

By (1) and (2), $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ 5

25

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ 5

$= -\lambda(\underline{b} - \underline{a}) - \underline{a} + \underline{c}$ 5

$= (\lambda - 1)\underline{a} - \lambda\underline{b} + \frac{\underline{b}}{3}$

$= (\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}$ -------- (3) 5

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ}$

$= -\overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OD}$ 5

$= -\frac{\underline{b}}{3} + (1-\lambda)\frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$ 5

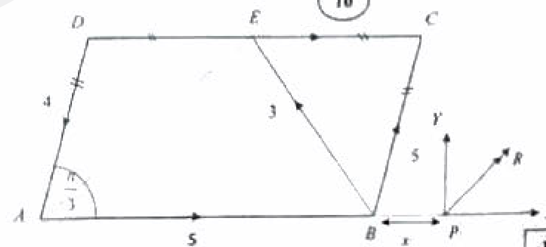
$= \frac{1}{2}\left[(\lambda - 1)\underline{a} - \frac{3}{2}\underline{b} + \underline{b} - \lambda\underline{b}\right]$

$= \frac{1}{2}\left((\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}\right)$ -------- (4) 5

By (3) and (4), $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ 5

35

(b) 10 - For marking the given forces



10

Resolving parallel to $\overrightarrow{AE}$ $= -4\cos\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6}$ 10

$= 4\sqrt{3}N$ 5

Resolving A — E : $3 - 4\sin\frac{\pi}{6} + 5\sin\frac{\pi}{6} - 5\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6}$ 10

$= 3 - 2 + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - 1$

$= 0$ 5

Resultant R is of magnitude $4\sqrt{3}N$; $\parallel$ to $\overrightarrow{AE}$.

5 5

40

OR $\rightarrow X = 5 + \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = 6N$ 10

$\uparrow Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(5+3) - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}N$ 10

$\frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 5

Resultant R is of magnitude $2\sqrt{3}\sqrt{3+1} = 4\sqrt{3}N$. 5

Its line of action makes an angle,

$\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, with side AB $\therefore$ it is parallel to AE.

5 5 40

Let P be the point where resultant meets AB produced.

Taking moments about B

$Yx = 4 \times 2\sin\frac{\pi}{3} - 2 \times 1\sin\frac{\pi}{3}$ 10

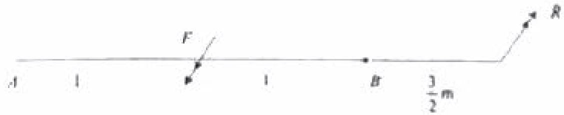
$2\sqrt{3}x = 3\sqrt{3}$

$x = \frac{3}{2}$ m 5

Line of action of R meets AB produced at $x = \frac{3}{2}$ m from B.

15

Additional force must be parallel to $\overrightarrow{EA}$ 5



A $R \times \left(2 + \frac{3}{2}\right)\sin 30^\circ = F.1\sin 30^\circ$ 15

$4\sqrt{3} \times \frac{7}{2} = F$

$F = 14\sqrt{3}N$. 5

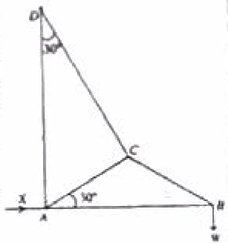
25

15 (a) Four equal uniform rods, each of weight w_1, are smoothly jointed at their ends to form a rhombus $ABCD$. The mid-points of BC and CD are connected by a light rod such that $B\hat{A}D = 2\theta$. Each of the joints B and D carries equal loads of weight w_2. The system, hanging symmetrically from the joint A, is in equilibrium in a vertical plane with the light rod horizontal. Show that the thrust in the light rod is $2(2w_1 + w_2)\tan\theta$.

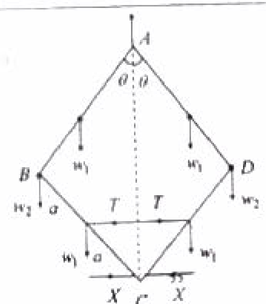
(b) The adjoining figure represents a framework of five light rods AB, BC, CD, AC and AD, smoothly jointed at the ends. It is given that $AC = CB$ and $B\hat{A}C = 30^\circ = A\hat{D}C$. The framework is smoothly hinged at D. A weight W is suspended at the joint B and the framework is kept in equilibrium in a vertical plane with AB horizontal and AD vertical, by a horizontal force of magnitude X acting at A.

Using Bow's notation, draw stress diagrams for the joints B, C and A in the same figure.

Hence, find the value of X and the stresses in all rods, distinguishing between tensions and thrusts.



(a)



10

Symmetry 5

Let $2a$ be the length of each heavy rod.

$\overset{\curvearrowright}{B}$ for BC : $X \times 2a\cos\theta - w_1 \times a\sin\theta - T \times a\cos\theta = 0$. (10)

$\Rightarrow 2X - T = w_1 \tan\theta$ ---------- (1) (5)

$\overset{\curvearrowright}{A}$ for AB and BC :

$X \times 4a\cos\theta + 2w_1 \times a\sin\theta + w_2 \times 2a\sin\theta - T \times 3a\cos\theta = 0$. (20)

$\Rightarrow 4X - 3T = -2(w_1 + w_2)\tan\theta$ ---------- (2) (5)

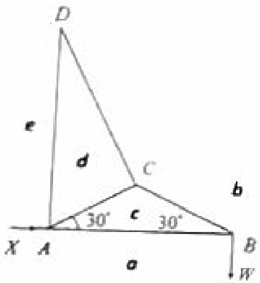
$(1) \times 2 - (2) \Rightarrow T = 2w_1\tan\theta + (2w_1 + w_2)\tan\theta$

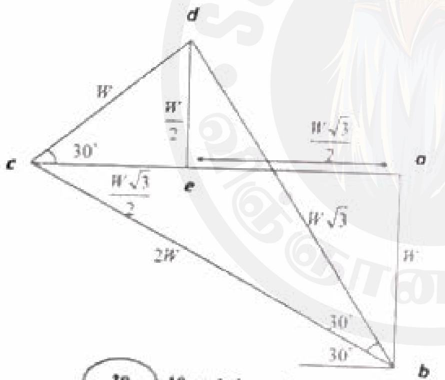
$= (4w_1 + 2w_2)\tan\theta$

$= 2(2w_1 + w_2)\tan\theta$ (10)

65

(b)





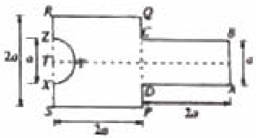
(30) -10 each for each joint

Rod	Magnitude	Tension/Trust	
BC(*bc*)	$2W$ (5)	Tension	(5)
AB(*ca*)	$\sqrt{3}W$ (5)	Thrust	(5)
CD(*bd*)	$\sqrt{3}W$ (5)	Tension	(5)
AC(*dc*)	W (5)	Tension	(5)
AD(*de*)	$\frac{W}{2}$ (5)	Thrust	(5)
$X(eo) = \frac{W\sqrt{3}}{2}$			(5)

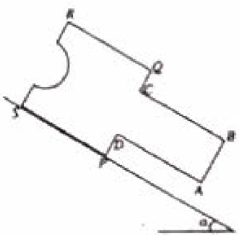
85

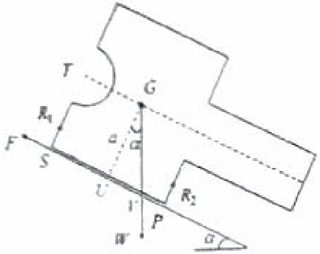
16. Show that the centre of mass of a uniform semi-circular lamina of radius r and centre O is at a distance $\frac{4r}{3\pi}$ from O.

As shown in the adjoining figure, a uniform plane lamina L is made by rigidly attaching a rectangle $ABCD$ to a square $PQRS$ such that DC and PQ lie on the same line with their mid-points coinciding, and removing a semi-circular region XYZ of radius $\frac{a}{2}$ centred at the mid-point T of RS. It is given that $AB = a$ and $AD = PQ = 2a$. Show that the centre of mass of the lamina L lies on the axis of symmetry at a distance ka from RS, where $k = \frac{238}{3(48-\pi)}$.



As shown in the adjoining figure, the lamina L is in equilibrium on a rough plane inclined at an angle α to the horizontal with its plane vertical and the edge PS on a line of greatest slope such that the point P lies below S. Show that $\tan\alpha < (2-k)$ and $\mu \geq \tan\alpha$, where μ is the coefficient of friction between the lamina and the inclined plane.





10

Since, PS is in contact with the plane, we must have $UV < UP$. 10

i.e. $a \tan\alpha < 2a - ka$

$\Rightarrow \tan\alpha < (2-k)$. (Note that $k < 2$.)

10

 $R_1 + R_2 = w\cos\alpha$ 10

 $F = w\sin\alpha$ 5

Since L does not slide, we must have $\mu \geq \dfrac{F}{R_1 + R_2}$. 10

This gives us $\mu \geq \tan\alpha$ 5

60

---

17. (a) An unbiased cubical die A shows 1, 2, 3, 3, 4, 5 on its six separate faces. The die A is tossed twice. Find the probability that the sum of the two numbers obtained is 6.

Another die B, identical to A in all respects except for the numbers on the faces, shows 2, 2, 3, 4, 4, 5 on its six separate faces. The die B is tossed twice. Find the probability that the sum of the two numbers obtained is 6.

Now, the two dice A and B are put in a box. One die is taken out of the box at random and tossed twice. Given that the sum of the two numbers obtained is 6, find the probability that the die taken out of the box is the die A.

(b) The mean and the standard deviation of n numbers $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are μ_1 and σ_1 respectively, and the mean and the standard deviation of m numbers $y_1, y_2, \cdots, y_m$ are μ_2 and σ_2 respectively. Let the mean and the standard deviation of all of these $n + m$ numbers be μ_3 and σ_3 respectively.

Show that $\mu_3 = \dfrac{n\mu_1 + m\mu_2}{n+m}$.

Let $d_1 = \mu_3 - \mu_1$. Show that $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu_3)^2 = n\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right)$.

By taking $d_2 = \mu_3 - \mu_2$, write down a similar expression for $\sum\limits_{j=1}^{m}(y_j - \mu_3)^2$.

Deduce that $\sigma_3^2 = \dfrac{\left(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2\right) + \left(nd_1^2 + md_2^2\right)}{n+m}$.

The number of copies sold per day, during the first 100 days after publishing a new book, had mean 2.3 and variance 0.8. During the next 100 days, the number of copies sold per day had mean 1.7 and variance 0.5. Find the mean and the variance of the number of copies sold per day during the first 200 days.

(a) In a single toss of the die A, the probability $P(n)$ of obtaining a face with number n is given below:

n	1	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Let X_i be the number obtained in the i^{th} toss for $i = 1, 2$.

Then $P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1 \text{ and } X_2 = 5) + P(X_1 = 5 \text{ and } X_2 = 1)$

$+ P(X_1 = 2 \text{ and } X_2 = 4) + P(X_1 = 4 \text{ and } X_2 = 2)$

$+ P(X_1 = 3 \text{ and } X_2 = 3)$

$= 4 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$ 15

$= \dfrac{2}{9}$. 5

20

$P(\omega)$

Then $P(Y_1 + Y_2 = 6) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ 15

$= \frac{1}{4}$ 5

20

By Bayes' Theorem,

$$P(A \mid \text{sum} = 6) = \frac{P(\text{sum} = 6 \mid A)P(A)}{P(\text{sum} = 6 \mid A)P(A) + P(\text{sum} = 6 \mid B)P(B)}$$ 10

$= \frac{8}{17}$ 5

10

30

(iii) $\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m}$ 5 - For both

Now $\mu = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{m + n}$ 5

$= \frac{n\mu_1 + m\mu_2}{m + n}$ 5

15

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu)^2$ 5

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1 - d_1)^2$

$= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \mu_1)^2 + 2d_1(x_i - \mu_1) + d_1^2\right]$ 5

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 - 2d_1\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1) + \sum_{i=1}^{n} d_1^2$ 5

$= n\sigma_1^2 + nd_1^2$ $\quad \sum (x_i - \mu_1) = 0$ and $\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \mu_1)^2}{n}$

5 5

$= n(\sigma_1^2 + d_1^2)$ 5

30

Similarly, $\sum (y_i - \mu)^2 = m(\sigma_2^2 + d_2^2)$ where $d_2 = \mu_2 - \mu$ 5

05

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu)^2}{m + n}$$ 5

$$= \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m + n}$$

$$= \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + (nd_1^2 + md_2^2)}{m + n}$$ 5

10

For the first 100 :

$n = 100,\ \mu_1 = 2.3,\quad \sigma_1 = 0.8$

For the second 100

$m = 100,\ \mu_2 = 1.7\quad \sigma_2 = 0.5$

5

From the above, $\mu = \frac{230 + 170}{200} = 2$ 5

Note that $d_1 = -0.3$, and $d_2 = 0.3$

$$\sigma^2 = \frac{100}{200}(0.8^2 + 0.5^2 + (0.3)^2 + (0.3)^2)$$ 5

Then $P(Y_1 + Y_2 = 6) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ 15

$= \frac{1}{4}$ 5

20

By Bayes Theorem,

$P(\ldots \mid \text{sum} = 6) = \frac{P(\text{sum} = 6 \mid \ldots)P(\ldots)}{P(\text{sum} = 6 \mid \ldots)P(\ldots) + P(\text{sum} = 6 \mid \ldots)P(\ldots)}$ 10

5

10

30

$\mu_1 = \frac{\sum x_i}{m}$ 5 For both

$\mu = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{m + n}$ 5

$= \frac{m\mu_1 + n\mu_2}{m + n}$ 5

15

$\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu)^2$ 5

$= \sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1 + d_1)^2$

$= \sum_{i=1}^{m}\left[(x_i - \mu_1)^2 + 2d_1(x_i - \mu_1) + d_1^2\right]$ 5

$= \sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2 + 2d_1\sum(x_i - \mu_1) + \sum d_1^2$ 5

$= m\sigma_1^2 + md_1^2$ $\quad \sum(x_i - \mu_1) = 0$ and $\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_i - \mu_1)^2}{m}$

5 5

$= m(\sigma_1^2 + d_1^2)$ 5

30

Similarly, $\sum(y_i - \mu)^2 = n(\sigma_2^2 + d_2^2)$ where $d_2 = \mu_2 - \mu$ 5

05

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{m + n}$ 5

$= \frac{m(\sigma_1^2 + d_1^2) + n(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m + n}$

$= \frac{(m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2) + (md_1^2 + nd_2^2)}{m + n}$ 5

10

For the first 100 :

$m = 100,\ \mu_1 = 2.3,\quad \sigma_1 = 0.8$

For the second 100 :

$n = 100,\ \mu_2 = 1.7,\quad \sigma_2 = 0.5$

5

From the above $\mu = \frac{230 + 170}{200} = 2$ 5

Note that $d_1 = -0.3$, and $d_2 = 0.3$

$\sigma^2 = \frac{100}{200}[0.8^2 + 0.5^2 + (0.3)^2 + (0.3)^2]$ 5

$$= \frac{1}{2}[0.64 + 0.25 + 0.09 \times 2]$$

$$= \frac{1.07}{2} = 0.535$$

$$\sigma_3 = \sqrt{0.535} \qquad 5$$

20